

طبقا للمنهج المطور



٢

الشامل في

تبسيط الرياضيات

للمصف الثاني الثانوي

الفصل الدراسي الأول

بنين و بنات

تأليف

أمجد نعيم



### الفصل الأول

#### الدوال والمتباينات

|    |                                                           |
|----|-----------------------------------------------------------|
| ٨  | ✱ خصائص الأعداد الحقيقية                                  |
| ١٣ | ✱ العلاقات والدوال                                        |
| ١٦ | ✱ دوال خاصة                                               |
| ٢١ | ✱ تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا |
| ٢٥ | ✱ حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا                       |
| ٢٩ | ✱ البرمجة الخطية والحل الأمثل                             |

### الفصل الثاني

#### المصفوفات

|    |                                                  |
|----|--------------------------------------------------|
| ٤٢ | ✱ مقدمة في المصفوفات                             |
| ٤٦ | ✱ العمليات على المصفوفات                         |
| ٤٩ | ✱ ضرب المصفوفات                                  |
| ٥٤ | ✱ المحددات وقاعدة كرامر                          |
| ٦٢ | ✱ النظرير الضري للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية |

### الفصل الثالث

#### كثيرات الحدود ونوالها

|     |                              |
|-----|------------------------------|
| ٧٤  | ✱ الأعداد المركبة            |
| ٧٩  | ✱ القانون العام والمميز      |
| ٨٤  | ✱ العمليات على كثيرات الحدود |
| ٨٦  | ✱ قسمة كثيرات الحدود         |
| ٩١  | ✱ دوال كثيرات الحدود         |
| ٩٧  | ✱ حل معادلات كثيرات الحدود   |
| ١٠٣ | ✱ نظريتا الباقي والعوامل     |
| ١٠٨ | ✱ الجنور والأصفار            |
| ١١٣ | ✱ نظرية الصفر النسبي         |

### الفصل الرابع

#### العلاقات والدوال العكسية والجذرية

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| ١٢٥ | ✱ العمليات على الدوال              |
| ١٢٩ | ✱ العلاقات والدوال العكسية         |
| ١٣٢ | ✱ دوال ومتباينات الجذر التريبيعي   |
| ١٣٦ | ✱ الجذر التوني                     |
| ١٤٠ | ✱ العمليات على العبارات الجذرية    |
| ١٤٤ | ✱ الأسس النسبية                    |
| ١٤٦ | ✱ حل المعادلات والمتباينات الجذرية |







# الفصل الأول

## الدوال والمتباينات

❖ خصائص الأعداد الحقيقية

❖ العلاقات والدوال

❖ دوال خاصة

❖ تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة

بيانيا

❖ حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا

❖ البرمجة الخطية والحل الأمثل





## حلول اختبار سريع

جد الناتج فيما يأتي:

|                                                    |     |                                                        |     |
|----------------------------------------------------|-----|--------------------------------------------------------|-----|
| $-18.54 - (-32.05)$<br>$= 13.51$                   | - ٢ | $15.7 - (-3.45)$<br>$= 12.25$                          | - ١ |
| $4 \div (-0.5)$<br>$= -8$                          | - ٤ | $-9.8 - 6.75$<br>$= -16.55$                            | - ٣ |
| $\frac{54}{7} - \frac{26}{6}$<br>$= 3\frac{8}{21}$ | - ٦ | $3\frac{2}{3} + (-1\frac{4}{5})$<br>$= 1\frac{13}{15}$ | - ٥ |
| $-3 \div (\frac{7}{8})$<br>$= -3\frac{3}{7}$       | - ٨ | $(\frac{6}{5})(-\frac{10}{9})$<br>$= -1\frac{1}{3}$    | - ٧ |

٩ - تحتاج فاطمة إلى  $m$  من القماش لصنع ربطة شعر

، فكم مترا من القماش يلزمها لصنع ١٢ ربطة؟

تحتاج فاطمة إلى :  $\frac{7}{8} \times 12 = 10.5$  مترا

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي إذا كانت  $a=-3, b=4, c=-2$

|                        |    |               |    |
|------------------------|----|---------------|----|
| $2b-5c=18$             | ١١ | $4a-3=-15$    | ١٠ |
| $\frac{2a+4b}{c} = -5$ | ١٣ | $b^2-3b+6=10$ | ١٢ |

١٤ - تستعمل شركة اتصالات العبارة  $0.25m + 20$  لإيجاد التكلفة بالريال لـ  $m$  من دقائق

الاتصال. أوجد تكلفة ٨٠ دقيقة اتصال؟

تكلفة ٨٠ دقيقة اتصال هي :  $20 + 0.25(80) = 40$  ريال

مثل كل متباينة مما يأتي بيانيا :

١٥ -  $y < 3$

الحد هو المستقيم  $y=3$  وبما أن رمز المتباينة هو  $<$  فإن الحد سيكون منقطع.

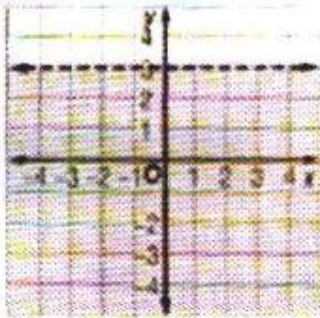
نختار النقطة (٠،٠) :  $0 > 3$  (صحيح)  $\Rightarrow$  نظل المنطقة التي تحتوي النقطة (٠،٠)

(17)  $3x-y > 6$

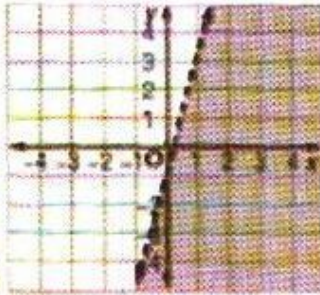
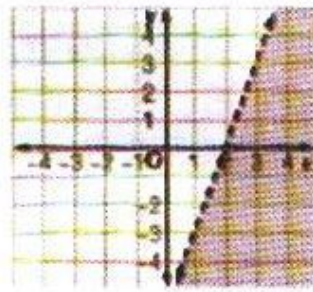
الحد هو المستقيم  $3x-y=6$  وبما أن رمز المتباينة هو  $>$  فإن الحد سيكون منقطع.

نختار النقطة (٠،٠) :

$0 > 6$  (خطأ)  $\Rightarrow$  نظل المنطقة التي لا تحتوي النقطة (٠،٠)







$$y > 4x - 1 \quad (19)$$

الحد هو المستقيم  $y = 4x - 1$  وبما أن رمز المتباينة هو  $>$  فإن الحد سيكون متقطع.  
نختار النقطة  $(0,0)$  :

$0 > -1$  (صحيح)  $\Rightarrow$  نظل المنطقة التي تحتوي النقطة  $(0,0)$

## خصائص الأعداد الحقيقية

1-1

### عزيزي الطالب

لنتذكر سويا مجموعات الأعداد المختلفة التي درسناها سابقا.

مجموعة الأعداد النسبية  $(Q)$  : هي التي تكتب على الصورة  $\frac{a}{b}$ ، حيث  $b \neq 0$  لا تساوي الصفر.  
مجموعة الأعداد الغير نسبية  $(I)$  : هي التي الصورة العشرية لها ليست منتهية وليست دورية.  
مجموعة الأعداد الصحيحة  $(Z)$  :

$\{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$  هي

مجموعة الأعداد الكلية  $(W)$  : هي  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعة الأعداد الطبيعية  $(N)$  : هي  $\{1, 2, 3, \dots\}$



**انتبه** جميع المجموعات هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية  $(R)$

### مثال

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي :

١.  $\{Z, Q, R\} \ni -185$

٢.  $\{Z, Q, R\} \ni -\sqrt{49}$

٣.  $\{I, R\} \ni \sqrt{95}$

٤.  $\{Q, R\} \ni \frac{-7}{8}$

يمكن أن ينتمي العدد إلى أكثر من مجموعة أعداد فمثلا العدد ٢ هو عدد طبيعي، كلي، صحيح، نسبي وحقيقي.

المعرفة



## خصائص الأعداد الحقيقية:

### خصائص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية:-

أولاً الخاصية التبديلية لعملية الجمع على ح:-

إذا كان س ، ص تنتمي إلى ح فإن  $س + ص = ص + س$

$$\text{مثال :- } ٥ - + ٢ = ٢ + ٥ - ، ١٥ + ٣ = ٣ + ١٥$$

ثانياً خاصية العنصر المحايد لعملية الجمع على ح:-

لكل س تنتمي إلى ح فإن  $س + ٠ = ٠ + س = س$

- أي أن الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على ح.

مثال :-

$$٥ = ٥ + ٠ = ٠ + ٥$$

$$١٥ = ١٥ + ٠ = ٠ + ١٥$$

ثالثاً الخاصية التجميعية لعملية الجمع على ح:-

إذا كانت س ، ص ، ع تنتمي إلى ح فإن  $(س + ص) + ع = س + (ص + ع)$

مثال :-

$$٢٩ = (١٠ + ٤) + ١٥ = ١٠ + (٤ + ١٥)$$

$$٦ = (٢ + ٥) + ١ - = ٢ + (٥ + ١ -)$$

رابعاً خاصية النظير الجمعي للعدد الحقيقي :-

لكل عدد حقيقي س نظير (معكوس) جمعي (و) هو العدد الحقيقي - س ، حيث أن :-

$$س + (-س) = ٠$$

مثال :-

$$٠ = ٥ + ٥$$

$$٠ = ٣٠ + ٣٠ -$$

### خصائص عملية الضرب على الأعداد الحقيقية:-

أولاً الخاصية التبديلية لعملية الضرب على ح:-

إذا كان س ، ص تنتمي إلى ح فإن  $س * ص = ص * س$

مثال :-

$$٥٠ = ٥ * ١٠ = ١٠ * ٥$$

$$١٢ = ٣ * ٤ = ٤ * ٣$$

ثانياً الخاصية التجميعية لعملية الضرب على ح :-

إذا كان س ، ص ، ع تنتمي إلى ح فإن ( س \* ص ) \* ع = س \* ( ص \* ع )  
مثال :-

$$10 = (2 * 1) * 5 = 2 * (1 * 5)$$

$$72 = (4 * 3) * 6 = 4 * (3 * 6)$$

ثالثاً خاصية العنصر المحايد لعملية الضرب على ح :-

لكل س تنتمي إلى ح فإن س \* 1 = 1 \* س = س  
أي أن الواحد هو العنصر المحايد لعملية الضرب على ح .

مثال :-

$$7 = 1 * 7 = 7 * 1$$

$$8 = 1 * 8 = 8 * 1$$

رابعاً خاصية النظير الضربي للعدد الحقيقي ( مقلوب العدد الحقيقي ) :-

لكل س تنتمي إلى ح ، س لا تساوي ٠ ، يوجد عدد حقيقي يرمز له بالرمز ١/س يسمى النظير الضربي ( المقلوب ) للعدد س و يحقق العلاقة س \* ١/س = ١/س \* س = ١  
مثال :-

$$1 = 1 * ١/١ = ١/١ * 1$$

$$2 = 2 * ١/٢ = ١/٢ * 2$$

خامساً خاصية توزيع الضرب على الجمع :-

لكل س ، ص ، ع تنتمي إلى ح ، فإن س ( ص + ع ) = س \* ص + س \* ع  
و كذلك ( ص + ع ) س = ص \* س + ع \* س  
مثال :-

$$\text{أوجد } ٥ * ( ٣ + ٢ ) ؟$$

$$\text{الحل :- } ٥ * ( ٣ + ٢ ) = ٥ * ٣ + ٥ * ٢$$

$$15 + 10 =$$

$$25 =$$

### مثال

ما الخاصية الموضحة في العبارة :  $2(X+3)=2X+6$   
الحل : خاصية توزيع الضرب على الجمع.

**انتبه** إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد أما إشارة النظير الضربي لعدد فهي نفسها إشارة العدد.



## مثال

أوجد النظير الضربي والجمعي للأعداد التالية :

- ١,٢٥ ← النظير الجمعي ١,٢٥ - بينما النظير الضربي ٠,٨
- ٢,٥ ← النظير الجمعي ٢,٥ - بينما النظير الضربي ٠,٤

## مثال

بسّط العبارة التالية:  $3(4X-2Y)-2(3X+Y)$

$$\begin{aligned} &= 12X - 6Y - 6X - 2Y \\ &= 6X - 8Y \end{aligned}$$

الحل :

## تدريبات وحلول

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

$$\{I, R\} \ni \sqrt{11} \quad (٢) \quad \{Z, Q, R, N, W\} \ni ٦٢ \quad (١)$$

اذكر الخاصية الموضحة في كل مما يلي:

(٥) الخاصية التجميعية لعملية الضرب

(٦) خاصية توزيع الضرب على الجمع

(٧) الخاصية التبديلية لعملية الجمع

أوجد النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يلي :

$$(١٠) \quad \frac{4}{9} \text{ النظير الجمعي } -\frac{4}{9} \text{ بينما النظير الضربي } \frac{9}{4}$$

$$(١١) \quad \sqrt{5} \text{ النظير الجمعي } -\sqrt{5} \text{ بينما النظير الضربي } \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(١٢) \quad a \quad 44(2+4+3+1+5+6)$$

$$(b) \quad 44(2)+44(4)+44(3)+44(1)+44(5)+44(6)$$

$$= 88+176+132+44+220+264 = 924 \text{ ريال}$$

(C) إذا استمر في خياطة العدد نفسه من الأتواب فإنه سيحصل على المبلغ الذي يريده في نهاية يوم الاثنين من الأسبوع التالي.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$(14) \quad 5(3x+6y)+4(2x-9y)$$

$$= 15x+30y+8x-36y$$

$$= 23x-6y$$

$$(16) \quad -4(6c-3d)-5(-2c-4d)$$

$$= -24c+12d+10c+20d$$

$$= -14c+32d$$

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

$$\{Q, R\} \ni 0.61 \quad (21) \quad \{Q, R\} \ni -٨,١٣ \quad (١٩)$$

$$\{I, R\} \ni \sqrt{17} \quad (٢٥) \quad \{Z, Q, R\} \ni -\sqrt{144} \quad (٢٣)$$

اذكر الخاصية الموضحة في كل مما يلي:

(٢٦) خاصية النظير الجمعي.

(٢٨) خاصية العملية التجميعية في عملية الجمع.

أوجد النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يلي :

(٣٠) - النظير الجمعي 8 بينما النظير الضربي  $\frac{1}{8}$

(٣٢) 0.25 - النظير الجمعي 0.25 بينما النظير الضربي -4

(٣٤)  $\frac{3}{8}$  - النظير الجمعي  $\frac{3}{8}$  بينما النظير الضربي  $\frac{8}{3}$

(٣٦) قيمة الانخفاض هي :

$$= 0.15(50+60+40) = 22.5$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$-2a - 9d - 5a - 6d \quad (38)$$

$$= -7a + 3d$$

$$6(9a - 3b) - 8(2a + 4b) \quad (40)$$

$$= 54a - 18b - 16a - 32b$$

$$= 38a - 50b$$

$$-5(10x + 8z) - 6(4x - 7z) \quad (42)$$

$$= -50x - 40z - 24x + 42z$$

$$= -74x + 2z$$

(43) يمكن كتابة العبارتين كالتالي :

$$(1) \dots\dots\dots 53(60+60) *$$

$$(2) \dots\dots\dots 53(60)+53(60) *$$

مساحة الملعب =  $6360 \text{ yd}^2$

(44a) سعر الأجهزة الإجمالي قبل الخصم  $170+350+110=630$

$$630 - (170+350+110)(0.30) \quad \bullet$$

$$630 - [170(0.30) + 350(0.30) + 110(0.30)] \quad \bullet$$

(44b) المبلغ الذي سيدفعه أحمد بحد أيا من المعادلتين السابقتين هو ٤٤١ ريالاً

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{1}{19} (5x+8y) + \frac{1}{4} (6x-2y) \quad (45)$$

$$= \frac{1}{6} x + \frac{13}{6} y$$

$$-6(3a+5b) - 3(6a-8c) \quad (47)$$

$$= -36a - 30b + 24c$$

(٤٩a) يحتاج محمد إلى :  $2(3\frac{3}{4}) + 3(2\frac{1}{3}) = 14\frac{1}{2}$

(٥٥) خاصية الانغلاق للضرب لا تنطبق على الأعداد الغير نسبية مثل :

$$\sqrt{6} \times \sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$$

والعدد 6 عدد نسبي.

(٥٧) الحد العاشر في المتتابعة هو (b)

$$(x+2)(x-3) \quad (٦٠)$$

$$= x^2 - 3x + 2x - 6$$

$$= x^2 - x - 6$$

$$\frac{1}{6} b + 1 \quad (٦٢)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + 1$$



## العلاقات والدوال

1-2

### عزيزي الطالب

لنتذكر سويا أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى .  
مفهوم/ الدالة المتباينة : كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى أي أنه لا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.

### مثال

تحقق من فهمك ص ١٧ —

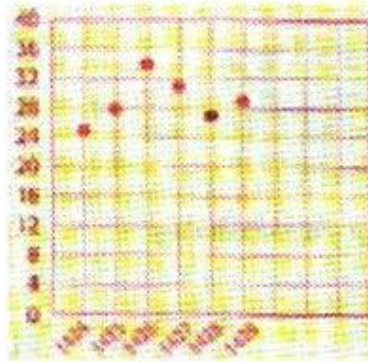
- (A) المجال  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4\}$   
المدى  $\{-3, -2, 1, 2, 4\}$  وهي ليست دالة.  
(B) المجال  $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$   
المدى  $\{0, 2, 4, 6\}$  وهذه العلاقة دالة وليست متباينة.

### أنواع العلاقات:

- (١) علاقة منفصلة : وهي التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط المنفردة وتمثل بيانياً بنقاط غير متصلة.  
(٢) علاقة متصلة : وهي التي يكون فيها المجال مجموعة من العناصر الغير منتهية وتمثل بيانياً بمستقيم أو منحنى متصل.

### مثال

تحقق من فهمك ص ١٨ — (٢) :



### ما هو المتغير:

المتغير إما تابع أو مستقل أما المستقل فهو في الغالب ما يكون (X) وأما التابع في الغالب ما يكون (Y) وقيمته تعتمد على قيمة (X) .

### مثال

لتكن  $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$

١ -  $g(2.8)$

$$g(2.8) = 0.5(2.8^2) - 5(2.8) + 3.5$$

$$= -6.58$$

٢ -  $g(4a)$

$$G(4a) = 0.5(4a^2) - 5(4a) + 3.5$$

$$8a^2 - 20a + 3.5$$

## تدريبات وحلول

حدد كلا من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي ثم حدد إذا كانت دالة أم لا وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا ؟

(١) المجال  $\{5, 6, -2\}$

المدى  $\{3, 1, -8\}$

(١) المجال  $\{-2, 1, 4, 8\}$

المدى  $\{-4, -2, 6\}$

(4a) المجال  $\{22, 23, 24, 25\}$

المدى  $\{16.2, 24.1, 27.2, 23.5\}$

(4b)  $\{(22, 16.2)(23, 24.1)(24, 27.2)(25, 23.5)\}$

(4c) علاقة منفصلة

(4d) نعم العلاقة دالة

وهذه العلاقة دالة وهي دالة متباينة .

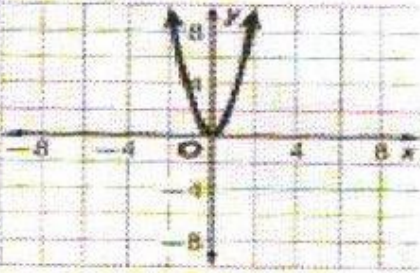
وهذه العلاقة دالة وهي ليست متباينة



(٥) المجال : جميع الأعداد الحقيقية

المدى : جميع الأعداد الحقيقية.

الدالة متباينة ومتصلة



(٧) المجال : جميع الأعداد الحقيقية

المدى :  $\{y: y \geq 0\}$

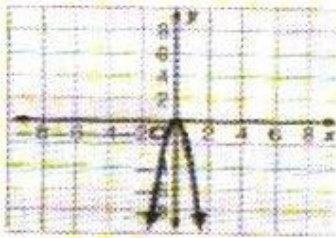
الدالة ليست متباينة ومتصلة

وهذه العلاقة دالة وهي دالة متباينة .

(١١) المجال  $\{-0.3, 0.4, 1.2\}$

المدى  $\{-6, -3, -1\}$

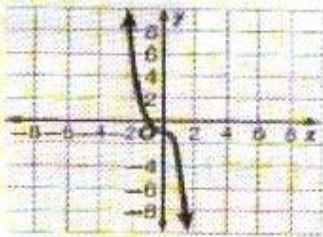
(١٥)



المجال : جميع الأعداد الحقيقية

المدى :  $\{y: y \leq 0\}$  جميع الأعداد الحقيقية.

الدالة ليست متباينة ومتصلة.



(١٧)

المجال : جميع الأعداد الحقيقية

المدى : جميع الأعداد الحقيقية.

الدالة متباينة ومتصلة.

(١٩) أوجد قيمة  $f(2.5)$  إذا كانت  $f(x) = 16x^2 - 4(-3) - 8$   
 $= 100$



إذا كانت  $f(x) = 3x + 2$ ,  $g(x) = -2x^2$ ,  $g(x) = -4x^2 - 2x + 5$  فأوجد كل مما يلي :

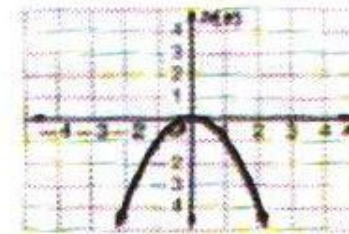
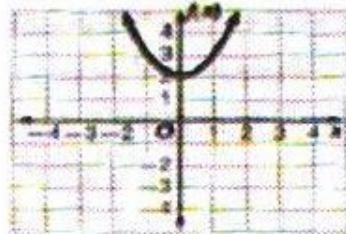
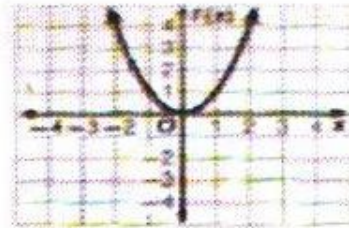
(٢١)  $g(-6)$

$$\begin{aligned} g(-6) &= -2(-6^2) \\ &= -2(36) \\ &= -72 \end{aligned}$$

(25)  $g(\frac{3}{2})$

$$\begin{aligned} g(\frac{3}{2}) &= -2(\frac{3^2}{2}) \\ &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

(27a)



(27b-d)

| نوع الدالة   | عدد المرات الممكنة | الدالة           |
|--------------|--------------------|------------------|
| ليست متباينة | 0,1,2              | $F(x) = x^2$     |
| متباينة      | 0,1                | $G(x) = 2^x$     |
| ليست متباينة | 0,1,2              | $H(x) = -x^2$    |
| ليست متباينة | 0,1,2              | $J(x) = x^2 + 2$ |

(٢٩) أحمد إجابته صحيحة لأن خالد لم يقم بتربيع العدد ٣ قبل الضرب في -٤

(٣١) ممكن أن تكون  $f(x) = 4x - 1$

$g(x) = 6x + 3$

(٣٢) لا يمكن أن تكون صحيحة.

(٣٤) الخيار الصحيح هو  $(A) g = 19500 - 6m$

(٤٠)  $8d - 4 + 3d = 2d - 100 - 7d$

$$= 8d + 3d - 2d + 7d = +4 - 100$$

$$16d = -96$$

$$d = -6$$



## دوال خاصة

1-3

### الدالة المتعددة التعريف:

هي الدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر.

كيف نمثلها بيانياً؟

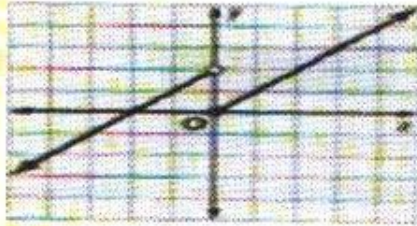
نضع دائرة صغيرة مظلمة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني ونضع دائرة غير مظلمة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

### مثال

مثال بيانياً الدالة  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$  ثم حدد كلا من مجالها ومداها؟

### خطوات الحل:

- (١) نمثل  $f(x) = x+2$  بيانياً عندما  $x < 0$
- (٢) نحسب قيمة المقدار  $x+2$  عندما  $x=0$   
 $f(0) = 0+2 = 2$
- وبما أن العدد ٠ لا يحقق المتباينة فإننا نبدأ بدائرة غير مظلمة عند النقطة  $(0,2)$
- (٣) نمثل  $f(x) = x$  بيانياً عندما  $x \geq 0$
- (٤) نحسب قيمة المقدار  $x$  عندما  $x=0$   
 $f(0) = 0$
- وبما أن العدد ٠ يحقق المتباينة فإننا نبدأ بدائرة مظلمة عند النقطة  $(0,0)$
- (٥) الدالة معرفة عند جميع قيم  $x$  فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية والمداى مجموعة الأعداد الحقيقية.
- (٦) الرسم :



### الدالة الدرجية

هي نوع من أنواع الدالة المتعددة التعريف الخطية وهي تتكون من قطع مستقيمة أفقية ومن أمثلتها دالة أكبر عدد صحيح.

تكتب دالة أكبر عدد صحيح على الصورة:  
 $f(x) = [x]$  وتعني أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي  $x$ .  
 مجال هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ومداها كذلك.

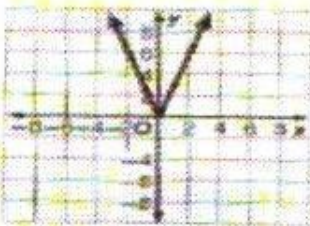
لاحظ

### دالة القيمة المطلقة

هي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز

القيمة المطلقة

دالة القيمة المطلقة الأساسية: الدالة الرئيسية (الأم)  $f(x) = |x|$ ، وتعرف على النحو الآتي:



$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

شكل التمثيل البياني على شكل حرف V

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية  
 المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة  
 المقطعان:  $x=0, f(x)=0$   
 ولا يمكن أن تكون  $f(x) < 0$



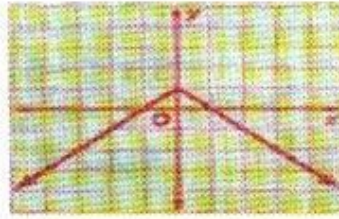
| $x$ | $- x +1$ |
|-----|----------|
| -2  | -1       |
| 0   | 1        |
| 1   | 0        |
| 2   | -1       |

مثال الدالة  $f(x) = -|x| + 1$  ثم حدد كل من

مجالاتها ومداها؟

\* نكون جنولا للقيم

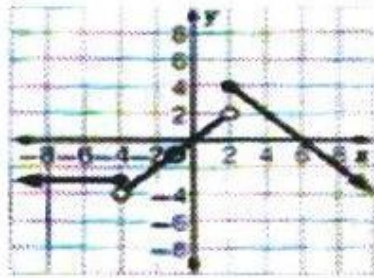
الرسم :



• المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

• المدى  $f(x); f(x) \leq 1$

## تجربيات وحلول



مثال كل دالة مما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداها:

$$F(x) = \begin{cases} -3, & x \leq -4 \\ x, & -4 < x < 2 \\ -x + 6, & x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

الرسم :

• المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

• المدى  $y(x), y \leq 4$

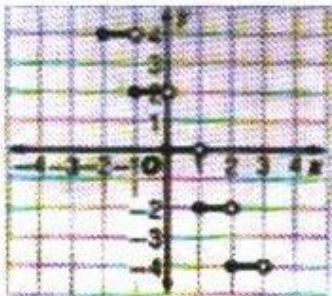
$$F(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -2 \\ -3, & -2 \leq x \leq 3 \\ -2x + 12, & x > 3 \end{cases} \quad (2)$$



٥- يريد احد الأطباء إلقاء محاضرة حول العدوى في قاعة تتسع لـ ٢٥٠ شخصا فقط، وكان عدد راغبين حضور المحاضرة أكثر من ذلك بكثير. مثل بيانيا دالة متعددة التعريف تبين العلاقة بين العدد الأدنى من المحاضرات  $r$  التي يجب أن يلقيها الطبيب وعدد حضور تلك المحاضرات  $x$ .

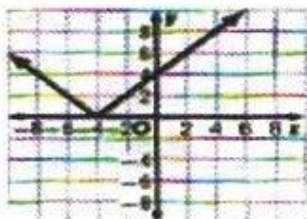
مثال كل دالة فما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداها؟

$$g(x) = -2[x] \quad (٦)$$



• المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

• المدى : مجموعة الأعداد الزوجية.



$$h(x) = |x + 4| \quad (١٠)$$

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى :  $h(x), h(x) \geq 0$



مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداه:

$$F(x) = \begin{cases} -3, & x \leq -4 \\ x, & 0 < x \leq 3 \\ 8, & x > 3 \end{cases} \quad (١٢)$$

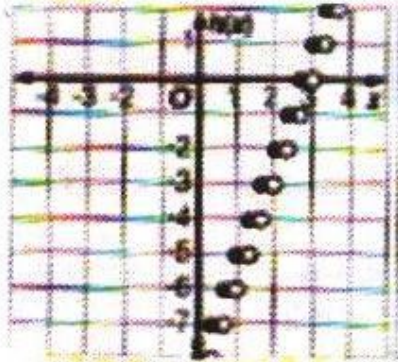
المجال  $x < 0$  المدى  $0 < f(x) \leq 3$

$$g(x) = \begin{cases} 8, & x \leq -6 \\ 0.25x + 2, & -4 \leq x \leq 4 \\ 4, & x > 6 \end{cases} \quad (١٤)$$

$$g(x) = \begin{cases} -9, & x < -5 \\ x + 4, & 0 \leq x \leq 3 \\ x - 3, & x > 7 \end{cases} \quad (١٦)$$

مثل كل دالة فيما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداه؟

$$h(x) = \lfloor 3x \rfloor - 8 \quad (١٨)$$



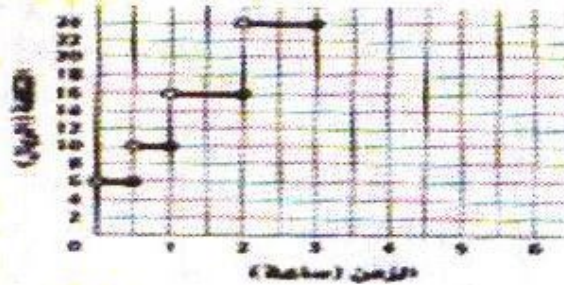
• المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

• المدى : مجموعة الأعداد الصحيحة

(٢٨) الدالة الدرجية

$$\begin{cases} 6 & 0 < t \leq 0.5 \\ 10 & 0.5 < t \leq 1 \end{cases} \quad (28b)$$

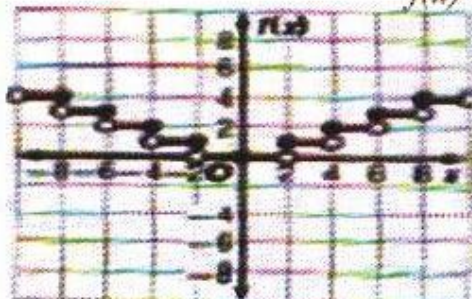
$f(t) =$



$$f(x) = |x + 5| \quad (٣٠)$$

مثل كل دالة فيما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداه؟

$$f(x) = \lfloor |0.5x| \rfloor \quad (٣١)$$

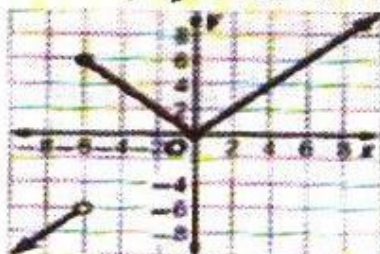


المدى : مجموعة الأعداد الصحيحة

• المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

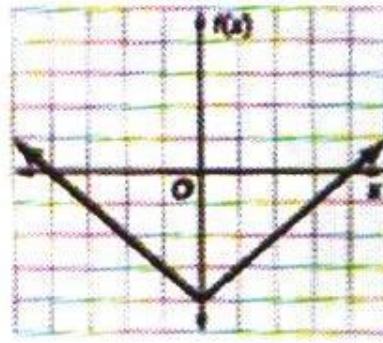
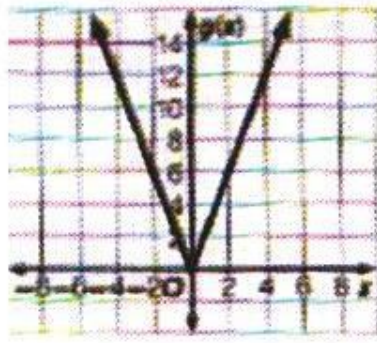
$$f(x) = \begin{cases} -|x|, & x < -6 \\ |x|, & -6 \leq x \leq 2 \\ -x, & x > 2 \end{cases} \quad (٣٤)$$

• المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية





• المدى :  $h(x) \leq 6$  أو  $h(x) \geq 0$  ،  $h(x)$  (b30)



(c30)

| x  | F(x) | الميل | G(x) | الميل |
|----|------|-------|------|-------|
| -4 | 0    | -     | 12   | -     |
| -3 | -1   | -1    | 9    | -3    |
| -2 | -2   | -1    | 6    | -3    |
| -1 | -3   | -1    | 3    | -3    |
| 0  | -4   | -1    | 0    | -3    |
| 1  | -3   | 1     | 3    | 3     |
| 2  | -2   | 1     | 6    | 3     |
| 3  | -1   | 1     | 9    | 3     |
| 4  | 0    | 1     | 12   | 3     |

(4/ الحد النوني للنمط المعطى  $(3n + 1)$  (43

$$f(2c) = -4(2c) + 6 \quad (43)$$

$$= -8c + 6$$

$$h(6) = \quad (45)$$

$$= -2(36) - 6(6) + 9$$

$$= -72 - 36 + 9$$

$$= -99$$

$$\{Z, Q, R\} \ni -3 \quad (47)$$

$$\{I, R\} \ni \sqrt{11} \quad (49)$$

## اختبار منتصف الفصل



حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

$$\{Q, R\} \ni \frac{25}{11} \quad (١)$$

$$\{I, R\} \ni \sqrt{11} \quad (٢)$$

$$\{Q, R\} \ni -32.4 \quad (٣)$$

اذكر الخاصية الموضحة في كل مما يلي:

$$(4+15)7 = 4 \times 7 + 15 \times 7$$

(٤) خاصية توزيع الضرب على الجمع

بسط العبارة: (٥)  $-3(7a-4b)+2(-3a+b)$

$$= -21a + 12b - 6a + 2b$$

$$= -27a + 14b$$

(٦) يريد سعد شراء ٣ قمصان و ٣ بناطيل فإذا كان سعر القميص الواحد ٣٥ ريالاً

وسعر البنطال الواحد ٥٥ ريالاً فأوجد المبلغ الذي يدفعه سعد بطريقتين مستعملاً

خاصية التوزيع:

$$3(35 + 55) \quad \bullet$$

$$= 3(90)$$

$$= 270$$

$$3(55) + 3(35) \quad \bullet$$

$$= 165 + 105$$

$$= 270$$

(٨) أي العبارات التالية تكافئ:

$$\frac{2}{3}(4m-5n) + \frac{1}{5}(2m+n)$$

(A) الحل

أوجد النظير الجمعي والضربي للعدد:

$$\frac{7}{6} \text{ النظير الجمعي } -\frac{7}{6} \text{ بينما النظير الضربي } \frac{6}{7}$$

(١٠) حدد كلا من مجال ومدى العلاقة الآتية ثم بين هل تمثل دالة أم لا:

$$\{3, 4, 0, 5\} = \text{المجال}$$

$$\{2, 1, 3, -2, 7\} = \text{المدى وهذه العلاقة لا تمثل دالة.}$$

$$f(-2) = 3(-8) - 2(-2) + 7 \quad (١٢)$$

$$= -24 + 4 + 7$$

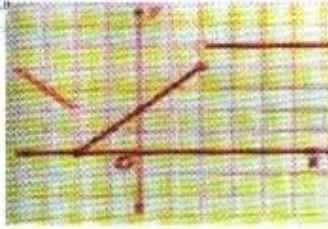
$$= -13$$

$$f(2y) = 3(8y) - 2(2y) + 7 \quad (١٣)$$

$$= 24y - 4y + 7$$

$$= 12.432$$





١٦) مثل بيانيا الدالة:

$$F(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ -1, & -1 \leq x \leq 3 \\ x - 1, & x > 3 \end{cases} \quad (١٧)$$

حدد كلا من المجال والمدى للدالة:

$$y = \lfloor x \rfloor + 2 \quad (١٨)$$

• المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

• المدى : مجموعة الأعداد الصحيحة

١٩) المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية المدى :  $f(x), x \geq 0$

### تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا

1-4

الانتباه الفرق بين المتباينة الخطية والمعادلة الخطية هو وضع رمز المتباينة بدلا من رمز المساواة.

#### مثال

مثل المتباينة التالية بيانيا :  $-x + 2y > 4$

خطوات الحل :

(١) حد المتباينة هو الخط المستقيم  $-x + 2y = 4$  (نمثله بيانيا)

(٢) بما أن رمز المتباينة هو  $>$  فإن الحد سيكون منقطع.

(٣) نختار النقطة  $(0,0)$  والتي لا تقع على حد المتباينة ونعوض في المتباينة:

$$-x + 2y > 4$$

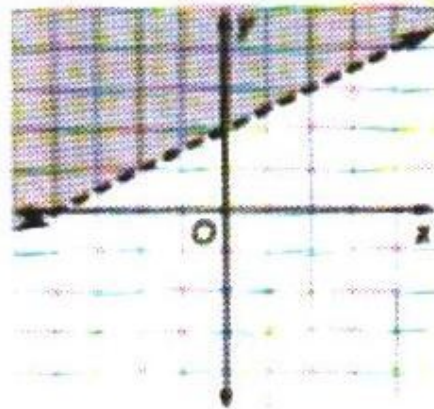
$$-0 + 2(0) > 4$$

$$0 > 4 \text{ (خطأ)}$$

(٤) نظل المنطقة التي لا تحتوي على  $(0,0)$

(٥) نظل المنطقة التي لا تحتوي على  $(0,0)$

(٦) نمثل الدالة:

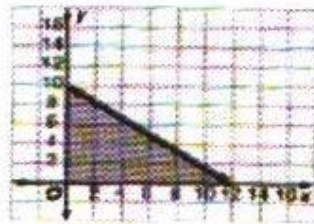


## مثال

مع صالح ٦٠ ريالاً يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية ٥ ريالات وثمان تذكرة كل لعبة عادية ٦ ريالات فاكتمل متباينة تصف هذا الموقف ثم مثلها بيانياً.

خطوات الحل :

- (١) نفرض  $x$  هو ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية.
- (٢) نفرض  $y$  هو ثمن تذكرة الألعاب العادية.
- (٣) المتباينة هي  $5x + 6y \leq 60$
- (٤) حد المتباينة هو الخط المستقيم  $5x + 6y = 60$  (نمثله بيانياً)
- (٥) بما أن رمز المتباينة هو  $\leq$  فإن الحد سيكون متصل.
- (٦) نختار النقطة  $(٠, ٠)$  والتي لا تقع على حد المتباينة ونعوض في المتباينة:  
 $0 \leq 60$  (صحيح)
- (٧) نظل المنطقة التي تحتوي على  $(٠, ٠)$
- (٨) نمثل الدالة:



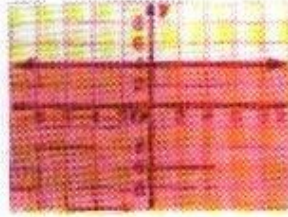
خطوات تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانياً:

- (١) نمثل معادلة القيمة المطلقة المرتبطة بالمتباينة.
- (٢) نحدد إذا كان المستقيم الذي يمثل حد المتباينة متقطع أو متصل.
- (٣) نحدد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.



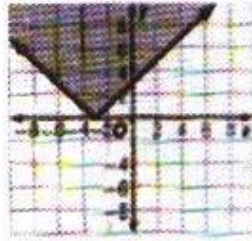
## تكريرات وحلول

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانيا:



$$y \leq 4 \quad (1)$$

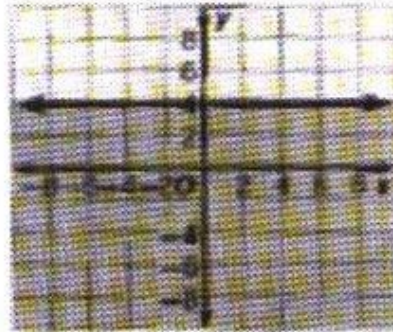
$$y \geq |x + 3| \quad (2)$$



$$x + 4y \leq 2 \quad (3)$$



$$2y + 3 \leq 11 \quad (4)$$



١٤) تحسب درجات الطلاب في مادة الرياضيات على أساس ٦٠ درجة للاختبار النهائي، ٤٠ درجة للاختبارات الشهرية ويتعين على هند الحصول على الدرجة ٩٠ على الأقل لتتال تقدير ممتاز في المادة:



(a) المتباينة  $x + y \geq 90$  تمثل هذا الموقف حيث  $x$  هي درجة هند في الاختبار النهائي و  $y$  هي درجة هند في الاختبارات الشهرية، مثل هذه المتباينة بيانيا.

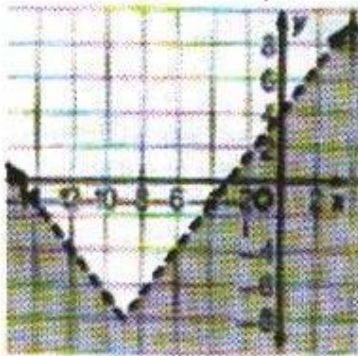
(b) اعتمادا على التمثيل البياني إذا كانت درجاتها في الاختبار النهائي ٥٠ درجة وفي الاختبارات الشهرية ٣٥ فهل ستحصل على التقدير ممتاز؟

الحل : لا.

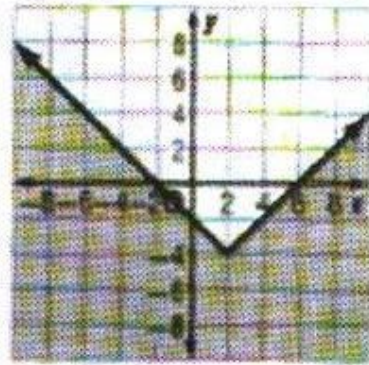


مثل كل متباينة فيما يأتي بيانيا:

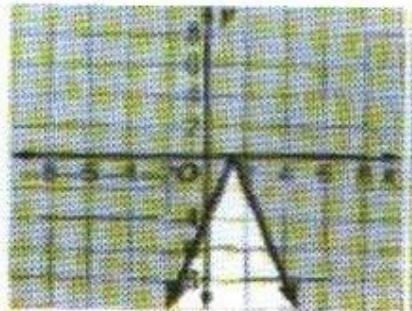
$$y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right| \quad (١٨)$$



$$y + 4 \leq |x - 2| \quad (١٦)$$



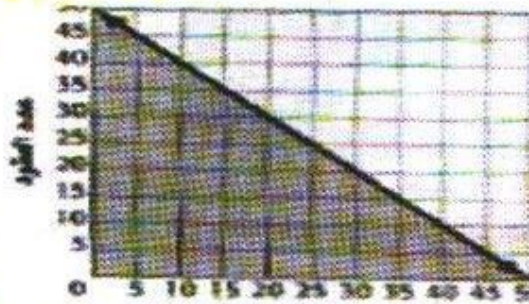
$$-y \leq |3x - 4| \quad (٢٠)$$



(٢٨) تصنع ميساء عقودا وأساور من الخرز، لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة ولديها من الخرز ما يكفي لصنع ٥٠ قطعة. لتكن  $x$  عدد الأساور،  $y$  عدد العقود:

$$x + y \leq 50 \quad \text{الحل:}$$

(a) اكتب متباينة تبين عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء.



(b) مثل المتباينة بيانيا.

(c) أعط ثلاثة حلول لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.

الحل: عدد الأساور ٢٠ وعدد العقود ٣٠.

عدد الأساور ٠ وعدد العقود ٥٠.

عدد الأساور ٥٠ وعدد العقود ٠.

(٣٥) مصعب تمثيله صحيح.

(٣٦) عندما تكون كلا من  $x, y$  داخل القيمة المطلقة.

(٣٧) المتباينة  $|x| \leq -2$  ليس لها حل لأن ناتج القيمة المطلقة دائما أكبر من أو يساوي الصفر.

(٣٨) (c) مجموعة الأعداد الصحيحة.



انتبه

## كيف نحل نظم المتباينات الخطية

- \* بايجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام وذلك بإجراء التالي:
- نمثل كل متباينة في النظام بيانيا ونظل منطقة الحل.
- نحدد المنطقة المظلة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام..

يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين في أي نقطة وبالتالي لا يوجد حل للنظام في هذه الحالة وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية التي يرمز لها بالرمز  $\emptyset$  أو  $\{ \}$

## مثال

خرج مشاري ويدر في رحلة لزيارة بعض محافظات المملكة برا فتنابوا قيادة السيارة فإذا كانت فترات قيادة مشاري للسيارة على نحو متواصل في اليوم لا تقل عن 4 ساعات ولا تزيد عن 8 ساعات وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحو متواصل في اليوم لا تقل عن ساعتين ولا تزيد على خمس ساعات وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يوميا لا يزيد على 10 ساعات فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف، ثم مثله بيانيا.

الحل : نفرض أن  $x$  هو عدد ساعات قيادة مشاري للسيارة

نفرض أن  $y$  هو عدد ساعات قيادة بدر للسيارة.

المتباينة التي تمثل عدد ساعات قيادة مشاري للسيارة :

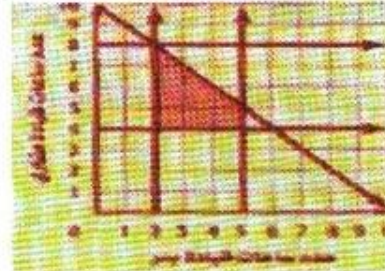
$$4 \leq x \leq 8$$

المتباينة التي تمثل عدد ساعات قيادة بدر للسيارة :

$$2 \leq y \leq 5$$

المتباينة التي تمثل عدد ساعات قيادة كليهما للسيارة :

$$x + y \leq 10$$



إذا احتوت المتباينة على رمز  $<$ ،  $>$  فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل ويمثل الحد بمستقيم متقطع، أما إذا احتوت على رمز  $\leq$ ،  $\geq$  فإن الحد يدخل ضمن إطار الحل ويمثل الحد بمستقيم متصل.

المعرفة

ينتج في كثير من الأحيان من تمثيل نظم متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع يمكننا إيجاد إحداثيات رؤوسه بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للشكل المضلع..

ملاحظة



جد أحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي :

$$y \geq -3x - 6$$

$$2y \geq x - 16$$

$$11y + 7x \leq 12$$

(١) نوجد نقطة تقاطع المستقيم  $y = -3x - 6$  مع المستقيم  $2y = x - 16$

$$-3x - 6 = (x - 16) \times 0.5$$

$$-3x - 6 = 0.5x - 8$$

$$2 = 3.5x$$

$$x = 0.57$$

بالتعويض عن قيمة  $x$  لإيجاد قيمة  $y$  :

$$y = -3(0.57) - 6$$

$$y = -7.71$$

النقطة الأولى هي  $(0.57, -7.71)$

(٢) نوجد نقطة تقاطع المستقيم  $y = -3x - 6$  مع المستقيم  $12 = 11y + 7x$

$$12 - 7x = -33x - 66$$

$$26x = -78$$

$$x = -3$$

بالتعويض عن قيمة  $x$  لإيجاد قيمة  $y$  :

$$y = -3(-3) - 6$$

$$y = 3$$

النقطة الثانية هي  $(-3, 3)$

(٣) نوجد نقطة تقاطع المستقيم  $2y = x - 16$  مع المستقيم  $12 = 11y + 7x$

$$12 - 7x = 11(x - 16) \times 0.5$$

$$12 - 7x = 5.5x - 88$$

$$12.5x = 100$$

$$x = 8$$

$$y = 4 \quad \vee \quad y = 8 - 16$$

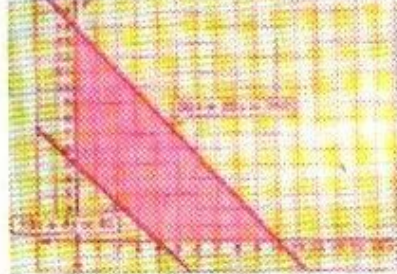
بالتعويض عن قيمة  $x$  لإيجاد قيمة  $y$  :



## تكريرات وحلول

٤) خصصت ليلي مبلغا لا يتجاوز ٣٥٠ ريالاً لشراء نوعين من الأقلام. يباع الأول في رزم تضم الواحدة منها ١٠ أقلام وتُمنها ٢٥ ريالاً فإذا أرادت ليلي شراء ٤٠ قلماً على الأقل من كلا النوعين.

(a) مثل بيانياً نظام المتباينات الذي يبين عدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.



(b) أعط ثلاث خيارات ممكنة لعدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين. ممكن أن تشتري ٤ رزم من النوع الأول و ٥ من الثاني أو ٥ من النوع الأول و ٦ من النوع الثاني.

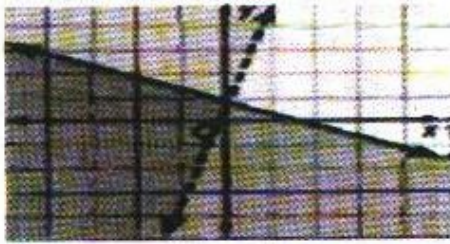
(5) جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي :

$$y \geq 2x + 1$$

$$y \leq 8$$

$$4x + 3y \geq 8$$

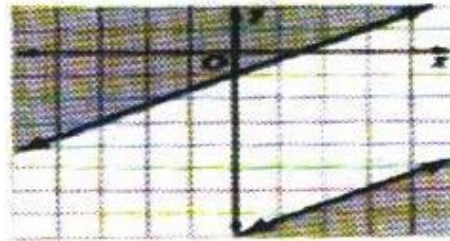
بحل المعادلات ومساواتها بعضها البعض نجد أن نقاط التقاطع هي  $(0.5, 2)$ ,  $(-4, 8)$ ,  $(3.5, 8)$



حل كل نظام فيما يأتي بيانياً:

$$-8x > -2y - 1 \quad (12)$$

$$-4y \geq 2x - 5$$



$$3y - 2x \leq -24 \quad (14)$$

$$y \geq \frac{2}{3} - 1$$

٢٤) تصنف الأشجار في المناطق الحرجية تبعاً للارتفاع ومحيط الساق إلى أربع مجموعات ويبين الجدول التالي ارتفاع ومحيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى المناطق الحرجية:

| المجموعة        | الأشجار المسيطرة | الأشجار شبه المسيطرة | الأشجار المتوسطة المسيطرة | الأشجار غير المسيطرة |
|-----------------|------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| الارتفاع (ft)   | أكثر من ٧٠       | ٥٦ - ٧٢              | ٤٠ - ٥٥                   | أقل من ٣٩            |
| محيط الساق (in) | أكثر من ٦٠       | ٤٨ - ٦٠              | ٣٤ - ٤٨                   | أقل من ٣٣            |

(a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل مدى كل من : الارتفاع  $h$  ومحيط الساق  $c$  للأشجار شبه المسيطرة.

$$56 \leq h \leq 72 \quad (\text{الارتفاع})$$

$$48 \leq c \leq 60 \quad (\text{محيط الساق})$$



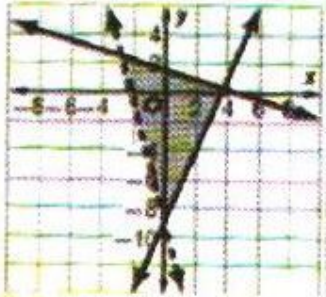
(c) ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة الزيزفون ارتفاعها ٤٨ متر ثم أوجد محيط ساقها المتوقع؟  
تنتمي شجرة الزيزفون إلى فصيلة الأشجار المتوسطة السيطرة ويتوقع أن يكون محيطها ٤٨ - ٣٤ .

حل كل نظام فيما يأتي بيانياً:

$$6y + 2x \leq 9 \quad (29)$$

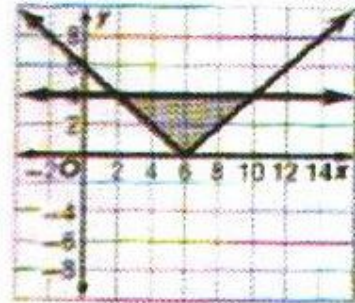
$$2y + 18 \geq 5x$$

$$y > -4x - 9$$



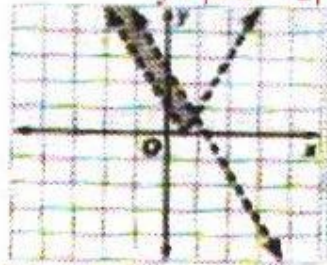
$$y \geq |6x - 3| \quad (26)$$

$$|y| \leq 4$$

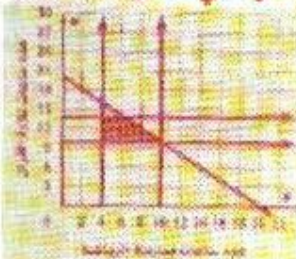


$$8x + 4y < 10 \quad (32)$$

$$y > |2x - 1|$$



(٣٤) يستثمر رامي وقت فراغه في ممارسة الرياضة وتلاوة القرآن فإذا كان مجمل وقت فراغه لا يتجاوز ٢٠ ساعة أسبوعياً، ويقضي من ٤ إلى ١٠ ساعات منها في ممارسة الرياضة ولا يقل زمن تلاوته للقرآن عن ١٠ ساعات ولا يزيد على ١٤ ساعة. فاكتب نظام متباينات خطية يمثل ذلك الموقف ومثله بيانياً؟



نفرض أن  $w$  هي عدد ساعات تلاوة القرآن :  $10 \leq w \leq 14$   
نفرض أن  $e$  هي عدد ساعات ممارسة الرياضة :  $4 \leq e \leq 10$   
متباينة وقت الفراغ :  $e + w \leq 20$

جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي :

$$y \geq -x - 8 \quad (36)$$

$$2y \geq 3x - 20$$

$$x + 4y \leq 24$$

$$y \leq 4x + 22$$

بحل المعادلات ومساواتها بعضها البعض نجد أن نقاط التقاطع هي:

$$(-6, -2), (-3.76, 7), (9.1, 3.7), (0.8, -8.8)$$

(40) اكتب نظاماً من متباينتين على أن يكون الحل:

(a) في الربع الثالث فقط

$$x < -2, y < -3$$

$$Y > 3, y \leq -3$$

(C) واقعا على خط مستقيم

$$y \geq x, y \leq x$$

(d) نقطة واحدة فقط

$$y \geq |x|, y < -|x|$$



$$y \geq 2x - 6$$

$$y \leq -8.5x + 4$$

$$y \geq -3x - 6$$

(42) الجملة ( النظام المكون من متباينتين خطيتين إما أن يكون ليس له حل أو أن يكون له عدد لانهائي من الحلول هي جملة صحيحة.

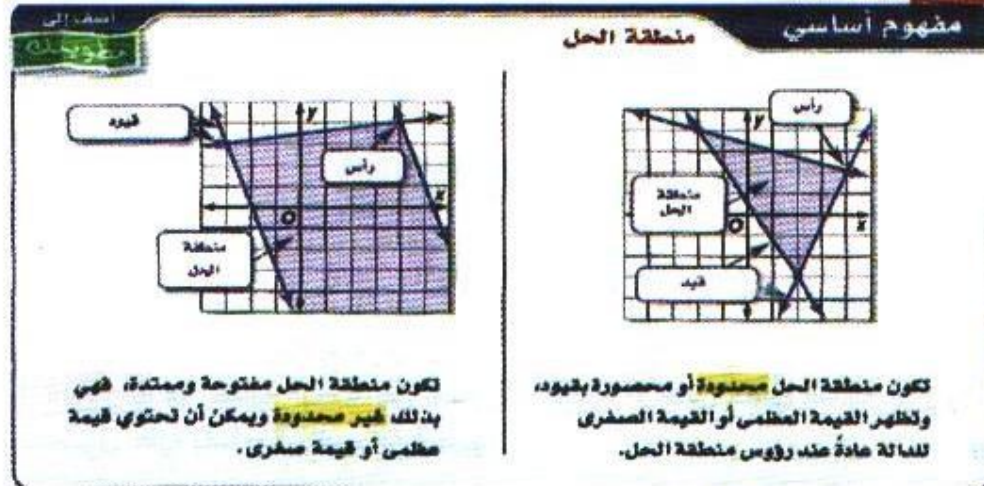
(44) البديل الصحيح هو:  $y = 3x + 2$  (b)

## 1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل

### البرمجة الخطية:

هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية وذلك بتمثيل نظام المتباينات بيانيا وتوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ذات الصلة دائما عند أحد رؤوس منطقة الحل.

### منطقة الحل:



### مثال

مثل نظام المتباينات الآتي بيانيا ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$-2 \leq x \leq 6$$

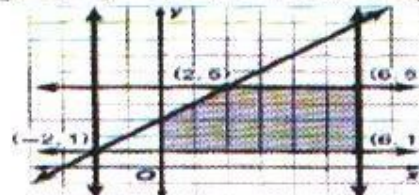
$$1 \leq y \leq 5$$

$$y \leq x + 3$$

$$f(x, y) = -5x + 2y$$

**الحل:**

(1) نمثل المتباينات كما تعلمنا في الدرس السابق ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا



(٢) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

| $(x,y)$   | $F(x,y)$ |
|-----------|----------|
| $(-2, 1)$ | 8        |
| $(6, 1)$  | -28      |
| $(6, 5)$  | -20      |
| $(2, 5)$  | 0        |

(٣) من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي ٨ عند النقطة  $(-2, 1)$  وبينما القيمة الصغرى للدالة هي -٢٨ عند النقطة  $(6, 1)$

ملاحظة: إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقة غير مغلقة فإن النظام غير محدود وهنا نختبر قيمة الدالة عند كل رأس لنحدد إذا كان هناك قيم عظمى أو صغرى.

### مثال

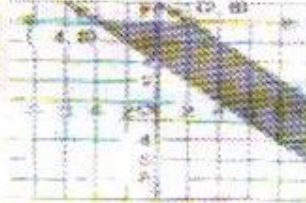
مثل نظام المتباينات الآتي بيانيا ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$y \leq 8$$

$$y \geq -x + 4$$

$$y \leq -x + 10$$

$$f(x,y) = -6x + 8y$$



الحل : ١- نمثل المتباينات كما تعلمنا في الدرس السابق ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقاً.

نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

| $(x,y)$   | $F(x,y)$ |
|-----------|----------|
| $(2, 8)$  | 52       |
| $(-4, 8)$ | 88       |

من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي ٨٨ عند النقطة  $(-4, 8)$  وبينما لا يوجد قيمة صغرى لها .

**إيجاد الحل الأمثل:** هو عملية البحث عن السعر أو الكمية الأفضل لتقليل التكلفة أو زيادة الربح ويمكن الحصول عليه باستعمال البرمجة الخطية.

(١) نحدد المتغيرات

(٢) نكتب نظام المتباينات الخطية الذي يمثل المسألة.

(٣) نمثل نظام المتباينات بيانياً.

(٤) نوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

(٥) نكتب الدالة الخطية التي نريد إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لها.

(٦) نعوض عن إحداثيات الرؤوس في الدالة.

(٧) نختار القيمة العظمى أو الصغرى حسب ما هو مطلوب في الدالة.

**خطوات إيجاد  
الحل الأمثل  
باستعمال  
البرمجة  
الخطية:**



## تفريعات وحلول

مثل كل نظام مما يأتي بيانيا ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

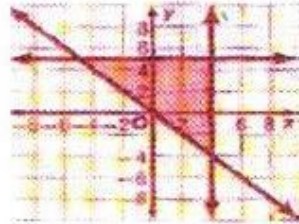
$$y \leq 5 \quad (1)$$

$$x \leq 4$$

$$y \geq -x$$

$$f(x, y) = 5x - 2y$$

الحل: ١- نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

| $(x, y)$  | $F(x, y)$ |
|-----------|-----------|
| $(4, 5)$  | 10        |
| $(4, -4)$ | 28        |
| $(-5, 5)$ | -35       |

من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي 28 عند النقطة  $(4, -)$  بينما القيمة الصغرى للدالة هي -35 عند النقطة  $(-5, 5)$

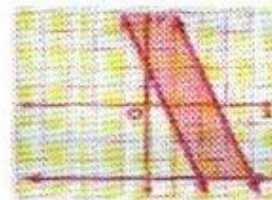
$$y \geq -3x + 2 \quad (3)$$

$$9x + 3y \leq 24$$

$$y \geq -4$$

$$f(x, y) = 2x + 14y$$

الحل : ١- نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

| $(x, y)$  | $F(x, y)$ |
|-----------|-----------|
| $(2, -4)$ | -52       |
| $(4, -4)$ | -48       |

من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أنه لا يوجد قيمة عظمى للدالة بينما القيمة الصغرى للدالة هي -52 عند النقطة  $(2, -4)$

$$-3 \leq y \leq 7 \quad (5)$$

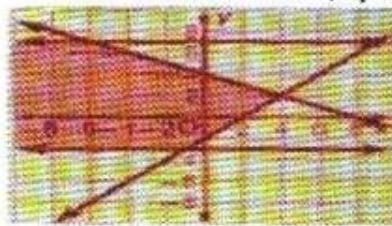
$$4y \geq 4x - 8$$

$$6y + 3x \leq 24$$

$$F(x, y) = -12x + 9y$$

الحل :

(١) نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



(٢) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

| $(x,y)$    | $F(x,y)$ |
|------------|----------|
| $(4, 2)$   | $-30$    |
| $(-1, -3)$ | $-15$    |
| $(-6, -7)$ | $9$      |

(٣) من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أنه لا يوجد قيمة عظمى للدالة بينما القيمة الصغرى للدالة هي  $-30$  عند النقطة  $(4,2)$

(٧) يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات  $200$  ساعة على الأكثر، ولعمال قسم ضبط الجودة  $90$  ساعة على الأكثر ويبين الجدول الآتي عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج وضبط جودة نوعين من الغسالات.

| النوع  | قسم الإنتاج | قسم ضبط الجودة |
|--------|-------------|----------------|
| الأول  | ٥ ساعات     | ساعتان         |
| الثاني | ٤ ساعات     | ساعتان         |

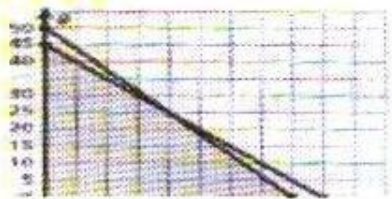
(a) النظام الذي يمثل عدد ساعات عمل عمال قسم الإنتاج وقسم ضبط الجودة:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$5x + 4y \leq 200$$

$$2x + 2y \leq 90$$

(b) التمثيل البياني :



(e) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس

| $(x,y)$    | $F(x,y)$ |
|------------|----------|
| $(0, 0)$   | $0$      |
| $(40, 0)$  | $3200$   |
| $(20, 25)$ | $2850$   |
| $(0, 45)$  | $2250$   |

من الجدول السابق نجد أن أكبر ربح ممكن نحصل عليه هو  $3200$  ريالاً عند تصنيع  $40$  غسالة من النوع الأول وعدم إنتاج أي غسالة من النوع الثاني.

مثل كل نظام مما يأتي بيانياً ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$-8 \leq y \leq -2$$

(٨)

$$y \leq x$$

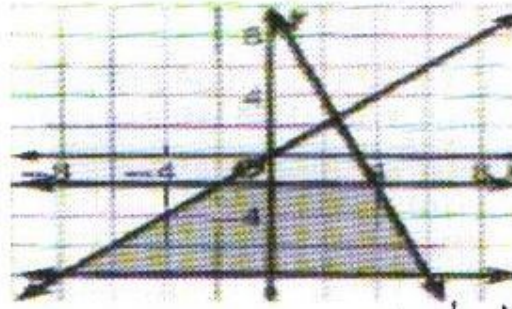
$$y \leq -3x + 10$$

$$f(x,y) = 5x + 14y$$



الحل :

(١) نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



(٢) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

| $(x, y)$   | $F(x, y)$ |
|------------|-----------|
| $(4, -2)$  | -8        |
| $(6, -8)$  | -82       |
| $(-8, -8)$ | -152      |
| $(-2, -2)$ | -38       |

من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي -8 عند النقطة  $(4, -2)$  بينما القيمة الصغرى للدالة هي -152 عند النقطة  $(-8, -8)$

$$x \geq -8 \quad (12)$$

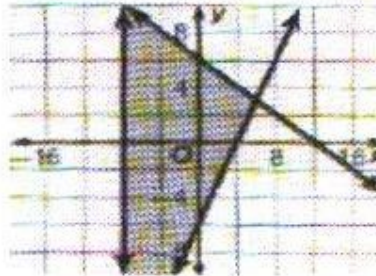
$$3x + 6y \leq 36$$

$$y + 12 \geq 3x$$

$$f(x, y) = 10x - 6y$$

الحل :

(١) نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



(٢) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

| $(x, y)$    | $F(x, y)$ |
|-------------|-----------|
| $(6, 3)$    | 42        |
| $(-8, 10)$  | -140      |
| $(-8, -18)$ | 28        |

(٣) من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي 42 عند النقطة  $(6, 3)$  بينما القيمة الصغرى للدالة هي -140 عند النقطة  $(-8, 10)$

(١٧) ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة يباع النوع الأول بسعر ٢٥ ريالاً أما النوع الثاني فيباع بسعر ٣٥ ريالاً فإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على ٤٥٠ وحدة إنارة يوميا وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن ١٠٠ وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على ٢٠٠ وحدة إنارة من النوع الثاني فما عدد وحدات الإنارة التي تتطلب إنتاجها من كل نوع ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟

الحل : \* نفرض أن النوع الأول من وحدات الإنارة هو  $x$

• نفرض النوع الثاني من وحدات الإنارة هو  $y$



- نظام المتباينات الذي يمثل المسألة هو :

$$x \geq 100$$

$$y \leq 200$$

$$x + y \leq 450$$

المعادلة التي تمثل مقدار الربح هي :  $F(x, y) = 25x + 35y$   
بمسألة نظام المتباينات وإيجاد نقاط التقاطع نجد أنها:  $(100, 200)$ ,  $(250, 200)$

| $(x, y)$     | $F(x, y)$ |
|--------------|-----------|
| $(100, 200)$ | 9500      |
| $(250, 200)$ | 13250     |

- من الجدول نجد أن أكبر ربح ممكن هو ١٣٢٥٠ ريالاً يحققها المصنع إذا أنتج ٢٥٠ وحدة إنارة من النوع الأول و ٢٠٠ وحدة من النوع الثاني.

١٩- إذا كان الوقت المتاح لمعاذ لطلاء ما يمكنه من ٤٥ جداراً وسقفاً متساوية المساحة لكلا النوعين في أحد المباني هو ٢٠ يوماً ويستطيع معاذ طلاء ٢,٥ جداراً أو سقفين في اليوم الواحد :

(a) النظام الذي يمثل هذا الموقف:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$x + y \leq 45$$

$$4x + 5y \leq 200$$

(b) من الرسم ومن مساواة المعادلات بعضها البعض نجد أن إحداثيات رؤوس المنطقة هي  $(0, 0)$ ,  $(45, 0)$ ,  $(0, 40)$ ,  $(25, 20)$   
(c) الدالة التي تمثل الربح الكلي لكلا النوعين :

$$F(x, y) = 26x + 30y$$

٢١- يقوم أحد المصانع بإعادة تدوير مالا يزيد على ١٢٠٠ طن من البلاستيك شهرياً لصنع حلويات بمقاسين صغير وكبير وعلى المصنع أن يستعمل مالا يقل عن ٣٠٠ طن في صنع الحلويات الصغيرة ومالا يقل عن ٤٥٠ طناً في صنع الحلويات الكبيرة إذا كان المصنع يحقق ربها قدره ١٧٥ ريالاً لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحلويات الصغيرة و ٢٠٠ ريال لكل طن تم استعماله لصنع الحلويات الكبيرة فما أكبر ربح ممكن تحقيقه وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحلويات لتحقيق ذلك الربح؟

الحل : \* نفرض أن المقاس الصغير  $x$

- نفرض أن المقاس الكبير  $y$

- نظام المتباينات الذي يمثل المسألة هو :

$$x \geq 350$$

$$y \leq 450$$

$$x + y \leq 1200$$

المعادلة التي تمثل مقدار الربح هي :  $F(x, y) = 175x + 200y$  بمسألة نظام المتباينات وإيجاد نقاط التقاطع نجد أنها :

$$(300, 450), (300, 900), (750, 450)$$

| $(x, y)$     | $F(x, y)$ |
|--------------|-----------|
| $(300, 450)$ | 142500    |
| $(300, 900)$ | 232500    |
| $(750, 450)$ | 221250    |

- من الجدول نجد أن أكبر ربح ممكن هو ٢٣٢٥٠٠ ريالاً يحققها المصنع إذا أنتج ٣٠٠ طن من الحلويات الصغيرة و ٩٠٠ طن من الحلويات الكبيرة.



$$-4 \geq y \geq -12$$

(٢٢)

$$8 \leq x \leq 18$$

(٢٤) النظام المختلف هو الشكل (b) لان منطقة الحل فيه غير مغلقة.

(٢٦) الخيار الصحيح هو (b)

(٢٧) الخيار الصحيح هو (d)

$$\{N, W, Z, Q, R\} \ni \sqrt[3]{27} \quad (٢٣)$$

## اختبار الفصل الأول

١ - الحل:  $x + y^2(2 + x)$

$$= x + 2y^2 + xy^2$$

$$= 3 + 2 + 3 = 8$$

٢ - الحل:  $-4(3a+b) - 2(a-5b)$

$$-12a - 4b - 2a + 10b$$

$$-14a + 6b$$

٣ - الحل: البديل الصحيح هو  $(\frac{47}{3})$  (c)

٤ - الحل: محيط سياج الحوض الواحد  $= 7 + 7 + 5 + 12 = 31$

طول السياج الذي يحتاج إليه  $= 31 \times 3 = 93 \text{ ft}$

$$\frac{3(x+y)}{4xy^2} = -\frac{3}{8} \quad \text{٥ - الحل:}$$

٦ - المجال  $\{-2, 4, 3, 6\}$

المدى  $\{3, -1, 2\}$

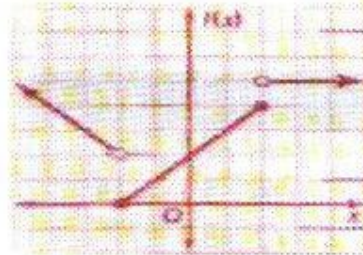
الدالة ليست متباينة.

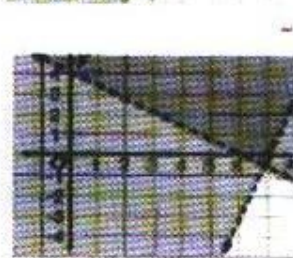
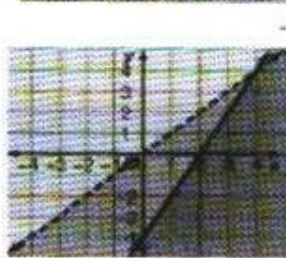
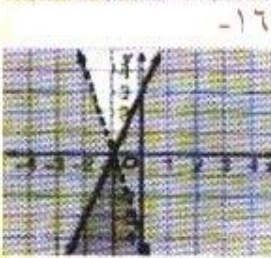
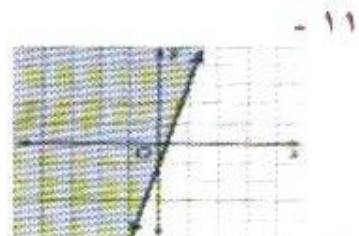
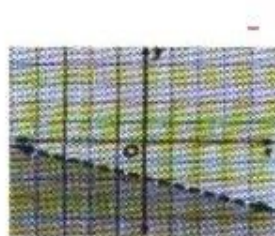
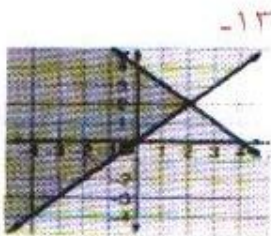
٧ - الحل:  $f(-4) = -2(-4) + 3 = 11$

٨ - الحل:  $f(3y) = -2(3y) + 3 = -6y + 3$

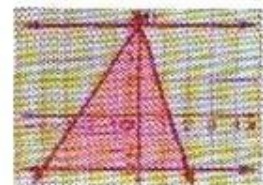
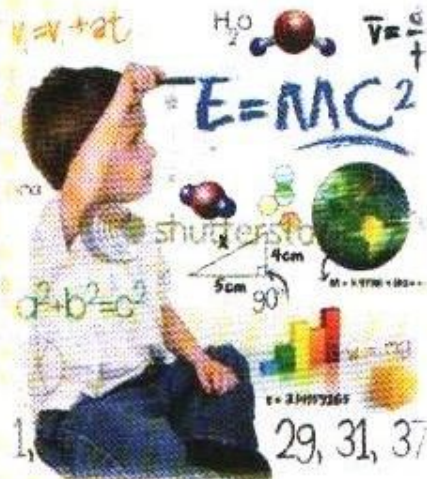
٩ - الحل: البديل الصحيح هو (c) ٢١,٠ ريالاً.

- ١٠





١٧ - البديل الصحيح هو (b) ٥٠  
 $c \geq 0, t \geq 0$  (a-١٨)  
 $C + 2t \leq 108$   
 $0.5c + t \leq 20$



| $(x,y)$    | $F(x,y)$ |
|------------|----------|
| $(-4, -4)$ | -4       |
| $(0, 5)$   | -15      |
| $(2, -3)$  | 17       |

- من الرسم والجدول نجد أن القيمة العظمى للدالة هي ١٧ عند النقطة  $(2, -3)$  والقيمة الصغرى هي -١٥ عند النقطة  $(0, 5)$ .



Math  
made easy



أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

١ - الحل: (B) -1

٢ - الحل: (A)  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

٣ - الحل: (D) الأعداد الكلية

٤ - الحل: (C)  $\{-3, 1, 2, 6\}$

٥ - الحل: (A) -2

٦ - الحل: (B) المنطقة II

٧ - الحل: (A)  $(0, 0)$

٨ - الحل:  $-4(3A-B) + 3(-2A+5B)$

$-12A + 4B - 6A + 15B$

$-18A + 19B$

٩ - الحل:  $f(x) = \begin{cases} 5 & , x < -4 \\ -x - 2 & , -4 \leq x \leq 4 \\ 2x - 12 & , x > 4 \end{cases}$

١٠ - الحل: عند  $x = -3$  فإن الدالة تساوي  $-2 - (-3) = 1$

١١ - الحل: (a) أخطأ خالد عندما ضرب العدد ٣ في ٤ وكان نتاجه ١٢ فالجواب الصحيح ١٢

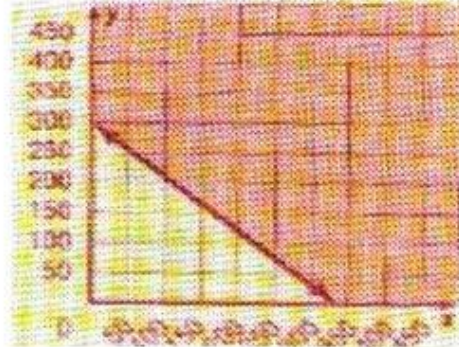
(b) الجواب الصحيح  $1\frac{3}{4}$

١٢ - الحل:

$$0.45x + 0.5y \geq 150$$

(a)

(B)



(C) إذا باع المخبز ١٨٠ قطعة كعك و ١٦٠ فطيرة فإن الربح سيكون :

$$0.45(180) + 0.5(160) = 81 + 80 = 161$$

١٣ - الحل:

(a)  $x \geq 0, y \geq 0$

$$5x + 5y \leq 40$$

$$2x + y \leq 15$$

(b) إحداثيات نقاط رؤوس منطقة الحل هي :

$(0, 0), (0, 8), (7.5, 0), (7, 1)$

$$f(x, y) = 12x + 8y \quad d(c)$$





## الفصل الثاني

# المصفوفات

- ❖ مقدمة في المصفوفات
- ❖ العمليات على المصفوفات
- ❖ ضرب المصفوفات
- ❖ المحددات وقاعدة كرامر
- ❖ النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية





## التهيئة للفصل الثاني

### حلّول اختبار سريع

أوجد كلا من المعكوس الجمعي والضربي لكل عدد مما يأتي:

$$٠,٢(٣)$$

٥ المعكوس الضربي لها بينما -٢,٠ المعكوس الجمعي

$$\frac{-3}{4}(٥)$$

المعكوس الضربي لها  $\frac{-4}{3}$  أما المعكوس الجمعي  $\frac{3}{4}$

بسّط كل عبارة مما يلي:

$$6(x + 2y) \quad (٧)$$

$$= 6x + 12y$$

$$6(2x - 1) - 3(y - x) + 0.5(4x - 6) \quad (11)$$

$$12x - 6 - 3y + 3x + 2x - 3$$

$$= 17x - 3y - 9$$

حل نظام المعادلتين في كل مما يلي باستعمال طريقة التعويض أو الحذف:

$$2x - y = -1 \quad (١٢)$$

$$Y = x + 3$$

بترتيب المعادلة الأولى :

$$2x + 1 = x + 3$$

بمساواة المعادلتين :

$$2x - x = 3 - 1$$

$$X = 2$$

بالتعويض عن قيمة  $x$  في إحدى المعادلتين الأصليتين:

$$Y = 2 + 3 = 5$$

$$(x, y) = (2, 5)$$

$$4y + 6x = -6$$

(١٤)

$$5y - x = 35 \quad \dots \times 6$$

$$= 30y - 6x = 210$$

بجمع المعادلتين الأولى والثالثة:

$$34y = 204$$

$$Y = 6$$

بالتعويض عن قيمة  $y$  في إحدى المعادلتين الأصليتين:

$$4(6) + 6x = -6$$

$$24 + 6x = -6$$

$$6x = -30$$

$$X = -5$$

$$(x, y) = (-5, 6)$$

**ماهي المصفوفة؟**

هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين وتسمى كل قيمة في المصفوفة عنصرا ورمز للمصفوفة باستعمال الحروف الكبيرة.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة السابقة تتكون من صفين وثلاثة أعمدة والعنصر 5 موجود في الصف الثاني والعمود الثالث ويرمز له بالرمز  $a_{23}$

**كيف نحدد نوع المصفوفة:** نحدد نوع المصفوفة برتبها فالمصفوفة المكونة من  $m$  صفا و  $n$  عمودا يقال عنها مصفوفة من الرتبة  $m \times n$

**مثال**

استعمل المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

للإجابة عن كل مما يلي :

(A) رتبة المصفوفة هي  $3 \times 2$

(B) قيمة  $b_{32}$  العنصر في الصف الثالث والعمود الثاني -1



**ملاحظة**

نقول عن مصفوفتين أنهما متساويتين إذا كانتا من الرتبة نفسها وتساوت عناصرهما المتناظرة.

**عزيزي الطالب/** هناك مصفوفات لها تسميات خاصة تعرف عليها فيما يلي :

| الاسم        | الوصف                        | مثال |
|--------------|------------------------------|------|
| مصفوفة صف    | تحتوي صف واحد                |      |
| مصفوفة عمود  | تحتوي عمود واحد              |      |
| مصفوفة مربعة | عدد الأعمدة يساوي عدد الصفوف |      |
| مصفوفة صفرية | جميع عناصرها أصفار           |      |

**مثال**

يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من الفطائر بثلاثة أحجام في احد المطاعم.

| نوع الفطيرة | حجم صغير | حجم متوسط | حجم كبير |
|-------------|----------|-----------|----------|
| الحلوى      | 3        | 4         | 5        |
| الزهر       | 2        | 3         | 4        |
| البسبوسة    | 3        | 4         | 5        |
| الكنافة     | 4        | 5         | 6        |

(A) حدد رتبة المصفوفة.

$4 \times 3$

(B) ما قيمة العنصر  $a_{21}$

3 ريال

**ننتبه** يمكننا تحليل البيانات وتفسيرها عند تنظيم بيانات المصفوفة وأحيانا تعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة معلومات ذات معنى وأحيانا لا.



يبين الجدول المجاور عدد المصانع الوطنية العاملة في قطاعي صناعة المنسوجات وصناعة الورق ومنتجاته في ٤ مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

| صناعة الورق ومنتجاته | صناعة المنسوجات | المنطقة     |
|----------------------|-----------------|-------------|
| ٤٥                   | ٢٨              | مكة المكرمة |
| ٤٩                   | ٢٩              | الرياض      |
| ٣٧                   | ١٤              | الشرقية     |
| ١                    | ١               | الباحة      |

(A) نظم البيانات في مصفوفة.

$$= \begin{bmatrix} 28 & 45 \\ 29 & 49 \\ 14 & 37 \end{bmatrix}$$

(B) اجمع عناصر كل عمود وفسر النتائج.

مجموع عناصر العمود الأول ٧٢ ومجموع عناصر العمود الثاني ١٣٢ ويمثل العمود الأول عدد مصانع المنسوجات والعمود الثاني عدد مصانع الورق ومنتجاته.

(C) اجمع عناصر كل صف وفسر النتائج.

مجموع عناصر الصف الأول ٧٣ وتمثل عدد مصانع المنسوجات والورق في مكة المكرمة ومجموع عناصر الصف الثاني ٧٨ وتمثل عدد مصانع المنسوجات والورق في الرياض ومجموع عناصر الصف الثالث ٥١ وتمثل عدد مصانع المنسوجات والورق في الشرقية ومجموع عناصر الصف الرابع ٢ وتمثل عدد مصانع المنسوجات والورق في الباحة.

(D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى.

معدل عناصر كل صف أو كل عمود ليس له معنى.

## تدريبات وحلول

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$2 \times 4 \quad (1)$$

$$4 \times 1 \quad (2)$$

$$3 \times 2 \quad (3)$$

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & X & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$  فحدد كل عنصر فيما يأتي :

$$-8 = a_{32} \quad (4)$$

$$1 = a_{11} \quad (5)$$

$$2 = a_{33} \quad (6)$$

$$9 = a_{24} \quad (7)$$

(8)  $a$ . المصفوفة التي تمثل البيانات المعطاة هي :

b. النوع الأقل إنتاجا هو الباذنجان

c. مجموع الصف الأول ٢٠٩٨ ويمثل عدد صناديق الخضروات التي تنتجها المزرعة الأولى بينما الصف الثاني مجموع ٣٤٨٥ ويمثل عدد صناديق الخضروات التي تنتجها المزرعة الثانية.

d. مجموع العمود الأول ١٣٩٠ وهو ما تنتجه المزرعتين معا من الخيار مجموع العمود الثاني ١٥٨٥ وهو ما تنتجه المزرعتين معا من الكوسة

مجموع العمود الثالث ١٢٨٨ وهو ما تنتجه المزرعتين معا من الباذنجان  
مجموع العمود الرابع ١٣٢٠ وهو ما تنتجه المزرعتين معا من الطماطم.

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$1 \times 2 \quad (9)$$

$$2 \times 4 \quad (11)$$

$$3 \times 1 \quad (13)$$

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$  فحدد كل عنصر فيما يأتي :

$$-9 = a_{21} \quad (15)$$

$$19 = b_{22} \quad (16)$$

$$2x = b_{13} \quad (17)$$

$$y = a_{12} \quad (18)$$

(20) a. المصفوفة التي تمثل البيانات المعطاة هي :

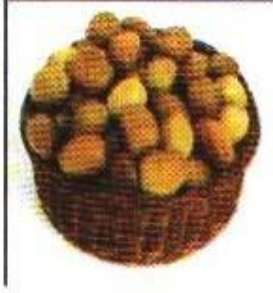
المخزن ١    المخزن ٢    المخزن ٣

$$\begin{bmatrix} 2000 & 3000 & 2750 \\ 1200 & 1175 & 1500 \\ 500 & 2250 & 1700 \end{bmatrix}$$

b. مجموع العمود الأول ٣٧٠٠ وهو ما يحتويه المخزن الأول من التمر مجموع العمود الثاني ٦٤٢٥ وهو ما يحتويه المخزن الثاني من التمر  
مجموع العمود الثالث ٥٩٥٠ وهو ما يحتويه المخزن الثالث من التمر



c. مجموع الصف الأول ٧٧٥٠ ويمثل عدد الكيلوجرامات من التمر الخلاص في المخازن الثلاثة بينما الصف الثاني مجموع ٣٨٧٥ ويمثل عدد الكيلوجرامات من التمر البرحي في المخازن الثلاثة بينما الصف الثالث مجموع ٤٤٥٠ ويمثل عدد الكيلوجرامات من التمر السكري في المخازن الثلاثة.



$$15 = a_{32} \quad (٢١)$$

$$4x = b_{21} \quad (٢٢)$$

$$-3 = b_{12} \quad (٢٣)$$

$$x = a_{21} \quad (٢٤)$$

$$b_{٢٥} \text{ المصفوفة السابقة من الرتبة } 2 \times 3$$

$$x^2 + 4 = a_{11} \quad (٢٦)$$

$$2 - y = a_{22} \quad (٢٧)$$

$$-y = b_{31} \quad (٢٨)$$

$$-4x = b_{23} \quad (٢٩)$$

$$a. \text{ أهداف تمريرات}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & \text{محمود} \\ 6 & 5 & \text{معاذ} \\ 1 & 8 & \text{صالح} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & \text{عبدالله} \end{bmatrix}$$

b) مجموع عناصر العمود الأول ١٩ وهي التمريرات بينما مجموع عناصر العمود الثاني ١٨ وهو عدد الأهداف.

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad (c)$$

d) مجموع عناصر الصف الأول ١٩ وهي التمريرات ومجموع عناصر الصف الثاني ١٨ وهي الأهداف.

e) لا ليس هناك تأثير عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة.

(٣٢) بما أن المصفوفة c مربعة فان عدد صفوفها أربعة وعدد أعمدتها أربعة وبالتالي لا يوجد عنصر في الصف الخامس.

(٣٣) لم تصف أي منهما الجواب الصحيح لأن العنصر  $b_{32}$  هو ٢

(٣٧) البديل الصحيح (D) عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

## 2-2 العمليات على المصفوفات

لاحظ جيداً  
يمكننا جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وإذا فقط كان لهما الرتبة نفسها.

### جمع المصفوفات وطرحها

التعبير اللفظي: إذا كانت  $A, B$  مصفوفتين من الرتبة  $m \times n$  فإن  $A + B$  هي مصفوفة أيضاً من الرتبة  $m \times n$  ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في  $A$  و  $B$  وكذلك  $A - B$  هي مصفوفة من الرتبة  $m \times n$  أيضاً، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

$$A + B = A + B \quad \text{الرموز:}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$A - B = A - B$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix} \quad \text{مثال:}$$

### مثال

أوجد قيمة مايلي:

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة  $A$  من الرتبة  $m \times n$  في العدد الثابت  $k$  هي مصفوفة  $kA$  من الرتبة  $m \times n$  وكل عنصر فيها يساوي العنصر المتناظر له في المصفوفة  $A$  مضروب في العدد الثابت  $k$ .

$$k \cdot A = kA \quad \text{الرموز:}$$

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix} \quad \text{مثال:}$$

### \* خصائص جمع المصفوفات:

لأي ثلاث مصفوفات  $A, B, C$  لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت  $K$  فإن الخصائص التالية صحيحة:

- (١) الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات  $(A+B=B+A)$
- (٢) الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات  $((A+B)+C=A+(B+C))$
- (٣) خاصية التوزيع للضرب في عدد  $(K(A+B)=KA+KB)$



## مثال

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$  فأوجد  $-6B + 7A$

$$-6B = \begin{bmatrix} -72 & -30 \\ -30 & 24 \\ -24 & 42 \end{bmatrix}$$

$$7A = \begin{bmatrix} -35 & 21 \\ 42 & -56 \\ 14 & 63 \end{bmatrix}$$

$$-6B + 7A = \begin{bmatrix} -107 & -9 \\ 12 & -32 \\ -10 & 105 \end{bmatrix}$$

## تكريرات وحلول

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:  
(١) لا يمكن إيجاد الناتج لأن المصفوفتين لهما رتبتين مختلفتين.

$$\begin{bmatrix} 7 & 31 & -14 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix} \quad (٤)$$

$$3 \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 0 \\ -6 & 42 & -24 \\ -12 & -18 & 21 \end{bmatrix} \quad (٥)$$

استعمل المصفوفات  $A, B$  لإيجاد ناتج كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$4B - 2A = \begin{bmatrix} 32 & -4 \\ -8 & 28 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 6 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ -14 & 38 \end{bmatrix} \quad (7)$$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -15 & -1 \end{bmatrix} \quad (٩)$$

(١٠) غير ممكن لأن الرتب تختلف

(١١) المصفوفة التي تمثل الأسعار هي :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(ب) العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة  $C$  فيه لإيجاد المصفوفة  $N$  التي تمثل الأسعار الجديدة هو ١,١

(ج) المصفوفة  $N$  هي :

$$= \begin{bmatrix} 3.3 & 4.4 & 5.5 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 4.4 & 5.5 & 6.6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 3 & 17 & -2 \\ 1 & -23 & 14 \end{bmatrix} \quad (١٣)$$

$$\begin{bmatrix} 13 & -40 & -5 \\ -6 & 13 & 14 \\ -11 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (١٥)$$

(١٧) غير ممكن لأن الرتب مختلفة.

$$\begin{bmatrix} -54 & 18 & 24 \\ 15 & 9 & -36 \\ 0 & -9X & 3Y \end{bmatrix} \quad (١٩)$$

$$\begin{bmatrix} 18.4 & 16.8 \\ -11.2 & 8.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16.4 & -11.6 \\ 28.8 & -32.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 28.4 \\ -40 & 41.4 \end{bmatrix} \quad (٢٣)$$

$$\begin{bmatrix} 435 \\ 299 \end{bmatrix} \quad (٢٥)$$

$$\begin{bmatrix} 172 \\ 354 \end{bmatrix}$$

(b٢٥) الصف الأول يمثل عدد المليجرامات من البوتاسيوم والفسفور والكالسيوم في الكيلوجرام الواحد من البر وكلي.

الصف الثاني يمثل عدد المليجرامات من البوتاسيوم والفسفور والكالسيوم في الكيلوجرام الواحد من الكرنب.

الصف الثالث يمثل عدد المليجرامات من البوتاسيوم والفسفور والكالسيوم في الكيلوجرام الواحد من القرنبيط.

الصف الرابع يمثل عدد المليجرامات من البوتاسيوم والفسفور والكالسيوم في الكيلوجرام الواحد من البامية.

$$(٢٦) \text{ نفرض أن } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

يجب إثبات أن  $A+B = B+A$

$$\text{بالتعويض } A+B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\text{تعريف الجمع على المصفوفات} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$\text{خاصية الإبدال على جمع الأعداد الحقيقية} = \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix}$$

$$\text{تعريف جمع المصفوفات} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{بالتعويض} = B+A$$

(٢٩)

|                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| (a) صحيحة دائما.  | (b) صحيحة دائما   |
| (c) صحيحة دائما.  | (d) صحيحة أحيانا. |
| (e) صحيحة أحيانا. |                   |

(٣٢) البديل الصحيح (C)

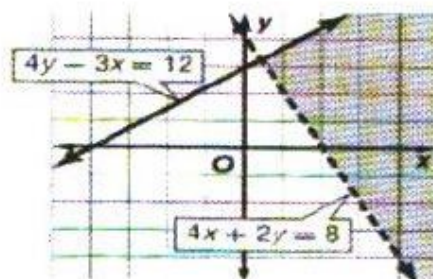
(٣٣) البديل الصحيح (B)

$$4y = a_{32} \quad (٣٤)$$

$$3 = c_{13} \quad (٣٥)$$

$$b_{32} = \text{غير موجودة} \quad (٣٦)$$





(٤٠) عدد سكان مدينة الخير :

$$488259 - x = 115393$$

$$X = 488259 - 115393$$

$$X = 372866$$

عدد سكان مدينة الخير = ٣٧٢٨٦٦ نسمة.

$$-3(2a-5b) - 4(4b+a) \quad (٤٢)$$

$$= -6a + 15b - 16b - 4a$$

$$= -10a - b$$

## ضرب المصفوفات

2-3

### ملاحظة

يمكننا ضرب مصفوفتين إذا وإذا فقط كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية..

**انتبه** عند ضرب مصفوفة  $A$  من الرتبة  $m \times r$  بالمصفوفة  $B$  ذات الرتبة  $r \times t$  فإن الناتج هو المصفوفة  $AB$  ذات الرتبة  $m \times t$

### مثال

هل يمكن إيجاد  $A.B$  في كل مما يأتي وإن كان كذلك فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$(١) A_{4 \times 6}, B_{6 \times 2}$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة  $A$  يساوي عدد صفوف المصفوفة  $B$  فإن مصفوفة حاصل الضرب  $A.B$  معرفة ورتبتها  $4 \times 2$

$$(٢) A_{3 \times 2}, B_{3 \times 2}$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة  $A$  لا يساوي عدد صفوف المصفوفة  $B$  فإن مصفوفة حاصل الضرب  $A.B$  غير معرفة.

ضرب المصفوفات:

التعبير الفطري، العنصر في الصف  $m$  والعمود  $t$  من المصفوفة  $AB$  هو مجموع نواتج ضرب العناصر في

الصف  $m$  من المصفوفة  $A$  بعناصر العمود  $t$  من المصفوفة  $B$  بالترتيب

$$AB = B \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \quad \text{الرموز}$$

**انتبه** خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائما عند ضرب المصفوفات.

## مثال

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$  فهل  $AB=BA$  ؟

• نوجد  $AB$  :

$$= \begin{bmatrix} 4(-3) + (-1)(-4) & 4(6) + (-1)(5) \\ 5(-3) + (-2)(-4) & 5(6) + (-2)(5) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -8 & 19 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}$$

• نوجد  $BA$  :

$$= \begin{bmatrix} -3(4) + (6)(5) & -3(-1) + (6)(-2) \\ -4(4) + (5)(5) & -4(-1) + (5)(-2) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

من السابق نجد أن  $AB \neq BA$

\* خصائص ضرب المصفوفات :

لأي ثلاث مصفوفات  $A, B, C$  ولأي عدد ثابت  $K$  فإن الخصائص التالية صحيحة على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أي منها معرفاً:

(١) خاصية التجميع لضرب المصفوفات  $(AB)C = A(BC)$

(٢) خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد

$$K(AB) = (KA)B = A(KB)$$

(٣) خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات  $C(A+B) = CA + CB$

(٤) خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات  $(A+B)C = AC + BC$

## تمرينات وحلول

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يلي أم لا وإن كانت معرفة فابعد رتبة المصفوفة الناتجة:

(١)  $A_{2 \times 4}, B_{4 \times 3}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة  $A$  يساوي عدد صفوف المصفوفة  $B$  فإن مصفوفة حاصل الضرب  $A.B$  معرفة ورتبتها  $2 \times 3$

(٢)  $C_{5 \times 4}, D_{5 \times 4}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة  $C$  لا يساوي عدد صفوف المصفوفة  $D$  فإن مصفوفة حاصل الضرب  $C.D$  غير معرفة .

أوجد الناتج في كل مما يلي إذا كان ذلك ممكناً :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}^{-٤} \\ = \begin{bmatrix} -14 & 2 \\ -32 & 41 \end{bmatrix}$$

$$[9 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}^{-٦} \\ = [-30 \quad 50]$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}^{-٨}$$

المصفوفة الناتجة غير معرفة لأن عدد أعمدة الأولى لا يساوي عدد صفوف الثانية.



$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \\ = \begin{bmatrix} 26 & 14 & -31 \\ -22 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

٢ (a) مصفوفة عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها :

$$\begin{bmatrix} 35 & 28 \\ 32 & 17 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}$$

مصفوفة رسوم الاشتراك :

$$[110 \quad 165 \quad 439]$$

١٢ (b) لإيجاد المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني نضرب مصفوفتي عدد الأشخاص في مصفوفة رسوم الاشتراك

$$\begin{bmatrix} 35 & 28 \\ 32 & 17 \\ 18 & 12 \end{bmatrix} \cdot [110 \quad 165 \quad 439] = [17032 \quad 11153]$$

المبلغ المطلوب هو  $17032 + 11153 = 28185$  ريالاً



$$X(YZ) = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$(XY)Z = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix}$$

$$X(YZ) = (XY)Z$$

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يلي أم لا وان كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

(١٧)

$$M_{3 \times 1}, N_{2 \times 3}$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة  $M$  لا يساوي عدد صفوف المصفوفة  $N$  فإن مصفوفة حاصل الضرب  $M.N$  غير معرفة .

(١٩)

$$J_{2 \times 1}, K_{2 \times 1}$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة  $J$  لا يساوي عدد صفوف المصفوفة  $K$  فإن مصفوفة حاصل الضرب  $J.K$  غير معرفة .

أوجد الناتج في كل مما يلي إذا كان ذلك ممكناً :

$$[1 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix}^{-21}$$

$$= [26]$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}^{-23}$$

$$= \begin{bmatrix} -75 & 9 \\ -17 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -4 & -10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}^{-25}$$

المصفوفة الناتجة غير معرفة لأن عدد أعمدة الأولى لا يساوي عدد صفوف الثانية.

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-27}$$

$$= \begin{bmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{bmatrix}$$

٢٩ (b) المصفوفة المطلوبة هي ناتج ضرب مصفوفة تقسيمات الابنة في مصفوفة أسعار الغرف :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 220 \\ 250 \\ 360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1880 \\ 1550 \\ 1630 \end{bmatrix}$$

٢٩ (c) المبلغ المطلوب هو  $1630 + 1550 + 1880 = 5060$  ريالاً.

$$PQR = \begin{bmatrix} -22 & 240 \\ 44 & -12 \end{bmatrix} \quad (٣١)$$

$$RQP = \begin{bmatrix} 34 & -40 \\ -220 & -44 \end{bmatrix}$$

$$PQR \neq RQP$$

$$R(P + Q) = \begin{bmatrix} 34 & -6 \\ -64 & -30 \end{bmatrix} \quad (٣٣)$$

$$PR + QR = \begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix}$$

$$R(P + Q) \neq PR + QR$$

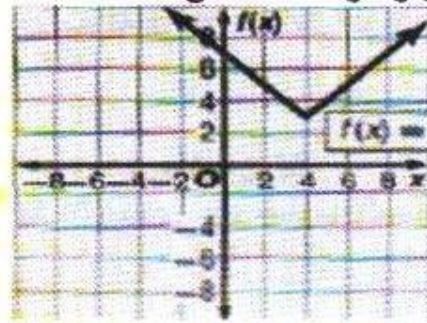
٤٣ (د) رتبة المصفوفة B هي  $6 \times 8$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (٤٥)$$

٤٨ (أ) البديل الصحيح هو (A)

٤٩ (ب) البديل الصحيح هو (C)

٥٣ (د) انسحاب ٤ وحدات لليمين و ٣ وحدات للأعلى.





## اختبار منتصف الفصل الثاني

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي :

١-  $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$  الرتبة  $1 \times 5$

٢-  $\begin{bmatrix} 10 & -6 & 18 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}$  الرتبة  $3 \times 4$

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$  فأوجد :

٣-  $-5 = a_{21}$

٤-  $10 = b_{22}$

٥-  $A = \begin{bmatrix} 25 & 14 & 18 & 5 \\ 44 & 10 & 13 & 8 \\ 32 & 26 & 15 & 4 \\ 18 & 38 & 17 & 2 \end{bmatrix}$  مبيعات الأسبوع الأول  
مصفوفة مبيعات الأسبوع الثاني

(B) مجموع مبيعات الأسبوعين هو :

$\begin{bmatrix} 25 & 14 & 18 & 5 \\ 44 & 10 & 13 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 32 & 26 & 15 & 4 \\ 18 & 38 & 17 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 & 40 & 33 & 9 \\ 62 & 48 & 30 & 10 \end{bmatrix}$

٦-  $-3 \begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -15 & -36 \\ 0 & 3 & -9 \\ -27 & -18 & 15 \end{bmatrix}$

٧-  $2 \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -3x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} x-2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12x \\ 8 \\ 4x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3x-6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -15x+4 \\ 9 \\ 4x-15 \end{bmatrix}$

٨- البديل الصحيح هو (A)  $\begin{bmatrix} 42 & 6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$

٩-  $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 17 & -26 \\ 3 & 29 & -32 \end{bmatrix}$

١٠- الناتج غير معرف  $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

١١-  $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 \\ 18 \end{bmatrix}$

١٣- البديل الصحيح هو  $4 \times 2$  (D)

١٤- (A) المصفوفة A التي تمثل عدد القمصان في المحل قبل مضاعفة العدد :

$= \begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$

(B) العدد هو ٢ وتصبح المصفوفة التي تمثل الأسعار الجديدة :

$$M = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 30 \\ 50 & 70 & 90 \end{bmatrix}$$

$$M-A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix} (C)$$

وتمثل هذه المصفوفة عدد الزيادة في القمصان التي يجب تخزينها.  
١٥ - البديل الصحيح هو (A)  $[-12 \ 8]$

## 2-4 المحددات وقاعدة كرامر

تذكر عزيزي الطالب/ تعلمت سابقا أن المصفوفة المربعة هي التي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدها.

قيمة محددة الدرجة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

ملفوف

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$
 بالرموز:

انتبه كل مصفوفة مربعة لها محددة.

مثال

جد قيمة المحددة فيما يأتي :

$$\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -48 + 70 = 22$$

انتبه نعني بمحددات الدرجة الثالثة محدثات المصفوفات التي من النوع  $3 \times 3$  ويمكننا حساب محدثات هذا النوع من المصفوفات عن طريق قاعدة الأقطار.

(١) نعيد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحددة

(٢) نوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات ثم نجمع.

(٣) نوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات ثم نجمع.

(٤) قيمة المحددة = ناتج الخطوة ٣ - ناتج الخطوة ٢.

قاعدة  
الأقطار

مثال

$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

بإستعمال قاعدة الأقطار

جد قيمة



بإتباع خطوات قاعدة الأقطار:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{ccc|cc} -5 & 9 & 4 & -5 & 9 \\ -2 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ -4 & 6 & 2 & -4 & 6 \\ -5 & 9 & 4 & -5 & 9 \\ -2 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ -4 & 6 & 2 & -4 & 6 \end{array} & (1) \\ 10 - 180 - 48 = -218 \\ \begin{array}{ccc|cc} -5 & 9 & 4 & -5 & 9 \\ -2 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ -4 & 6 & 2 & -4 & 6 \end{array} & (2) \\ 16 - 150 - 36 = -170 \\ -218 - (-170) = -48 & (4) \end{array}$$

### مفهوم

مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه  $(a,b)$  ,  $(c,d)$  ,  $(e,f)$  هي  $|A|$  حيث :

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

### مثال

يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنوها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي  $(3,15)$ ,  $(6,4)$ ,  $(11,9)$  بحيث تمثل كل وحدة على الخريطة  $0.5\text{km}$  فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.5 & 7.5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5.5 & 4.5 & 1 \end{vmatrix}$$

بتطبيق قاعدة الأقطار :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{ccc|cc} 1.5 & 7.5 & 1 & 1.5 & 7.5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5.5 & 4.5 & 1 & 5.5 & 4.5 \end{array} & (1) \\ 3 + 41.25 + 13.5 = 57.75 \end{array}$$

$$11 + 6.75 + 22.5 = 40.25$$

$$57.75 - 40.25 = 17.5$$

$$A = 0.5(17.5) = 8.75 \text{ km}^2$$

**مصفوفة المعاملات** هي المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام.

إذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لانتساوي صفرا.  
فان للنظام حلا وحيدا وإذا كانت قيمة المحددة صفرا فاما  
ان يكون للنظام عدد لانتهائي من الحلول او لاهل له .

لاحظ  
جدا

## مفهوم قاعدة كرامر

هي طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية بحيث :

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ fx + gy &= n \end{aligned} \quad \text{حيث :}$$

$$C = \begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$$

فإن حل النظام هو :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}, \quad x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|}$$

بحيث تكون  $C \neq 0$

## مثال

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر :

$$7x + 3y = 37$$

$$-5x - 7y = -41$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 37 & 3 \\ -41 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-259 - (-123)}{-49 - (15)} = \frac{-136}{-34} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 37 \\ -5 & -41 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-287 - (-185)}{-49 - (15)} = \frac{-102}{-34} = 3$$

حل النظام هو  $(4, 3)$ .

## استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

هي طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية بحيث :

$$ax + by + cz = m$$

$$fx + gy + hz = n \quad \text{حيث :}$$

$$jx + ky + lz = p$$

$$C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

فإن حل النظام هو :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & l \end{vmatrix}}{|C|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & l \end{vmatrix}}{|C|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

بحيث تكون  $|C| \neq 0$

## مثال

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر :

$$6x + 5y + 2z = -1$$

$$-x + 3y + 7z = 12$$

$$5x - 7y - 3z = -52$$



$$X = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 12 & 3 & 7 \\ -52 & -7 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & -7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-1536}{384} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -1 & 12 & 7 \\ 5 & -52 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & -7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1920}{384} = 5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 12 \\ 5 & -7 & -52 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & -7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-384}{384} = -1$$

حل النظام هو  $(-4, 5, -1)$



جد قيمة كل محدد مما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 30 = 26 \quad ١$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 108 = -128 \quad ٢$$

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (٥)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 30 - 8 = -14$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 15 + 32 = 5$$

$$-14 - 5 = -19$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (7)$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -288 - 20 + 6 = -302$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 24 - 48 = -54$$

$$-302 + 54 = -248$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

$$4x - 5y = 39 \quad (1)$$

$$3x - 8y = -6$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 39 & -5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{312 - (30)}{32 - (-15)} = \frac{282}{47} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 39 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-24 - (117)}{32 - (-15)} = \frac{-141}{47} = -3$$

حل النظام هو  $(6, -3)$ .

$$4x - 2y + 7z = 26 \quad (1)$$

$$5x + 3y - 5z = -50$$

$$-7x - 8y - 3z = 49$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 26 & -2 & 7 \\ -50 & 3 & -5 \\ 49 & -8 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & -5 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1287}{-429} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 26 & 7 \\ 5 & -50 & -5 \\ -7 & 49 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & -5 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2145}{-429} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 26 \\ 5 & 3 & -50 \\ -7 & -8 & 49 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & -5 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3872}{-429} = 4$$

حل النظام هو  $(-3, -5, 4)$ .

$$6x - 5y + 2z = -49 \quad (1)$$

$$-5x - 3y - 8z = -22$$

$$-3x + 8y - 5z = 55$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -49 & -5 & 2 \\ -22 & -3 & -8 \\ 55 & 8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & -8 \\ -3 & 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-1143}{381} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -49 & 2 \\ -5 & -22 & -8 \\ -3 & 55 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & -8 \\ -3 & 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{2667}{381} = 7$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -49 \\ -5 & -3 & -22 \\ -3 & 8 & 55 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & -8 \\ -3 & 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{762}{381} = 2$$

حل النظام هو  $(-3, 7, 2)$ .



جد قيمة كل محدد مما يأتي:

(١٨)

$$\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -42 - 60 = -102$$

(٢٠)

$$\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 35 + 48 = 83$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \quad (٢٢)$$

باستعمال طريقة الأقطار :

$$-64 + 0 + 90 = 26 \quad (١)$$

$$-48 - 50 - 0 = -98 \quad (٢)$$

$$26 + 98 = 124 \quad (٣)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -7 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \quad (٢٤)$$

باستعمال طريقة الأقطار :

$$168 - 0 + 0 = 168 \quad (١)$$

$$105 - 0 + 0 = 105 \quad (٢)$$

$$168 - 105 = 63 \quad (٣)$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 0 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} \quad (٢٥)$$

باستعمال طريقة الأقطار :

$$0 + 0 + 0 = 0 \quad (١)$$

$$0 + 0 + 0 = 0 \quad (٢)$$

$$0 - 0 = 0 \quad (٣)$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

$$6x - 5y = 73 \quad (٢٨)$$

$$-7x + 3y = -71$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 73 & -5 \\ -71 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{219 - 355}{18 - 35} = \frac{-136}{-17} = 8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 73 \\ -7 & -71 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-426 + 511}{18 - 35} = \frac{85}{-17} = -5$$

حل النظام هو (8, -5).

$$-4c - 5d = -39 \quad (٣٠)$$

$$5c - 8d = 54$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} -39 & -5 \\ 54 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-312 + 270}{-32 + 25} = \frac{-42}{-7} = 6$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -39 \\ 5 & 54 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-216 + 195}{-32 + 25} = \frac{-21}{-7} = 3$$

حل النظام هو (6,3).

$$\begin{aligned} 5x-4y+6z &= 58 \quad (32) \\ -4x+6y+3z &= -13 \\ 6x+3y+7z &= 53 \end{aligned}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 58 & -4 & 6 \\ -13 & 6 & 3 \\ 53 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-1228}{-307} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 58 \\ -4 & 6 & -13 \\ 6 & 3 & 53 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-1535}{-307} = 5$$

حل النظام هو (4,-2,5)

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad (34)$$

باستخدام قاعدة الأقطار نجد أن محدد المصفوفة =

$$A = \frac{1}{2} (4) = 2 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} 6a-7b &= -55 \quad (35) \\ 2a+4b-3c &= 35 \\ -5a-3b+7c &= -37 \end{aligned}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -55 & 0 \\ 2 & 35 & -3 \\ -5 & -37 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{749}{107} = 7$$

حل النظام هو (-1,7,-3)

$$\begin{aligned} 4x-5y &= -2 \quad (37) \\ 7x+3z &= -47 \\ 8y-5z &= -63 \end{aligned}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -5 & 0 \\ -47 & 0 & 3 \\ -63 & 8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{2168}{-271} = -8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & -47 & 3 \\ 0 & -63 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{1626}{-271} = -6$$

حل النظام هو (-8,-6,3)



(٣٩)  $a$  نفرض أن عدد العلب الصغيرة  $x$

نفرض أن عدد العلب المتوسطة  $y$

نفرض أن عدد العلب الكبيرة  $z$

نظام المعادلات الذي يمثل الموقف :

$$1.15x + 1.75y + 2.25z = 2238.75$$

$$X + y + z = 1385$$

$$3y - z = 1385$$

باستعمال قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم :

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 2238.75 & 1.75 & 2.25 \\ 1385 & 1 & 1 \\ 1385 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.15 & 1.75 & 2.25 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1755}{2.7} = 650$$

عدد العلب الصغيرة ٦٥٠ علبة.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1.15 & 1.75 & 2238.75 \\ 1 & 1 & 1385 \\ 0 & 3 & 1385 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.15 & 1.75 & 2.25 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1107}{2.7} = 410$$

عدد العلب الكبيرة ٤١٠ علبة.

(b) في اليوم التالي :

$$X = 650 - 140 = 510$$

$$Y = 325 + 125 = 450$$

$$Z = 410 + 35 = 455$$

تكلفة الإنتاج :

$$1.25(510) + 1.75(450) + 2.25(455)$$

$$= ٢٤٢٦,٢٥ \text{ ريالاً}$$

(٤١) هناك عدد لانتهائي من الحلول أو لا يوجد حل.

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} (c) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} (b) \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} (a) (٤٣)$$

(٤٥) المساحة الجانبية للمخروط :  $\pi r l$

$$L = \sqrt{52}$$

$$= \pi \times 4 \times \sqrt{52} : \text{المساحة الجانبية}$$

$$= 28.84 \pi \text{ in}^2$$

(٤٦) البديل الصحيح (B) ١٤ وحدة مربعة.

(٤٧) معرفة من الرتبة  $4 \times 6$

(٤٨) غير معرفة لان أعمدة المصفوفة الأولى لا يساوي صفوف الثانية.

(٥٠)

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -26 & -5 \\ -34 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-248}{31} = -8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -26 \\ 5 & -34 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{62}{31} = 2$$

حل النظام  $(-8, 2)$

## النظير الضربي للمصفوفة والنظمة المعادلات الخطية

2-5

ان عددين من الاعداد الحقيقية يكون كلا منهما نظيرا ضربيا  
للاخر اذا كان حاصل ضربيهما هو العنصر المحايد لعملية  
الضرب

**تذكر**

هي مصفوفة مربعة بحيث اذا ضربت في اي مصفوفة  
اخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الاخرى.

**مصفوفة  
الوحدة**

### المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب  $I$  هي مصفوفة الوحدة وهي مصفوفة مربعة جميع  
عناصر قطرها الرئيسي 1 (من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين) وباقي العناصر أصغر

لأي مصفوفة مربعة  $A$  لها رتبة مصفوفة الوحدة  $I$  نفسها.

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

الرموز: إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  فإن  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  بحيث إن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذا كانت  $A$  و  $B$  مربعيتين ولهما الرتبة نفسها وكان  
 $AB = BA = I$  فإن المصفوفة  $B$  تسمى نظيرا ضربيا للمصفوفة  $A$  وكذلك تسمى  
المصفوفة  $A$  نظيرا ضربيا للمصفوفة  $B$  وإذا كان للمصفوفة  $A$  نظير ضربى فإنه يرمز إليه  
بالرمز  $A^{-1}$  حيث :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

### النظير الضربي لمصفوفة:

هناك مصفوفات ليس لها نظير ضربى ونستطيع تحديد إذا كان لمصفوفة ما نظير ضربى أم لا  
باستعمال المحددات وذلك عن طريق الآتي :

النظير الضربي للمصفوفة  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{حيث } da-bc \neq 0$$



**لاحظ** أن  $ad - bc$  هي قيمة محددة  $A$  لذا فإذا كانت قيمة محددة مصفوفة ما تساوي صفراً فليس للمصفوفة نظير ضربي.

**لاحظ** يمكن استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من معادلات وحله إذا كان لمصفوفة المعاملات نظير ضربي.

**تنبيه** إذا لم يكن لمصفوفة المعاملات نظير ضربي فإن النظام ليس له حل أو له عدد لا نهائي من الحلول.

### مثال

أنفقت عائشة في معرض للكتب ١١٢,٥ ريالاً لشراء ثلاث كتب علمية و ٤ كتب ثقافية على حين أنفقت فاطمة ١٥٧,٥ ريالاً لشراء ٣ كتب علمية و ١٠ كتب ثقافية فإذا كانت الكتب العلمية تباع بالسعر نفسه  $x$  والكتب الثقافية تباع بالسعر نفسه  $y$  فما سعر الكتاب العلمي ؟  
نظام المعادلات هو :

$$3x + 4y = 112.5$$

$$3x + 10y = 157.5$$

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112.5 \\ 157.5 \end{bmatrix}$$

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 112.5 \\ 157.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 & -0.22 \\ -0.16 & 0.16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 112.5 \\ 157.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27.3 \\ 7.2 \end{bmatrix}$$

= ٢٧,٣ ريالاً.  $x$  سعر الكتاب العلمي

## تكريرات وحلول

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرا ضربيا للأخرى فيما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \neq I$$

لا تمثل أي من المصفوفتين نظير ضربى للأخرى.

جد النظير الضربى للمصفوفة التالية إن وجد :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (٣)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$$

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

$$-2X + Y = 9 \quad (٥)$$

$$X + Y = 3$$

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

نوجد النظير الضربى لمصفوفة المعاملات :

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربى لمصفوفة المعاملات :

$$\frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرا ضربيا للأخرى فيما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \neq I$$

لا تمثل أي من المصفوفتين نظير ضربى للأخرى.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \quad (١٤)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{-7} \\ \frac{6}{-7} & \frac{1}{-7} \end{bmatrix}$$

$$4X + 2Y = 6 \quad (٢١)$$

$$6X - 3Y = 9$$

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$= \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$= \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$-X + 4Y = -2 \quad (٢٢)$$

$$-X + 3Y = 6$$

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -8 \end{bmatrix}$$

(٢٥) نسبة المهاجرين نسبة الباقيين

$$\begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.97 & 0.03 \end{bmatrix}$$

(٢٦) هاجر جوابها صحيح .

(٣١) البديل الصحيح (C) ٢٤

$$\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -27 - 35 = -62 \quad (33)$$

$$(٣٤) \begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -4 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

باستخدام طريقة الأقطار:

$$1. \quad 360 - 18 - 8 = 334$$

$$2. \quad 15 - 16 - 216 = -217$$

$$3. \quad 344 + 217 = 551$$

(٣٦) دالة تربيعية.

(٣٧) دالة قيمة مطلقة.

(٣٨) دالة ثابتة.

## اختبار الفصل الثاني

حدد العناصر التالية للمصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = a_{31} \quad (٢)$$

$$\lambda = a_{22} \quad (١)$$

جد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً :

$$-3 \begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (٣)$$

$$= \begin{bmatrix} -12a \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12a - 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (٥)$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ -19 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (٦)$$

لا يمكن إجراء عملية الطرح لأن رتب المصفوفتين مختلفة.

(٧) مصفوفة عدد الكتب المباعة :  $[20 \quad 32 \quad 14]$

مصفوفة التكلفة لكل كتاب :  $\begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 130 \end{bmatrix}$

مصفوفة تكلفة الكتب الكلية :

$$[20 \quad 32 \quad 14] \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 130 \end{bmatrix} = [6700]$$

تكلفة الكتب الكلية = ٦٧٠٠ ريالاً.

(b) مصفوفة المبلغ الكلي الذي تحصل عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من الكتب :

$$[20 \quad 32 \quad 14] \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 110 \\ 150 \end{bmatrix} = [8020]$$

المبلغ الذي تحصل عليه المكتبة = 8020 ريالاً.

$$(c) \quad [8020] - [6700] = [1320] \text{ ربح المكتبة} = ١٣٢٠ \text{ ريالاً.}$$



٩) استعمال المحددات لإيجاد مساحة المثلث XYZ الذي رؤوسه  $x(1,2), y(3,6), z(-1,4)$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

باستعمال قاعدة الأقطار :

$$6 - 2 + 12 = 16 \quad \bullet$$

$$-6 + 4 + 6 = 4 \quad \bullet$$

$$16 - 4 = 12 \quad \bullet$$

$$A = \frac{1}{2} (12) = 6 \quad \bullet$$

• مساحة المثلث = 6 وحدات مربعة.

١٠) البديل الصحيح هو (A) - ٤٤

جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (١١)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (١٢)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (١٣)$$

محدد المصفوفة  $24 - 24 = 0$

لا يوجد للمصفوفة نظير ضربي.

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يلي :

$$2X - Y = -9 \quad (١٥)$$

$$X + 2Y = 8$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-18+8}{4+1} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{25}{5} = 5$$

حل النظام هو  $(-2, 5)$ .

$$x - y + 2z = 0 \quad (١٦)$$

$$3x + z = 11$$

$$-x - 2y = 0$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 11 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{44}{11} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 11 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{22}{11} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 11 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-11}{11} = -1$$

حل النظام هو  $(4, 2, -1)$

### اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

١ - الحل: (B)  $H - L$

٢ - الحل: (B)  $[-1]$

٣ - الحل: (C)  $f(x) = |3x| + 1$

٤ - الحل: (D)  $61.5$  وحدة مربعة.

٥ - الحل: (A)  $4x + 2y \geq 8$ ,  $3x + 4y \leq 12$ ,  $2x - 6y < 12$

٦ - الحل: (A)  $4 \times 2$

٧ - الحل: (B)  $f(x) = |-x + 1|$

٨ - الحل: محدد المصفوفة  $-18 + 18 = 0$  لا يوجد للمصفوفة نظير ضربي.

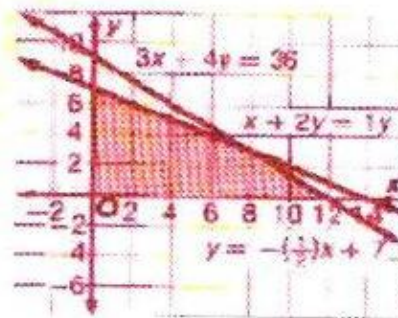
٩ - الحل: (A)  $d + q = 14$

$D + 0.5q = 10.5$

١٠ - الحل: (b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 0.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2.75 \end{bmatrix}$$

١١ - الحل:





(١) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

| $(x,y)$   | $F(x,y)$ |
|-----------|----------|
| $(0, 0)$  | 0        |
| $(0, 7)$  | 84       |
| $(12, 0)$ | 96       |
| $(8, 3)$  | 100      |

(٢) من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي 100 عند النقطة  $(8,3)$ .

١٣ -الحل:

يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية فمثلا لو كانت المصفوفة  $A$  من الرتبة  $2 \times 4$  والمصفوفة  $B$  من الرتبة  $4 \times 3$  فإن المصفوفة  $AB$  هي مصفوفة معرفة من الرتبة  $2 \times 3$





## الفصل الثالث

### كثيرات الحدود

#### ودوالها

- ❖ الأعداد المركبة
- ❖ القانون العام والمميز
- ❖ العمليات على كثيرات الحدود
- ❖ قسمة كثيرات الحدود
- ❖ دوال كثيرات الحدود
- ❖ حل معادلات كثيرات الحدود
- ❖ نظريتا الباقي والعوامل
- ❖ الجذور والأصفار
- ❖ نظرية الصفر النسبي





## التهينة للفصل الثالث

### حلّول اختبار سريع

أعد كتابة الطرح على صورة جمع:

$$-5 - 13 = -5 + (-13)$$

$$5mr - 7mp$$

$$5m + (-7)mp$$

٥- حضر ٢٠ شخصا محاضرة ثم غادروا القاعة في مجموعة ثانية فغادرت منهم  $x$  مجموعة . اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع

$$\text{الحل: } 20 + (-2x)$$

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس :

$$-4(a + 5) \quad (٦)$$

$$= -4a - 20$$

$$-1(3b^2 + 2b - 1) \quad (7)$$

$$= -3b^2 - 2b + 1$$

$$15(8 + 18) \quad (١٠)$$

$$= 15(8) + 15(18)$$

$$= 390$$

دفع المعلم ٣٩٠ ريالاً.

حل كل معادلة فيما يأتي :

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (١١)$$

بحل المعادلة بطريقة إكمال المربع :

$$X = -4, x = 2$$

$$x^2 - x - 20 = 0 \quad (١٣)$$

بحل المعادلة بطريقة إكمال المربع :

$$X = -4, x = 5$$

### 3-1 الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية:

الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 أي  $i = \sqrt{-1}$

الأعداد التخيلية البحتة

هي جنور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة لأي عدد حقيقي موجب مثل  $b$  فإن :

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$$

مثال

بسط ما يلي :

$$\begin{aligned} \sqrt{-18} &= \sqrt{-1 \cdot 9 \cdot 2} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{2} \\ &= 3i\sqrt{2} \end{aligned}$$

ملاحظة: اعداد التخيلية البحتة تحقق خاصيتي التجميع والإبدال على عملية الضرب.

جدول يوضح بعض قوى  $i$

|           |            |            |           |
|-----------|------------|------------|-----------|
| $i^1 = i$ | $i^2 = -1$ | $i^3 = -i$ | $i^4 = 1$ |
| $i^5 = i$ | $i^6 = -1$ | $i^7 = -i$ | $i^8 = 1$ |

مثال

بسط ما يلي :

$$\begin{aligned} 3i \cdot 4i &= 12i^2 \\ &= 12(-1) \\ &= -12 \end{aligned}$$

$$i^{31} \cdot i = (-1)^5 \cdot i = -i$$

هو عدد مكون من جزأين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي ويمكن كتابته على الصورة :  $a + bi$  حيث  $a, b$  عدنان حقيقيان ،  $i$  عدد تخيلي.

العدد  
المركب

ملاحظات هامة

- $b = 0 \rightarrow$  العدد المركب عدد حقيقي.
- $b \neq 0 \rightarrow$  العدد المركب عدد تخيلي.
- $a = 0 \rightarrow$  العدد المركب عدد تخيلي بحت.

متى يتساوى عدنان مركبان؟

إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين والجزأين التخيليين. أي :

$$a + bi = c + di \text{ عندما } a = c, b = d$$



## مثال

أوجد قيمتي  $x, y$  اللتين تجعلان المعادلة :

$$5x + 1 + (3 - 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i \quad \text{صحيحة}$$

$$5x + 1 = 2x - 2 \quad \text{الجزء الحقيقي :}$$

$$5x - 2x = -2 - 1$$

$$3x = -3$$

$$X = -1$$

الجزء التخيلي :

$$(3 + 2y)i = (y - 6)i$$

$$3 + 2y = y - 6$$

$$2y - y = -6 - 3$$

$$Y = -9$$

**ملاحظة** عند جمع الأعداد المركبة وطرحها فإننا نجمع الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء التخيلية معا.

## مثال

$$(-2 + 5i) + (1 - 7i) \quad \text{بسط ما يلي :}$$

$$(-2 + 1) + (5i - 7i)$$

$$= -1 - 2i$$

ملاحظة هامة :

نستعمل في مسائل الكهرباء الرمز  $j$  للدلالة على الوحدة التخيلية بدلا من الرمز  $i$  الذي يمثل شدة التيار.

## مثال

أوجد فرق الجهد لتيار متردد شدته  $2 - 4j$  أمبير و معاوقته  $3 - 2j$  أوم ؟

$$V = C \cdot I$$

$$V = (2 - 4j) \cdot (3 - 2j)$$

$$6 - 4j - 12j + 8j^2$$

$$= 6 - 16j - 8$$

$$= -2 - 16j \quad \text{فولت}$$

يسمى العددين  $a + bi$  ،  $a - bi$  عددين مترافقين مركبان ناتج ضربهما عدد حقيقي دائما

العددين المترافقين

## مثال

$$\frac{-2i}{3 + 5i} \quad \text{بسط ما يلي :}$$

$$\frac{-2i}{3 + 5i} \cdot \frac{3 - 5i}{3 - 5i}$$

$$= \frac{-6i + 10i^2}{9 - 25i^2}$$

$$= \frac{9 + 25}{-6i - 10}$$

$$= \frac{34}{-10 - 6i}$$

$$= \frac{-10}{34} - \frac{6}{34}i$$

$$= \frac{-5}{17} - \frac{3}{17}i$$

بسط ما يلي :  
(١)  $\sqrt{-81}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{-1 \times 81} \\ &= \sqrt{-1} \cdot 9 \\ &= 9i \end{aligned}$$

(٥)  $(i^{40})$

$$\begin{aligned} &= i^{75} + i^5 \\ &= (-i^5) \cdot i^5 \\ &= -i \cdot i \end{aligned}$$

$$= 1$$

(٧) حل كل معادلة مما يأتي:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 32 &= 0 \\ 4x^2 &= -32 \end{aligned}$$

$$x = \pm \sqrt{-8}$$

$$x = \pm 2i\sqrt{2}$$

بسط ما يلي :  
(١١)

$$\begin{aligned} &(-1+5i)+(-2-3i) \\ &= -3+2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(6-8i)(9+2i) \\ &= 54+12i-72i-16i^2 \\ &= 70-60i \end{aligned}$$

(١٣)

$$\begin{aligned} &\frac{3-i}{4+2i} \quad (١٥) \\ &= \frac{3-i}{4+2i} \times \frac{4-2i}{4-2i} \\ &= \frac{12-6i-4i-2}{16+4} \\ &= \frac{10-10i}{20} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &5-3j + (7+9j) \quad (١٧) \\ &= 12+6j \end{aligned}$$

(١٨)  $\sqrt{-121}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{-1 \times 121} \\ &= \sqrt{-1} \cdot 11 \\ &= 11i \end{aligned}$$



$$\sqrt{-100} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{-1 \times 100} \\ &= \sqrt{-1} \cdot 10 \\ &= 10i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3i)(-7i)(2i) \quad (27) \\ &= 42i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -42i \\ &(i^{11}) \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i^{2^5} + i \\ &= (-1^5) \cdot i \\ &= -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3+i) + (-4-i) \quad (29) \\ &= -7 + 0 = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1+2i)(1-2i) \quad (30) \\ &= 1 - 2i + 2i - 4i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(4-i)(6-6i) \quad (30) \\ &= 24 - 24i - 6i + 6i^2 \\ &= 24 - 30i - 6 \\ &= 18 - 30i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{2+4i} \times \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{10-20i}{4-16i^2} = \frac{10-20i}{20} = \frac{1}{2} - i \quad (31) \end{aligned}$$

$$2x^2 + 10 = 0 \quad (32)$$

$$2x^2 = -10$$

$$x^2 = -5$$

$$X = \pm \sqrt{-5}$$

$$X = \pm i\sqrt{5}x$$

$$x + 1 + 2yi = 3 - 6i \quad (33)$$

$$X + 1 = 3$$

$$X = 3 - 1 = 2$$

$$2y = -6$$

$$Y = -3$$

$$5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i \quad (34)$$

$$5 + y = 9$$

$$Y = 5$$

$$3x - 7 = -3$$

$$X = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{-10} \times \sqrt{-24} \quad (35)$$

$$= \sqrt{-240}$$

$$= \sqrt{-16 \times 15}$$

$$= -4\sqrt{15}$$

$$(44i^{41} = i^{58} \times i$$

$$= 1^5 \times i = i$$

$$(1-i)(2+3i)(4-3i)(48$$

$$2+3i+2i+3i^2(4-3i)$$

$$= 2 + 5i - 3(4 - 3i)$$

$$= (-1 + 5i)(4 - 3i)$$

$$= -4 + 23i + 15$$

$$= 11 + 23i$$

$$3x^2 + (2 + 6i)x - 8i + ix^2 - (4 + 5i)x + 7 \quad (54$$

$$= (3-i)x^2 + (-2+i) - 8i + 7$$

(C



(A (56



(57 صفاء جوابها صحيح لأن :

$$(2i)(3i)(4i) = -24i$$

(59 الإجابة صحيحة دائما لأن أي عدد مثل ٧ يمكن تمثيله بالعدد المركب  $7+0i$

(62 البديل الصحيح (A)  $X=6, Y=7$

(63 البديل الصحيح (B)  $9^2$

(64 بطريقة إكمال المربع نجد أن  $X = -5, \frac{3}{2}$

$$X+Y=-3 \quad (65$$

$$XY=-40$$

$$Y=-3-X$$

بالتعويض :

$$X(-3-X)=-40$$

$$-3X + X^2 = -40$$

بطريق إكمال المربع :

$$X = -8, 5$$

(69 نعم

(71 لا



القانون العام لحل المعادلات التربيعية :

يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة :

باستعمال القانون :

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**مثال**

حل المعادلة  $x^2 + 6x - 16 = 0$  باستعمال القانون العام

$$a=1, b=6, c=-16$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - (4 \times 1 \times -16)}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm 10}{2} \end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ or } x = -8$$

**ملاحظة:**

يكون للمعادلة جذر نسبي واحد عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام يساوي صفر.

**مثال**

حل المعادلة  $x^2 - 16x + 64 = 0$  باستعمال القانون العام

$$a=1, b=-16, c=64$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{+16 \pm \sqrt{256 - (4 \times 1 \times 64)}}{2} \\ &= \frac{16 \pm \sqrt{0}}{2} \\ &= \frac{16 \pm 0}{2} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

**لاحظ:** يمكنك عزيزي الطالب التعبير عن الجذور التربيعية الغير نسبية بكتابتها على الصورة الجذرية.

**ملاحظة:** إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عدد سالب فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

تذكر جيدا: الصورة القياسية للعدد المركب هي  $a + bi$

## مثال

حل المعادلة  $x^2 - 4x = -13$  باستعمال القانون العام

$$a=1, b=-4, c=13$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - (4 \times 1 \times 13)}}{2} \\ = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ = \frac{4 \pm 6i}{2} \\ x = 2 \pm 3i$$

تسمى العبارة تحت الجذر  $b^2 - 4ac$  بالميز وتستخدم لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية ونوعها وللتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون العام.

## مفهوم المميز

## مثال

أوجد قيمة المميز للمعادلة التالية وحدد عدد الجذور ونوعها

$$-5x^2 + 8x - 1 = 0$$

$$a=-5, b=8, c=-1$$

$$b^2 - 4ac = 64 - (4 \times -5 \times -1)$$

$$= 64 - 22$$

$$= 44 > 0$$

← المميز موجب والعبارة ليست مربع كامل

← يوجد جذران حقيقيان غير نسبيين.

## طرق حل المعادلات التربيعية

| الحالات استعمالها                                                                                                   | استراتيجية استعمالها | المقررات             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|
| عندما لا يتطلب إيجاد الحل الدقيق، وتفضل استعمال لها عدد المحقق من معقولة المعطيات التي يتم إيجادها بالطرق التجريبية | أحرفاً               | التحليل الجبري       |
| عندما يساوي الحد الثالث صفراً، أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل                                                 | أحرفاً               | «فتحيل البراءة»      |
| مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتاً                                                               | أحرفاً               | خاصية الجذر التربيعي |
| مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$ حيث $b$ عدد زوجي                                               | عالمياً              | إكمال المربع         |
| عندما لا يمكن استعمال طريقة «الفتحيل» أو عندما يكون من الصعب استعمالها                                              | عالمياً              | القانون العام        |



حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام :

$$x^2 + 12x - 9 = 0 \quad -1$$

$$a=1, b=12, c=-9$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - (4 \times 1 \times -9)}}{2}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{108}}{2}$$

$$x = -6 \pm 3\sqrt{3}$$

$$10x^2 - 13x - 3 = 0 \quad -2$$

$$a=10, b=-13, c=-3$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - (4 \times 10 \times -3)}}{20}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{49}}{20}$$

$$= \frac{13 \pm 7}{20}$$

$$x = 1 \text{ or } x = 0.3$$

9- بحل المعادلة التربيعية لإيجاد الزمن عند  $h=0$

$$-16t^2 - 64t + 60 = 0$$

$$t = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - (4 \times -16 \times 60)}}{-32}$$

$$= \frac{64 \pm 89}{-32}$$

$$t = -4.78 \text{ or } t = 0.78$$

نأخذ الإجابة الموجبة لان الزمن لا يكون سالب  $t = 0.78$

أجب عن الفرعين  $a, b$  لكل معادلة تربيعية فيما يأتي :

(a) أوجد قيمة المميز (b) أوجد عدد الجذور وحدد أنواعها

$$2x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (11)$$

$$a=2, b=-6, c=9$$

$$b^2 - 4ac = 36 - (4 \times 2 \times 9)$$

$$= -36$$

← المميز سالب

← يوجد جذران مركبان.

$$5x^2 + 2x + 4 = 0 \quad (13)$$

$$a=5, b=2, c=4$$

$$b^2 - 4ac = 4 - (4 \times 5 \times 4)$$

$$= -76$$

← المميز سالب

← يوجد جذران مركبان.

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام :

$$x^2 + 45x + 200 = 0 \quad -١٤$$

$$a=1, b=45, c=200$$

$$x = \frac{-45 \pm \sqrt{2025 - (4 \times 1 \times 200)}}{2}$$

$$= \frac{-45 \pm \sqrt{1225}}{2}$$

$$= \frac{-45 \pm 35}{2}$$

$$x = -5 \text{ or } x = -40$$

$$5x^2 - 11x - 9 = 0 \quad -١٨$$

$$a=5, b=-11, c=-9$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - (4 \times 5 \times -9)}}{10}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{301}}{10}$$

= ١,٧٦ ثانية (نستبعد الإجابة السالبة)

أجب عن الفرعين  $a, b$  لكل معادلة تربيعية فيما يأتي :

(a) أوجد قيمة المميز

(b) أوجد عدد الجذور وحدد أنواعها

$$3x^2 - 3x + 8 = 0 \quad (25)$$

$$a=3, b=-3, c=8$$

$$b^2 - 4ac = 9 - (4 \times 3 \times 8)$$

$$= -87$$

← المميز سالب

← يوجد جذران مركبان

$$\frac{3 \pm i\sqrt{87}}{6} : \text{الحل} \leftarrow$$

$$-3x^2 - 7x - 4 = 0 \quad (29)$$

$$a=3, b=-7, c=-4$$

$$b^2 - 4ac = 49 - (4 \times -3 \times -4)$$

$$= 1$$

← المميز موجب ← يوجد جذران حقيقيان نسبيا. ← الحل :  $x = 1, -\frac{4}{3}$

$$-6x^2 + 4x - 3 = 0 \quad (32)$$

$$a=-6, b=4, c=-3$$

$$b^2 - 4ac = 16 - (4 \times -6 \times -3)$$

$$= 16 - 72$$

$$= -56$$

$$\frac{2 \pm i\sqrt{14}}{6} : \text{الحل} \leftarrow$$

← يوجد جذران مركبا

← المميز سالب



$$-4x^2 + 6x + 20 = 0 \quad (38)$$

$$a=-4, b=6, c=20$$

$$b^2 - 4ac = 36 - (4 \times -4 \times 20) \\ = 36 + 320$$

$$= 356$$

← المميز موجب

← يوجد جذران غير نسبيين.

$$\leftarrow \text{الحل: } \frac{3 \pm \sqrt{89}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (40)$$

بالتعويض عن  $S$  بـ (٦٦٦):

$$666 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

بضرب المعادلة في (٢):

$$1332 = n(n+1)$$

$$1332 = n^2 + n$$

$$n^2 + n - 1332 = 0$$

$$N = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (4 \times 1 \times -1332)}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5329}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm 73}{2}$$

$$N = 36$$

تم استبعاد الإجابة السالبة لأن عدد الأرقام لا يمكن أن يكون بالسالب.

(٤١) إجابة هدى صحيحة وإجابة لولوه خاطئة لأن لولوه عوضت عن قيمة  $c$  بالعدد ٧ بينما

هي -٧.

(٤٢)  $a$  صحيحة دائماً.

$b$  صحيحة أحياناً.

(٤٥) البديل الصحيح (B) ٢٠ ريالاً.

(٤٦) البديل الصحيح (D) ١١٠.

## العمليات على كثيرات الحدود

3-3

تذكر:

نعني بعملية تبسيط عبارات تتضمن قوى إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

انتبه

الأسس السالبة هي طريقة للتعبير عن النظير الضربي لعدد ما.

### خصائص الأسس

| ملخص المفهوم    | خصائص الأسس                                                                                                                                                               | أمثلة                                                                                               |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ضرب القوى       | $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$                                                                                                                                                 | $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$<br>$p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$                               |
| قسمة القوى      | $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ حيث $x \neq 0$                                                                                                                                | $\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$<br>$\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$                              |
| الأسس السالبة   | $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ حيث $x \neq 0$                                                                                                                                   | $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$<br>$\frac{1}{b^{-7}} = b^7$                                                |
| قوة القوة       | $(x^a)^b = x^{ab}$                                                                                                                                                        | $(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$<br>$(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$                                  |
| قوة ناتج الضرب  | $(xy)^a = x^a y^a$                                                                                                                                                        | $(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$<br>$(ab)^3 = a^3 b^3$                                                    |
| قوة ناتج القسمة | $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ ، $y \neq 0$ ،<br>$\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}$ ، $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ | $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$<br>$\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$ |
| القوة الصفرية   | $x^0 = 1$ ، $x \neq 0$                                                                                                                                                    | $7^0 = 1$                                                                                           |

**وحدة الحد:** هي عدد أو متغير أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو أكثر وأسسها أعداد صحيحة غير سالبة.

### متى تكون وحدة الحد في أبسط صورة

- عندما لا تتضمن قوى القوة.
- عندما يظهر كل أساس مرة واحدة فقط.
- عندما تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- عندما لا تتضمن أسس سالبة.



## مثال

بسط كل عبارة فيما يلي :

$$(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6}) \quad (a)$$

$$\frac{2}{x^3} \cdot y \cdot y \cdot y (-7)(x^5) \left(\frac{1}{y^6}\right)$$

$$= \frac{-14x^2}{y^3}$$

$$\left(\frac{a^{-3}}{4}\right) = \left(\frac{4^3}{a}\right) = \frac{64}{a^3} \quad (b)$$

درجة كثرة الحدود :

هي درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأكبر.

## مثال

استثمر فيصل مبلغ ٩٠٠٠٠ ريال في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي ١٨% والآخر في مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي ٤٢% فإذا كانت  $x$  تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

$$90000(0.18) = 16200$$

$$42 - 18 = 24$$

$$16200 + 24x$$

الربح في المشروع الصناعي :

نسبة الربح في المشروعين:

الربح بعد عام واحد:

## تدريبات وحلول

بسط كل عبارة فيما يلي مفترضا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرا :

$$(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4) \quad (1)$$

$$= 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{b \cdot b} \cdot -4 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$$

$$= -8a^5b^2$$

$$\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3 = \frac{8a^6}{27b^3} \quad (3)$$

٥) نعم كثيرة حدود من الدرجة ١ (٧) ليست كثيرة حدود لأنها تحتوي  $\sqrt{x}$

بسط كل عبارة فيما يلي:

$$(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1) \quad (9)$$

$$= x^2 - 5x + 2 - 3x^2 - x + 1$$

$$= -2x^2 - 6x + 3$$

$$3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3) \quad (11)$$

$$= 6x^3y - 9x^3y^2 + 12x^4y^3$$

١٣) كثيرة الحدود التي تمثل عدد السرعات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم :

$$750 - 2.5x$$

٢١) لا تمثل كثيرة حدود لأنها تحتوي  $\sqrt{n}$

$$4x(2x^2 + y) \quad (٢٢)$$

$$= 8x^3 + 4xy$$

$$(-3x^3y)^2(4xy^2) \quad (٢٣)$$

$$= (9x^6y^2)(4xy^2)$$

$$= 36x^7y^4$$



$$\frac{1}{4} g^2(8g + 12h - 16gh^2) \quad (٣٤)$$

$$= 2g^3 + 3g^2h - 4g^3h^2$$

$$(n^2 - 7)(2n^3 + 4) \quad (٣٧)$$

$$= 2n^5 + 4n^2 - 14n^3 - 28$$

$$(3z-2)^3 \quad (٣٩)$$

$$= (3z-2)(3z-2)(3z-2)$$

$$= 9z^2 - 6z - 6z + 4(3z - 2)$$

$$= 9z^2 - 12z + 4(3z - 2)$$

$$= 27z^3 - 18z^2 - 36z^2 + 24z + 12z - 8$$

$$= 27z^3 - 54z^2 + 36z - 8$$

$$4k+5 = 41 \quad (٤٢)$$

$$4k = 41-5$$

$$K = \frac{36}{4} = 9$$

$$X-1 \text{ (C) البديل الصحيح } (٥٠) \quad (x^3)^4 = \frac{x^{24}}{x^{12}} = x^6 \times x^6 \quad (٤٧)$$

## قسمة كثيرات الحدود

3-4

### خوارزمية القسمة

هي عملية مشابهة للقسمة المطولة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى.

**ملاحظة:** قد ينتج باق عن قسمت كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية.

### مفهوم القسمة التركيبية

هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

- (١) نكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازلياً.
- (٢) نأكد ان المقسوم عليه على الصورة  $x-r$  و نكتب الثابت  $r$  في الصندوق والمعامل الأول أسفل الخط الأفقي.
- (٣) نضرب المعامل الأول في  $r$  ونكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.
- (٤) نجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني.
- (٥) نكرر الخطوتين ٣، ٤ حتى نصل الى ناتج جمع العندين في العمود الأخير.

خطوات  
القسمة  
التركيبية

لاحظ جيداً أيها الطالب : الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم والعدد الأخير هو الباقي.



## مثال

استعمل القسم التركيبي لإيجاد ناتج :

$$(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3) \quad (a)$$

(١) نكتب معاملات المقسوم ونكتب الثابت ٢ في الصندوق وهو هنا (3-) ثم نكتب المعامل الأول ٢ أسفل الخط الأفقي.

$$\begin{array}{cccc} -3 & 2 & 3 & -4 & 15 \end{array}$$

٢) نضرب المعامل الأول في الثابت  $3^2$  - ليصبح الناتج  $(-6 = -3 \times 2)$  ونكتب الناتج أسفل المعامل الثاني ٣.

$$\begin{array}{cccc} -3 & 2 & 3 & -4 & 15 \\ & & -6 & & \end{array}$$

(٣) نجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني ونكتب الناتج أسفل الخط .

$$\begin{array}{cccc} -r] & 2 & 3 & -4 & 15 \\ & & -6 & & \end{array}$$

(٤) نضرب المجموع وهو 3- في الثابت 3- فيكون الناتج ٩ نكتبها أسفل المعامل الثالث ثم نجمع  $5=9+4$ - نضرب المجموع وهو ٥ في الثابت 3- فنحصل على 15- نكتبه تحت المعامل التالي ثم نجمع لنحصل على صفر وهو هنا الباقي.

$$\begin{array}{rrrr} -r] & 2 & 3 & -4 & 15 \\ & & -6 & 9 & -15 \\ \hline & 2 & -3 & 5 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو  $-2x^2 - 3x + 5$  والباقي صفر

$$4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2) \quad (b)$$

$$-2 \mid \quad 4 \quad 0 \quad 2 \quad -4 \quad 12$$

-8   16   -36   80

4   -8   18   -40   92

ناتج القسمة هو  $4a^3 - 8a^2 + 18a - 40 + \frac{92}{a+2}$

ملاحظة

لاجراء القسمة التركيبية يجب ان يكون المقسوم عليه على الصورة  $x-r$  واذا كان معامل  $x$  في المقسوم عليه لايساوي واحد فيجب اعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكن استعمال القسمة التركيبية لايجاد ناتج القسمة.

## تكريرات وحلول

بسط كل عبارة فيما يأتي :

$$\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy} = \frac{4xy^2}{xy} - \frac{2xy}{xy} + \frac{2x^2y}{xy} \quad (1)$$

$$= 4y - 2 + 2x$$

$$(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2) \quad (6)$$

$$\begin{array}{r} r) \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad -20 \\ \quad \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 10 \quad 20 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 10 \quad 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو  $y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 5y + 10$

(٧) أي مما يأتي يكافئ المقدار  $(x^2 - 3x - 9)(4 - x)^{-1}$  :

$$\begin{array}{r} \epsilon) \quad -1 \quad -3 \quad 9 \\ \quad \quad -4 \quad -28 \\ \hline -1 \quad -7 \quad -19 \end{array}$$

ناتج القسمة هو  $-x - 7 - \frac{19}{x-4}$  البديل الصحيح (A)

بسط كل عبارة مما يلي :

$$(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2) \quad (9)$$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل  $a$  وهو هنا ٤ لتصبح عملية القسمة:

$$(6a^2 + 2a + 3) \div \left(a - \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} \int \quad 6 \quad 2 \quad 3 \\ \quad \quad \quad 4 \quad 4 \\ \hline 6 \quad 6 \quad 7 \end{array}$$

$$6a + 6 + \frac{21}{3a-2} \quad \text{ناتج القسمة}$$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل  $y$  وهو هنا ٩ لتصبح عملية القسمة:

$$(3y^2 + 3y - \frac{30}{9}) \div \left(y - \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} \int \quad 3 \quad 3 \quad -\frac{30}{9} \\ \quad \quad \quad 2 \quad \frac{10}{3} \\ \hline 3 \quad 5 \quad 0 \end{array}$$

$$3y + 5 \quad \text{ناتج القسمة}$$

$$\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab} = \frac{24a^3b^2}{8ab} - \frac{16a^2b^3}{8ab} \quad (12)$$

$$= 3a^2b - 2ab^2$$



(١٨) يقدر عدد أرغفة الخبز التي ينتجها مخبز في اليوم بالعبارة :  
 $-w^2 + 16w + 1000$  حيث  $w$  عدد العاملين في المخبز اقسم العبارة المعطاة على  $w$   
 لتجد معدل عدد الأرغفة التي ينتجها العامل الواحد:



$$\frac{-w^2 + 16w + 1000}{w} = -w + 16 + \frac{1000}{w}$$

$$(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x - 4) \quad (٢٢)$$

$$\begin{array}{r} x \overline{) 1 \quad 0 \quad -4 \quad 4 \quad 0 \quad 0} \\ \underline{4 \quad 16 \quad 48 \quad 208 \quad 832} \\ 1 \quad 4 \quad 12 \quad 52 \quad 208 \quad 832 \end{array}$$

$$x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 52x + 208 + \frac{832}{x-4} \text{ ناتج القسمة هو}$$

$$(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2) \quad (٢٤)$$

$$\begin{array}{r} g \overline{) 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad -18} \\ \underline{2 \quad 4 \quad 2 \quad 4} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad -14 \end{array}$$

$$g^3 + 2g^2 + g + 2 - \frac{14}{g-2} \text{ ناتج القسمة هو}$$

$$\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x + 1} \quad (26)$$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل  $x$  وهو هنا 3 لتصبح عملية القسمة:

$$\frac{2x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

$$\begin{array}{r} \frac{-1}{3} \overline{) 2 \quad \frac{5}{3} \quad \frac{1}{3} \quad -1 \quad \frac{1}{3} \quad 0} \\ \underline{\frac{-2}{3} \quad \frac{-1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{-2}{9}} \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{-2}{9} \end{array}$$

$$4x^4 + x^3 - x + \frac{2}{3} - \frac{2}{9x-3}$$

ناتج القسمة

$$(6z^6 + 3z^4 - 9z^2)(3z - 6)^{-1} \quad (٢٨)$$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل  $z$  وهو هنا 3 لتصبح عملية القسمة:

$$(2z^6 + z^4 - 3z^2)(z - 2)^{-1}$$

$$\begin{array}{r} z \overline{) 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 0} \\ \underline{4 \quad 8 \quad 18 \quad 36 \quad 66 \quad 132} \\ 2 \quad 4 \quad 9 \quad 18 \quad 33 \quad 66 \quad 132 \end{array}$$

$$2z^5 + 4z^4 + 9z^3 + 18z^2 + 33z + 66 + \frac{132}{z-2} \text{ ناتج القسمة هو}$$

يرتبط فرق الجهد للتيار  $V$  بشدة التيار  $I$  والقدرة  $P$  بالمعادلة  $V = \frac{P}{I}$  فإذا عبر عن القدرة بالدالة

$$P(I) = I^3 + 9I^2 + 26I + 24 \text{ وشدة التيار بالمعادلة:}$$

$$I = I + 4 \text{ فاكتب عبارة تمثل فرق الجهد } V$$

الحل:

$$V = \frac{t^3 + 9t^2 + 26t + 24}{t + 4}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -t & 1 & 9 & 26 & 24 \\ & & -4 & -20 & -24 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$V(t) = t^2 + 5t + 6$$

ناتج القسمة هو

بسط كل عبارة فيما يلي :

$$\frac{n^3 + 3n^2 - 5n - 4}{n + 4} \quad (٣٤)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -t & 1 & 3 & -5 & -4 \\ & & -4 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$= n^2 - n - 1$$

ناتج القسمة هو

(٣٦)

$$(3z^5 + 5z^4 + z + 5) \div (z + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -z & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ & & -6 & 2 & -4 & 8 & -18 \\ \hline & 3 & -1 & 2 & -4 & 9 & -13 \end{array}$$

ناتج القسمة هو

$$3z^4 - z^3 + 2z^2 - 4z + 9 - \frac{13}{z + 2}$$

a (٣٨)

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $x^2$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| $x^2$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| $x$   | 1   | 1   | 1   |

$$(2x^2 + 7x + 3) \div (2x + 1) \quad b$$

c. بحل المعادلة بطريقة القسمة التركيبية نحصل على :  $x + 3$  وهذا يتفق مع الحل باستخدام البطاقات الجبرية.

٤٠. ثنائية الحد عامل من عوامل كثيرة الحدود.

٤٣.  $\frac{5}{x^2}$  تختلف عن الباقي لأنها تحتوي في المقام على  $x^2$  بينما باقي العبارات كثيرات حدود.

٤١. درجة ناتج القسمة + درجة المقسوم عليه = درجة المقسوم.

٤٥. البديل الصحيح (C)  $-10x^2 + 17x$

٤6. البديل الصحيح (D)  $1 + x + x^2$



## دوال كثيرات الحدود

### كثيرة الحدود بمتغير واحد

هي عبارة جبرية على الصورة :

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$   
حيث  $a_0, a_1, a_{n-1}, a_n$  أعداد حقيقية ،  $a_n \neq 0$  ،  $n$  عدد صحيح غير سالب .

### الصورة القياسية لكثيرة حدود

تكون كثيرة الحدود مكتوبة على الصورة  
القياسية إذا كانت أسس المتغير في  
حدودها مرتبة ترتيباً تنازلياً

درجة كثيرة الحدود : هي أس المتغير ذي أكبر أس فيها .  
المعامل الرئيس : هو معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصورة القياسية .

### مثال

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود فيما يأتي وإذا لم تكن كثيرة حدود فانكر السبب :

$$5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x} \quad (a)$$

ليست كثيرة حدود لأنها تحتوي في المقام متغير

$$5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14 \quad (b)$$

كثيرة حدود بمتغير واحد من الدرجة 6 والمعامل الرئيس فيها هو 5 .

### دالة كثيرة الحدود

هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة  
كثيرة حدود بمتغير واحد وتكتب أبسطها على  
الصورة  $f(x) = bx^a$  حيث  $b$  عدد حقيقي  
لايساوي صفر ،  $a$  عدد صحيح غير سالب  
وتسمى دوال القوة .

**تنبيه** إذا علمت عنصر في مجال دالة كثيرة الحدود فانك تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى .



## مثال

إذا كانت  $g(x) = x^2 - 5x + 8$  فأوجد ما يلي :

$$G(5a-2) + 3g(2a)$$

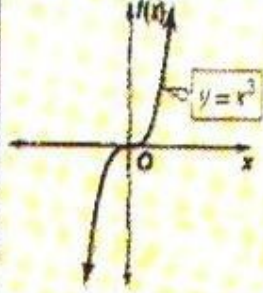
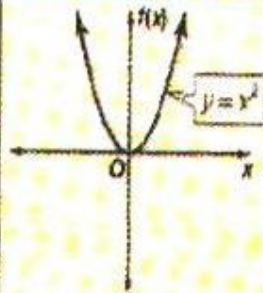
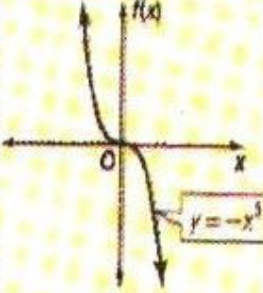
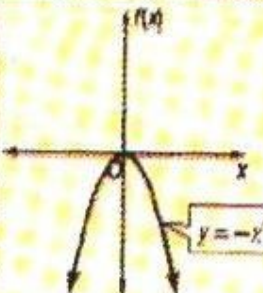
$$\begin{aligned} G(5a-2) &= (5a-2)^2 - 5(5a-2) + 8 \\ &= 25a^2 - 20a + 4 - 25a + 10 + 8 \\ &= 25a^2 - 45a + 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3g(2a) &= 3\{(2a)^2 - 5(2a) + 8\} \\ &= 3(4a^2 - 10a + 8) \\ &= 12a^2 - 30a + 24 \end{aligned}$$

$$G(5a-2) + 3g(2a) = 37a^2 - 75a + 46$$

## ملاحظة هامة

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيا يظهر أكبر عدد من المرات التي يقطع فيها هذا التمثيل المحور  $x$  وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>الدرجة : فردية</p> <p>المعامل الرئيس : موجب</p> <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية.</p> <p>المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية.</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني :</p> <p><math>x \rightarrow -\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow -\infty</math></p> <p><math>x \rightarrow +\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow +\infty</math></p>   | <p>الدرجة : زوجية</p> <p>المعامل الرئيس : موجب</p> <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية.</p> <p>المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية.</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني :</p> <p><math>x \rightarrow -\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow +\infty</math></p> <p><math>x \rightarrow +\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow +\infty</math></p>                                        |
| <p>الدرجة : فردية</p> <p>المعامل الرئيس : سالب</p> <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية.</p> <p>المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية.</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني :</p> <p><math>x \rightarrow -\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow +\infty</math></p> <p><math>x \rightarrow +\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow -\infty</math></p>  | <p>الدرجة : زوجية</p> <p>المعامل الرئيس : سالب</p> <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية.</p> <p>المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى.</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني :</p> <p><math>x \rightarrow -\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow -\infty</math></p> <p><math>x \rightarrow +\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow -\infty</math></p>  |

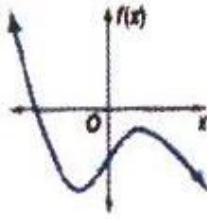


## تذكر عزيزي الطالب:

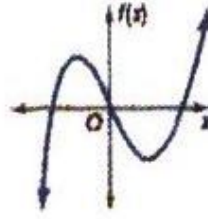
مقاطع المحور ( $x$ ) تحدد أصفار دالة كثيرة الحدود وعدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور ( $x$ ) يمثل عدد هذه الأصفار.

## مفهوم

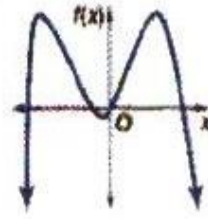
يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية إلى  $H$  بينما يكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى  $H$ .



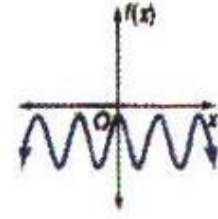
لها صفر واحد ينتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية



لها 3 أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية

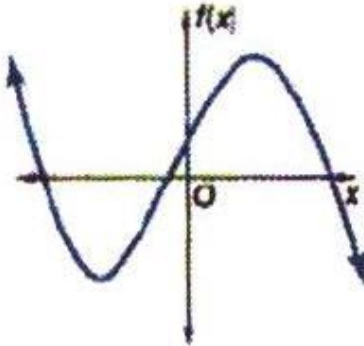


لها 4 أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية



ليس لها أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية

## مثال



أجب عما يلي للتمثيل البياني التالي :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- حدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد أصفار الدالة المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل :

$$F(x) \rightarrow +\infty \text{ عندما } x \rightarrow -\infty$$

$$F(x) \rightarrow -\infty \text{ عندما } x \rightarrow +\infty$$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين فالدالة فردية الدرجة ، ويقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في ثلاث نقاط لذا يكون للدالة ثلاثة أصفار حقيقية.

## تكريرات وحلول

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود فيما يأتي وإذا لم تكن كثيرة حدود فاذكر السبب

$$11x^6 - 5x^5 + 4x^2 \quad (1)$$

كثيرة حدود من الدرجة السادسة والمعامل الرئيس فيها ١١ .

$$14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y \quad (3)$$

ليست كثيرة حدود لأنها تحتوي متغيران هما  $x, y$

أوجد  $w(5), w(-4)$  للدالة :

$$w(x) = -2x^3 + 3x - 12 \quad (5)$$

$$w(5) = -2(5)^3 + 3(5) - 12 = -247$$

$$w(-4) = -2(-4)^3 + 3(-4) - 12 = 104$$

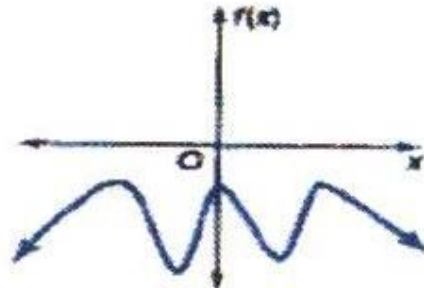
إذا كانت  $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$  ،  $d(x) = 3x^2 + 6x - 10$  فأوجد قيمة كل مما يلي :

$$c(y^3) = 4y^3 - 5y^6 + 2 \quad (7)$$

أجب عما يلي للتمثيل البياني التالي :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- حدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد أصفار الدالة المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية.

(١٢)



الحل :

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } F(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } F(x) \rightarrow -\infty$$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه فالدالة زوجية الدرجة ، ولا يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في أي نقاط لذا لا يوجد للدالة أصفار حقيقية.

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود فيما يأتي وإذا لم تكن كثيرة حدود فاذكر السبب :

$$3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a} \quad (14)$$

ليست كثرة حدود لأنها تحوي متغير في المقام .

$$-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7 \quad (16)$$

كثيرة حدود بمتغير واحد من الدرجة ٧ والمعامل الرئيس هو -٢١ .

$$(5-2y)(4+3y) \quad (18)$$

$$= 20 + 15y - 8y - 6y^2$$

$$= 20 + 7y - 6y^2$$

كثيرة حدود بمتغير واحد من الدرجة ٢ والمعامل الرئيس هو -٦ .



(20) كثيرة حدود بمتغير واحد من الدرجة 8 والمعامل الرئيس هو -2 .  
أوجد  $p(3), p(-6)$  للدالة :

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \quad (21)$$

$$p(3) = (3)^4 - 2(9) + 3 = 66$$

$$p(-6) = (-6)^4 - 2(36) + 3 = 1227$$

$$p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5 \quad (22)$$

$$p(3) = -(3)^3 + 3(9) - 5 = -5$$

$$p(-6) = -(-6)^3 + 3(36) - 5 = 319$$

إذا كانت  $c(x) = 2x^2 - 4x + 3$  ،  $d(x) = -3x^3 + x + 1$  فأوجد قيمة كل مما يلي :

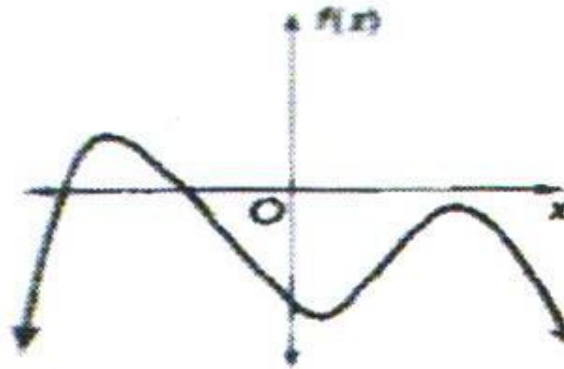
$$c(3a) = 2(3a)^2 - 4(3a) + 3 \quad (25)$$

$$= 18a^2 - 12a + 3$$

$$c(b^2) = 2(b^2)^2 - 4b^2 + 3 \quad (27)$$

$$= 4b^4 - 4b^2 + 3$$

(23)



الحل :

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه فالدالة زوجية الدرجة ، و يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في نقطتين لذا يوجد للدالة صفرين حقيقيين.

$$KE(0) = 0.5 mv^2 \quad (24)$$

$$= 0.5 (171) (11^2)$$

$$= 10345.5 \text{ جول}$$

أوجد  $p(8), p(-2)$  للدالة :

$$p(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18 \quad (36)$$

$$p(-2) = \frac{1}{8}(-2)^4 - \frac{3}{2}(-8) + 12(-2) - 18 = -28$$

$$p(8) = \frac{1}{8}(8)^4 - \frac{3}{2}(512) + 12(8) - 18 = -178$$

(39) التمثيل البياني الصحيح (D)

(41) التمثيل البياني الصحيح (A)

٤٨ a. \* التقاطع مع محور x عند 2, -1, 3, -4

\* التقاطع مع محور y ٢٤

\* الجذور 2, -1, 3, -4

\* درجة كثيرة الحدود ٤

\* سلوك طرفي تمثيلها البياني :

$x \rightarrow -\infty$  عندما  $F(x) \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow +\infty$  عندما  $F(x) \rightarrow +\infty$

b.  $g(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$

$g(x) = 2x^5 + 6x^4$  (٥٠)

$x \rightarrow -\infty$  عندما  $F(x) \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow +\infty$  عندما  $F(x) \rightarrow +\infty$

٥٢ إجابة ماجد صحيحة لان الدالة الزوجية لها عدد زوجي من الازهار والجذر المكرر مرتين يعبر عن صفرين.

### اختبار منتصف الفصل الثالث

١ - الحل:  $\sqrt{-81} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{81} = 9i$

٢ - الحل:  $(15-3i) - (4-12i)$

$= 15-3i-4+12i = 11+9i$

٣ - الحل:  $i^{57} \cdot i^2 = i$

٤ - الحل:  $\frac{3-2i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{6-15i-2i-5}{4+25} = \frac{1-17i}{29}$

٥ - الحل:  $x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - (4 \times 1 \times 9)}}{2}$

$= \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2}$

$= \frac{8 \pm 10}{2}$

$x = 9$  or  $x = -1$

٧ - الحل:  $-6x^5y^2$

٨ - الحل:  $12rt^2 - 4rt$

٩ - الحل:  $\frac{a^2}{2b^2a^2}$

٩ - الحل:  $\frac{b^4r^6}{b^2r^8} = \frac{b^2}{r^2}$

١٠ -  $-2m^2 - 9m + 6$

١١ - البديل الصحيح هو (C)  $6x^2 + X - 1$



$$\begin{array}{r} 3 \quad -16 \quad 9 \quad -24 \\ 15 \quad -5 \quad 20 \\ \hline 3 \quad -1 \quad 4 \quad -4 \end{array}$$

ناتج القسمة هو  $3x^2 - x + 4 - \frac{4}{x-5}$  - ١٤

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad -2 \quad -4 \quad 10 \\ -3 \quad 0 \quad 6 \quad -6 \\ \hline 1 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

ناتج القسمة هو  $x^3 - 2x + 2 + \frac{4}{x+3}$  - ١٥

١٦ -  $F(x) \rightarrow +\infty$  عندما  $x \rightarrow -\infty$

$F(x) \rightarrow -\infty$  عندما  $x \rightarrow +\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين فالدالة فردية الدرجة ، و يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في ثلاث نقاط لذا يوجد للدالة ٣ أصفار حقيقية.

$$P(-3) = \frac{2}{3}(-27) + \frac{1}{3}(9) - 5(-3) - 18 = -18 + 3 + 15 = 0$$

١٩ - البديل الصحيح هو  $(D) -a^2 - 9a + 2$

$$L(4) = \frac{8(16)}{\pi^2} = \frac{128}{\pi^2} = \frac{128}{9.78} = 12.97 \text{ ft}$$

$$P(18) = \frac{18^3}{1000} = \frac{5832}{1000} = 5.832 \text{ وحدة}$$

### 3-6 حل معادلات كثيرات الحدود

**تذكر عزيزي الطالب:**

يمكننا تحليل كثيرات الحدود التربيعية إلى مجموع مربعين أو الفرق بين مربعين.

مجموع مكعبين والفرق بينهما:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

**انتبه** إذا لم يمكننا تحليل كثيرة حدود فإنها تسمى كثيرة حدود أولية.

**مثال**

حلل كثيرة الحدود التالية :  $5y^2 - 320yz^3$

$$= 5y(y^3 - 64z^3)$$

$$= 5y(y-4z)(y^2 + 4yz + 16z^2)$$

# طرق تحليل كثيرات الحدود

| ملخص المفهوم       | طرائق التحليل                                        | الحالة العامة                                                                                                  |
|--------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| أي عدد             | إخراج العامل المشترك الأكبر                          | $4ab^3 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$                                                                                  |
| حداً               | الفرق بين مربعين<br>مجموع مكعبين<br>الفرق بين مكعبين | $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$<br>$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$<br>$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ |
| ثلاثة حدود         | ثلاثية حدود المربع الكامل                            | $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$<br>$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$                                                 |
| أربعة حدود أو أكثر | تجميع الحدود                                         | $ax^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$<br>$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$<br>$= (a + b)(x + y)$ |

## مثال

حل كثيرة الحدود التالية :

$$\begin{aligned}
 & 30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2 \\
 &= 6x(5a - 4b + c) - y^2(5a - 4b + c) \\
 &= (6x - y^2)(5a - 4b + c)
 \end{aligned}$$

**تنبيه** الطريقة الوحيدة لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر هي تجميع الحدود.

## الصورة التربيعية لكثيرة حدود

بحيث  $a, b, c \neq 0$  أعداد حقيقية  
ويمكن أن نكتب بعض كثيرات  
الحدود التي تتضمن المتغير  $x$  على  
هذه الصورة وذلك بعد تعريف  $u$   
بدلالة  $x$ .

**تنبيه** هناك بعض كثيرات الحدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.



## مثال

اكتب العبارتين التاليتين على الصورة التربيعية :

$$x^4 + 5x + 6$$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

$$\begin{aligned} & 8x^4 + 12x^2 + 18 \\ &= 2(2x^2)^2 + 6(2x)^2 + 18 \\ &= 2u^2 + 6u + 18 \end{aligned}$$

لاحظ عزيزي الطالب:

يمكننا استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات حدود ذات درجة اكبر من الدرجة الثانية.

## مثال

حل المعادلة :  $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

$$= 2(2x^2)^2 + 5(2x^2) - 12 = 0$$

$$2u^2 + 5u - 12 = 0$$

$$U = -4 \quad \text{or} \quad u = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 = -4 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow x = \pm i\sqrt{2}$$

$$\text{or } 2x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## تدريبات وحلول

حل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$\begin{aligned} & 12qw^3 - 12q^4 \quad (4) \\ &= 12q(w^3 - q^3) \\ &= 12q(w-q)(w^2 + wq + q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^3y^3 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3 \\ &= x^3(y^3 - 8y + 16) + y^3(y^2 - 8y + 16) \\ &= (x^3 + y^3)(y^2 - 8y + 16) \\ &= (x+y)(x^2 - xy + y^2)(y-4)^2 \\ & 6bx + 12cx + 18dx - by - 2cy - 3dy \quad (8) \\ &= 6x(b+2c+3d) - y(b+2c+3d) \\ &= (6x-y)(b+2c+3d) \end{aligned}$$

حل كل معادلة مما يأتي :

$$\begin{aligned} & x^4 - 19x^2 + 48 = 0 \quad (9) \\ &= (x^2)^2 - 19(x^2) + 48 = 0 \\ &u^2 - 19u + 48 = 0 \\ &U = 16 \quad \text{or} \quad u = 3 \\ &x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4 \\ &\text{or } x^2 = 3 \rightarrow x = \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

(١٣) الحل : مساحة البركة مع الممر :

$$(40+2x)(30+2x)=2000$$

$$1200+80x-60x+4x^2=2000$$

$$4x^2+140x+1200-2000=0$$

$$(2x)^2-70(2x)-800=0$$

$$u^2+70u-800=0$$

$$U=10 \text{ or } u=-80$$

$$2x=10 \rightarrow x=5$$

$$\text{or } 2x=-80 \rightarrow x=-40$$

الإجابة السالبة مرفوضة لان الطول موجب ← عرض الممر = 5ft

اكتب العبارة التالية على الصورة التربيعية ان كان ذلك ممكنا :

(١٥) لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية لان  $y^6 \neq (y^2)^2$

حل المعادلة التالية :

$$y^4 - 18y^2 + 72 = 0$$

(١٧)

$$= (y^2)^2 - 18(y^2) + 72 = 0$$

$$u^2 - 18u + 72 = 0$$

$$U=12 \text{ or } u=6$$

$$y^2=12 \rightarrow y=\pm 2\sqrt{3}$$

$$\text{or } y^2=6 \rightarrow y=\pm \sqrt{6}$$

حل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا وإذا لم يكن ذلك ممكنا فاكتب كثيرة حدود أولية:

(١٩)

$$64x^4 + xy^3$$

$$= x(64x^3 + y^3)$$

$$= x(4x+y)(16x^2-4xy+y^2)$$

(٢٢) كثيرة حدود أولية.

(٢٦)

$$8x^5 - 25y^3 + 80x^4 - x^2y^3 + 200x^3 - 10xy^3$$

$$= 8x^3(x^2+10x+25) - y^3(x^2+10x+25)$$

$$= (8x^3 - y^3)(x^2+10x+25)$$

$$= (2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(x+5)^2$$

حل كل معادلة مما يأتي :

$$x^4 - 16x^2 - 720 = 0 \quad (28)$$

$$= (x^2)^2 - 16(x^2) - 720 = 0$$

$$u^2 - 16u - 720 = 0$$

$$U=36 \text{ or } u=-20$$

$$x^2=36 \rightarrow x=\pm 6$$

$$\text{or } x^2=-20 \rightarrow x=\pm 2i\sqrt{5}$$

$$x^4 + 6x^2 - 91 = 0$$

(30)

$$= (x^2)^2 + 6(x^2) - 91 = 0$$

$$u^2 + 6u - 91 = 0$$

$$U=7 \text{ or } u=-13$$

$$x^2=7 \rightarrow x=\pm \sqrt{7}$$

$$\text{or } x^2=-13 \rightarrow x=\pm i\sqrt{13}$$



$$64x^3 + 1 = 0 \quad (٣٢)$$

$$(4x+1)(16x^2+4x+1)=0$$

$$4x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{4}$$

$$\text{Or } (16x^2+4x-1)=0$$

$$X = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{8}$$

اكتب العبارة التالية على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنا :

$$-15x^4 - 18x^2 - 4 \quad (٣٤)$$

$$= -15(x^2)^2 + 18(x^2) - 4 = 0$$

$$= -15u^2 + 18u - 4 = 0$$

(٣٦) لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

$$16x^{10} + 2x^5 - 6 \quad (٣٨)$$

$$= 4(2x^5)^2 + 2x^5 - 6 = 0$$

$$= 4u^2 + 2u - 6 = 0$$

حل كل معادلة فيما يأتي :

$$x^4 - 3x^2 - 10 = 0 \quad (٤٠)$$

$$= (x^2)^2 - 3(x^2) - 10 = 0$$

$$u^2 - 3u - 10 = 0$$

$$U=5 \text{ or } u=-2$$

$$x^2=5 \rightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

$$\text{or } x^2=-2 \rightarrow x=\pm i\sqrt{2}$$

$$9x^4 - 27x^2 + 20 = 0 \quad (٤٢)$$

$$= (3x^2)^2 - 9(3x^2) + 20 = 0$$

$$u^2 - 9u + 20 = 0$$

$$U=5 \text{ or } u=4$$

$$3x^2=5 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\text{or } 3x^2=4 \rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا وإذا لم يكن ذلك ممكنا فاكتب كثيرة حدود أولية :

(٤٥)

$$x^4 - 625$$

$$= (x^2)^2 - (25)^2$$

$$= (x^2 - 25)(x^2 + 25)$$

$$= (x-5)(x+5)(x^2 + 25)$$

$$= 5x(3a-2b+c) + 4y(3a-2b+c) + 5z(3a-2b+c) \quad (٤٩)$$

$$= (5x+4y+5z)(3a-2b+c)$$

حل كل معادلة فيما يأتي :

$$8x^4 + 10x^2 - 3 = 0 \quad (٥٤)$$

$$= 8(x^2)^2 + 10(x^2) - 3 = 0$$

$$8u^2 + 10u - 3 = 0$$

$$U = \frac{1}{4} \text{ or } u = \frac{-3}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

$$\text{or } x^2 = \frac{-3}{2} \rightarrow x = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$20x^4 - 53x^2 + 18 = 0$$

$$= 20(x^2)^2 - 53(x^2) + 18 = 0$$

$$20u^2 - 53u + 18 = 0$$

$$U = \frac{9}{4} \quad \text{or} \quad u = \frac{2}{5}$$

$$x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

$$\text{or } x^2 = \frac{2}{5} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$8x^4 - 18x^2 + 4 = 0$$

$$= 8(x^2)^2 - 18(x^2) + 4 = 0$$

$$8u^2 - 18u + 4 = 0$$

$$U = \frac{1}{4} \quad \text{or} \quad u = 2$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{or } x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

$$(x-2)(x-4)(x-6) = 40x$$

$$x^2 - 4x - 2x + 8(x-6) - 40x$$

$$x^3 - 6x^2 - 6x^2 + 36x + 8x - 48 = 40x$$

$$x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 40$$

b. بالتحليل إلى عوامل نجد أن  $x = 12, 2i, -2i$

c. القيم الغير مقبولة هي  $x = 2i, -2i$  لأنهما عدنان تخيليان.

d. أبعاد المنشور هي  $x-2 = 12-2 = 10$

$$x-4 = 12-4 = 8$$

$$x-6 = 12-6 = 6$$

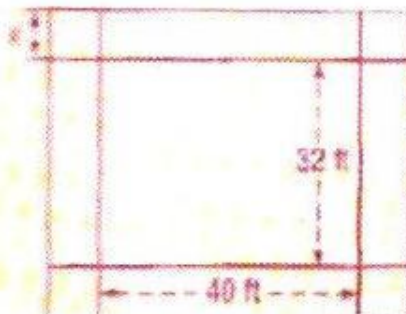
$$F(x) = 8x^2 + 34x + 24$$

$$8x^2 + 34x + 24 = 1366$$

$$8x^2 + 34x - 1342 = 0$$

$$X = 11 \quad \text{or} \quad x = -15.25$$

باستبعاد الإجابة السالبة لان المساحة موجبة فان  $x = 11$



b. المساحة الجديدة  $4.5(1280) = 5760 \text{ ft}$

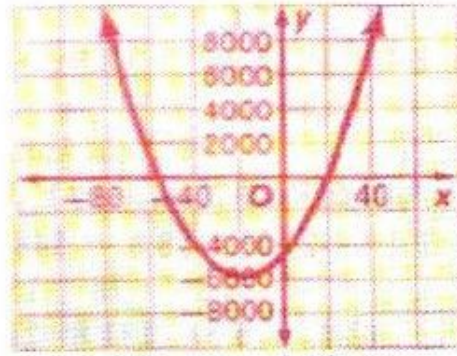
$$(32x - 2x)(40 - 2x) = 5760$$

$$1280 - 64x - 80x - 4x^2 = 5760$$

$$4x^2 - 144x - 4480 = 0$$

$$X = -56 \quad \text{or} \quad x = 20$$





d. الحل الغير مقبول هو  $x = -56$  لان الطول موجب دائما.

(٧٨) الاحتمال هو  $\frac{1}{15}$

(٧٩) البديل الصحيح هو (D)  $\frac{13}{60}$

(٨٣)  $(2-6j) + (3+4j) = (2+3)(-6j+4j) = 5-2j$

(٨٦) 
$$\begin{array}{r} -r \quad 8 \quad 4 \quad 0 \quad 6 \\ \hline \quad \quad -16 \quad 24 \quad -48 \\ \hline \quad \quad 8 \quad -12 \quad 24 \quad -42 \end{array}$$

نتاج القسمة هو  $8x^2 - 12x + 24 - \frac{42}{x+2}$

### 3-7 نظريتنا الباقي والعوامل

إذا قسمت كثيرة حدود  $p(x)$  على  $x-r$  فإن الباقي ثابت ويساوي  $p(r)$  وكذلك :

$$p(x) = q(x) \cdot (x-r) + p(r)$$

الباقي + المقسوم عليه . ناتج القسمة = المقسوم  
حيث  $q(x)$  دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن  
درجة المقسوم  $p(x)$ .

نظرية  
الباقي

#### التعويض التركيبي :

هي عملية تطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود اكبر من الدرجة الثانية.

#### مثال

إذا كانت  $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$  فاجد  $f(3)$

بناء على نظرية الباقي فإن  $f(3)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-3$ .

$$\begin{array}{r} r \quad 3 \quad -6 \quad 1 \quad -11 \\ \hline \quad \quad 9 \quad 9 \quad 30 \\ \hline \quad \quad 3 \quad 3 \quad 10 \quad 19 \end{array}$$

باقي القسمة هو ١٩  $\leftarrow f(3)=19$



## مثال

يمكن استعمال الدالة  $c(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$  لتقدير عدد الطلاب في إحدى محافظات المملكة منذ عام ١٤٢٠ حيث تمثل  $x$  عدد السنوات  $c(x)$  عدد الطلاب بالعشرات قدر عدد طلاب المحافظة عام ١٤٢٢.

نوجد ناتج قسمة الدالة  $c(x)$  على  $x-12$  مستعملا القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrr} x-12 & 2.4 & -22.3 & 53.8 & 548.2 \\ & & 28.8 & 78 & 1581.6 \\ \hline & 2.4 & 6.5 & 131.8 & 2129.8 \end{array}$$

باقي القسمة هو ٢١٢٩,٨ ←  $f(12)=2129.8$  وهو يمثل عدد الطلاب.

**نظرية العوامل** هي حالة خاصة من نظرية الباقي وهي تنص على أن ثنائية الحد  $x-r$  تكون عاملا من عوامل كثيرة الحدود  $p(x)$  إذا وفقط إذا كان  $p(r)=0$

**ملاحظة:** يمكن استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة ويمكن استعمالها أيضا لتحديد جميع عوامل كثيرة الحدود.

**لاحظ عزيزي الطالب:** عند التحليل إلى عوامل ليس شرطاً أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد.

## مثال

بين أن  $(x-2)$  عامل من عوامل كثيرة الحدود:  $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$  ثم أوجد عواملها الأخرى:

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r|rrrr} x-2 & 1 & -7 & 4 & 12 \\ & & 2 & -10 & -12 \\ \hline & 1 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

باقي القسمة هو ٠ ←  $(x-2)$  عامل من عوامل كثيرة الحدود لذا يمكن تحليلها على النحو:

$$\begin{aligned} &= (x-2)(x^2-5x-6) \\ &= (x-2)(x+1)(x-6) \end{aligned}$$

## تدريبات وحلول

أوجد  $f(-2)$ ,  $f(4)$  لكل مما يلي مستعملا التعويض التركيبي:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14 \quad (١)$$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(4)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-4$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} x-4 & 2 & -5 & -1 & 14 \\ & & 8 & 12 & 44 \\ \hline & 2 & 3 & 11 & 58 \end{array}$$

باقي القسمة هو ٥٨ ←  $f(4)=58$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(-2)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+2$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} x+2 & 2 & -5 & -1 & 14 \\ & & 4 & -9 & 17 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} -4 \quad 18 \quad -34 \\ 2 \quad -9 \quad 17 \quad -20 \end{array}$$

باقي القسمة هو  $-20 \leftarrow f(-2) = -20$

في كل مما يلي كثيرة حدود واحد عواملها اوجد عواملها الأخرى:

(٥)  $x^3 + x^2 - 16x - 16, (x+1)$

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r} -1 \mid \quad 1 \quad 1 \quad -16 \quad -16 \\ \quad \quad -1 \quad 0 \quad 16 \\ \hline \quad \quad 1 \quad 0 \quad -16 \quad 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو  $x^2 - 16$

$$= (x-4)(x+4)$$

العوامل هي  $(x+1)(x-4)(x+4)$

(٧)  $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15, (x+3)$

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r} -3 \mid \quad 2 \quad -5 \quad -28 \quad 15 \\ \quad \quad -6 \quad 33 \quad -15 \\ \hline \quad \quad 2 \quad -11 \quad 5 \quad 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو  $2x^2 - 11x + 5$

$$= (2x-1)(x-5)$$

العوامل هي  $(x+3)(2x-1)(x-5)$

اوجد  $f(2), f(-5)$  لكل مما يلي مستعملا التعويض التركيبي:

(٩)  $f(x) = x^2 - 8x + 6$

بناء على نظرية الباقي فان  $f(2)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-2$ .

$$\begin{array}{r} 2 \mid \quad 1 \quad -8 \quad 6 \\ \quad \quad 2 \quad -12 \\ \hline \quad \quad 1 \quad -6 \quad -6 \end{array}$$

باقي القسمة هو  $-6 \leftarrow f(2) = -6$

بناء على نظرية الباقي فان  $f(-5)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+5$ .

$$\begin{array}{r} -5 \mid \quad 1 \quad -8 \quad 6 \\ \quad \quad -5 \quad 65 \\ \hline \quad \quad 1 \quad -13 \quad 71 \end{array}$$

باقي القسمة هو  $71 \leftarrow f(-5) = 71$

(١١)  $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$

بناء على نظرية الباقي فان  $f(2)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-2$ .

$$\begin{array}{r} 2 \mid \quad 2 \quad -8 \quad -2 \quad 5 \\ \quad \quad 4 \quad -8 \quad -20 \\ \hline \quad \quad 2 \quad -4 \quad -10 \quad -15 \end{array}$$

باقي القسمة هو  $-15 \leftarrow f(2) = -15$

بناء على نظرية الباقي فان  $f(-5)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-5$ .

$$\begin{array}{r} -5 \mid \quad 2 \quad -8 \quad -2 \quad 5 \\ \quad \quad -10 \quad 90 \quad -440 \\ \hline \quad \quad 2 \quad -18 \quad 88 \quad -435 \end{array}$$

باقي القسمة هو  $-435 \leftarrow f(-5) = -435$

(١٣)  $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15$

بناء على نظرية الباقي فان  $f(2)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-2$ .

$$\begin{array}{r} 2 \mid \quad 1 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 2 \quad -15 \\ \quad \quad 2 \quad 0 \quad 16 \quad 0 \quad 4 \quad -10 \\ \hline \quad \quad 1 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 2 \quad -15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \quad 24 \quad 48 \quad 100 \\ 1 \quad 2 \quad 12 \quad 24 \quad 50 \quad 85 \end{array}$$

باقي القسمة هو ٨٥ ←  $f(2)=85$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(-5)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+5$ .

$$\begin{array}{r} -5 \mid 1 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 2 \quad -15 \\ -5 \quad 25 \quad -165 \quad 825 \quad -4135 \\ \hline 1 \quad -5 \quad 33 \quad -165 \quad 827 \quad -4150 \end{array}$$

باقي القسمة هو -4150 ←  $f(-5)=-4150$

$$f(x) = x^4 - 6x - 8 \quad (١٥)$$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(2)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-2$ .

$$\begin{array}{r} 2 \mid 1 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \quad -8 \\ 2 \quad 4 \quad 8 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad -4 \end{array}$$

باقي القسمة هو -4 ←  $f(2)=-4$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(-5)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+5$ .

$$\begin{array}{r} -5 \mid 1 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \quad -8 \\ -5 \quad 25 \quad -125 \quad 655 \\ \hline 1 \quad -5 \quad 25 \quad -131 \quad 647 \end{array}$$

باقي القسمة هو 647 ←  $f(-5)=647$

في كل مما يلي كثيرة حدود واحد عواملها أوجد عواملها الأخرى:

$$x^3 - x^2 - 10x - 8, (x-2) \quad (١٩)$$

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r} -2 \mid 1 \quad -1 \quad -10 \quad -8 \\ -2 \quad 2 \quad -4 \\ \hline 1 \quad -3 \quad -4 \quad 0 \end{array}$$

$$x^2 - 3x - 4$$

ناتج القسمة هو

$$= (x-4)(x+1)$$

$$(x+2)(x-4)(x+1)$$

العوامل هي

$$2x^3 + 17x^2 - 23x - 42, (x-1) \quad (٢١)$$

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r} 1 \mid 2 \quad 17 \quad 23 \quad -42 \\ 2 \quad 19 \quad 42 \\ \hline 2 \quad 19 \quad 42 \quad 0 \end{array}$$

$$2x^2 + 19x + 42$$

ناتج القسمة هو

$$= (2x+7)(x+1)$$

$$(x-1)(2x+7)(x+1)$$

العوامل هي

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3, (x-1) \quad (٢٣)$$

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r} 1 \mid 1 \quad 2 \quad 2 \quad -2 \quad -3 \\ 1 \quad 3 \quad 5 \quad 3 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 5 \quad 3 \quad 0 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 3$$

ناتج القسمة هو

$$= (x^2 + 2x + 3)(x+1)$$

$$(x^2 + 2x + 3)(x+1)(x-1)$$

العوامل هي



a (27)

| الزمن (t) | السرعة f(t) |
|-----------|-------------|
| 1         | 0.26 ft/s   |
| 2         | 5.76 ft/s   |
| 3         | 19.86 ft/s  |

b. f(6)

$$\begin{array}{r} \begin{array}{rrrrrr} 7 & -0.04 & 0.8 & 0.5 & -1 & 0 \\ & -0.24 & 3.36 & 23.16 & 132.96 & \\ \hline & -0.04 & 0.56 & 3.86 & 22.16 & 132.96 \end{array} \end{array}$$

\*  $f(6) = 132.96 \text{ ft/s}$  وهذا يعني أن الزورق يسير بسرعة ١٣٢,٩٦ عندما يمر بالعوامة الثانية.

$$f(x) = 20x^3 - 47x^2 + 8x - 12 \quad (29)$$

من الرسم الدالة تقطع المحور x في النقطة ٢  $\leftarrow (x-2)$  أحد عوامل الدالة باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{rrrr} 2 & 20 & -47 & 8 & 12 \\ & & 40 & -14 & -12 \\ \hline & 20 & -7 & -6 & 0 \end{array} \\ 20x^2 - 7x - 6 \\ = (4x - 3)(5x + 2) \\ (4x - 3)(5x + 2)(x - 2) \end{array}$$

ناتج القسمة هو

العوامل هي

a (30)

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{rrrrrr} 2 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ & & 2 & 4 & 0 & 0 \\ \hline & & & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \\ x^3 + 2x^2 \end{array}$$

ناتج القسمة هو

b.

| (x) | g(x) |
|-----|------|
| -2  | 0    |
| -1  | 1    |
| 0   | 0    |
| 1   | 3    |
| 2   | 16   |

c. نستنتج أن كلا من  $(x)$ ,  $(x-2)$  عامل من عوامل الدالة.

(40) البديل الصحيح هو (B)  $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$

(41) البديل الصحيح هو (c) ١٧

تذكر عزيزي الطالب: صفر دالة  $f(x)$  يمكن أن يكون أية قيمة مثل  $c$  حيث  $f(c)=0$  وعند تمثيل الدالة بيانيا تكون أصفار الدالة الحقيقية هي مقاطع المحور  $x$ .

لتكن  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  كثيرة حدود فإنه ينطبق عليها مايلي:

- (١)  $c$  صفر للدالة  $p(x)$ .
- (٢)  $c$  جذر أو حل للمعادلة بحيث  $p(x)=0$ .
- (٣)  $x-c$  عامل من عوامل كثيرة الحدود  $p(x)$ .
- (٤) إذا كان  $c$  عدد حقيقي  $\leftarrow (c, 0)$  هو المقطع  $x$  للدالة  $p(x)$ .

مفهوم هام

انتبه:

- (١) قد يوجد جذر واحد أو أكثر للدالة درجتها اكبر من صفر.
- (٢) قد لا يوجد جذور حقيقية للدالة (أي لها جذور تخيلية).
- (٣) كلا من الأعداد الحقيقية والتخيلية تسمى مجموعة الأعداد المركبة.

كل معادلة كثيرة حدود درجتها اكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة.

النظرية الأساسية في الجبر

مثال

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها وأنواعها:

$$x^3 + 2x = 0$$

$$x(x^2+2)=0$$

$$x=0 \quad \text{or} \quad x^2 = -2 \rightarrow x = \pm i\sqrt{2}$$

للمعادلة جذر واحد حقيقي وجذران تخيليان.

$$x^4 - 16x = 0$$

$$(x^2+4)(x^2-4)=0$$

$$x^2 = -4 \rightarrow x = \pm 2i$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان.

نتيجة

يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة  $n$  العدد  $n$  فقط من الجذور المنتمية لمجموعة الأعداد المركبة بما في ذلك الجذور المتكررة.



إذا كانت  $p(x)$  دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن :

- \* عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة  $p(x)$  يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة  $p(x)$  أو أقل منه بعدد زوجي.
- \* عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة  $p(x)$  يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة  $p(-x)$  أو أقل منه بعدد زوجي.

**قانون  
بيكرت  
للاشارات**

### مثال

اذكر عدد الأصفار الممكنة الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية للدالة:

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

- عند  $h(x)$  نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢ أو ٠.
- عند  $h(-x)$  نجد ٣ تغيرات في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ٣ أو ١.

| عدد الأصفار<br>الموجبة | عدد الأصفار<br>السالبة | عدد الأصفار<br>التخيلية | مجموع الأصفار |
|------------------------|------------------------|-------------------------|---------------|
| 2                      | 3                      | 0                       | $2+3+0=5$     |
| 2                      | 1                      | 2                       | $2+1+2=5$     |
| 0                      | 3                      | 2                       | $0+3+2=5$     |
| 0                      | 1                      | 4                       | $0+1+4=5$     |

عدد الأصفار التخيلية = ٤ أو ٢ أو ٠.

### نظرية الأعداد المركبة المترافقة

إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين حيث  $b \neq 0$  وكان  $a+bi$  صفر لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن  $a-bi$  صفر للدالة أيضا.

تذكر عزيزي الطالب : أن كلا من  $a+bi, a-bi$  هما عددان مركبان مترافقان.

### مثال

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كان العددان  $-1, 1-2i$  من أصفارها.

بما أن  $1+2i$  صفر للدالة  $\leftarrow 1-2i$  صفر للدالة أيضا.  
عوامل كثيرة الحدود:

$$\begin{aligned}
 & (x+1)(x-(1+2i))(x-(1-2i)) \\
 &= (x+1)[(x-1)^2 - (2i)^2] \\
 &= (x+1)[x^2 - 2x + 1 + 4] \\
 &= (x+1)(x^2 - 2x + 5) \\
 &= x^3 - 2x^2 + 5x + x^2 - 2x + 5 \\
 & F(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5
 \end{aligned}$$



حل كل معادلة مما يأتي وانكر عدد جذورها وأنواعها :

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad (1)$$

$$x=5 \quad \text{or} \quad x=-2$$

للمعادلة جذران حقيقيان.

$$16x^4 - 81 = 0 \quad (3)$$

$$(4x^2-9)(4x^2+9)=0$$

$$4x^2-9=0 \rightarrow x^2=\frac{9}{4} \rightarrow x=\pm \frac{3}{2}$$

$$4x^2+9=0 \rightarrow x^2=\frac{-9}{4} \rightarrow x=\pm j \frac{3}{2}$$

للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان.

انكر عدد الأصفار الممكنة الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يلي:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6 \quad (1)$$

عند  $f(x)$  نجد ٣ تغيرات في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٣ أو ١.

عند  $f(-x)$  لا يوجد أي تغير في الإشارات لذلك لا يوجد للدالة أصفار حقيقية سالبة.

| عدد الأصفار الموجبة | عدد الأصفار السالبة | عدد الأصفار التخيلية | مجموع الأصفار |
|---------------------|---------------------|----------------------|---------------|
| 3                   | 0                   | 0                    | $3+0+0=3$     |
| 1                   | 0                   | 2                    | $1+0+2=3$     |

عدد الأصفار التخيلية = ٢ أو ٠.

$$f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4 \quad (7)$$

عند  $f(x)$  نجد ٣ تغيرات في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٣ أو ١.

عند  $f(-x)$  نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ٢ أو ٠.

| عدد الأصفار الموجبة | عدد الأصفار السالبة | عدد الأصفار التخيلية | مجموع الأصفار |
|---------------------|---------------------|----------------------|---------------|
| 3                   | 2                   | 0                    | $3+2+0=5$     |
| 3                   | 0                   | 2                    | $3+0+2=5$     |
| 1                   | 2                   | 2                    | $1+2+2=5$     |
| 1                   | 0                   | 4                    | $1+0+4=5$     |

عدد الأصفار التخيلية = ٤ أو ٢ أو ٠.

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يلي من أصفارها.

$$-4, 4+i \quad (١٦)$$

بما أن  $4+i$  صفر للدالة  $\leftarrow 4-i$  صفر للدالة أيضا.

عوامل كثيرة الحدود:



$$\begin{aligned}
F(x) &= (x+4)(x-(4+i))(x-(4-i)) \\
&= (x+4)[(x-4)^2 - (i)^2] \\
&= (x+4)[x^2 - 8x + 16 + 1] \\
&= (x+4)(x^2 - 8x + 17) \\
&= x^3 - 8x^2 + 17x + 4x^2 - 32x + 68 \\
F(x) &= x^3 - 4x^2 - 15x + 68
\end{aligned}$$

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها وأنواعها :

$$4x^2 + 1 = 0 \quad (17)$$

$$4x^2 = -1$$

$$x^2 = -\frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}i$$

للمعادلة جذران تخيليان.

$$-3x^2 - 5x + 8 = 0 \quad (19)$$

$$x = \frac{5 \pm 11}{-6}$$

$$x = \frac{-8}{3} \quad \text{or} \quad x = 1$$

$$16x^4 - 625 = 0 \quad (21)$$

$$(4x^2 - 25)(4x^2 + 25) = 0$$

$$4x^2 - 25 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \rightarrow x = \pm \frac{5}{2}$$

$$4x^2 + 25 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-25}{4} \rightarrow x = \pm \frac{5}{2}i$$

للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان

انكر عدد الأصفار الممكنة الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يلي:

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7 \quad (25)$$

عند  $f(x)$  نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢ أو ٠.

عند  $f(-x)$  نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ٢ أو ٠.

| عدد الأصفار الموجبة | عدد الأصفار السالبة | عدد الأصفار التخيلية | مجموع الأصفار |
|---------------------|---------------------|----------------------|---------------|
| 2                   | 0                   | 2                    | $2+0+2=4$     |
| 2                   | 2                   | 0                    | $2+2+0=4$     |
| 0                   | 0                   | 4                    | $0+0+4=4$     |
| 0                   | 2                   | 2                    | $0+2+2=4$     |

عدد الأصفار التخيلية = ٤ أو ٢ أو ٠.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19 \quad (28)$$

عند  $f(x)$  نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢ أو ٠.

عند  $f(-x)$  نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ٢ أو ٠.

| عدد الأصفار الموجبة | عدد الأصفار السالبة | عدد الأصفار التخيلية | مجموع الأصفار |
|---------------------|---------------------|----------------------|---------------|
| 2                   | 0                   | 2                    | $2+0+2=4$     |
| 2                   | 2                   | 0                    | $2+2+0=4$     |
| 0                   | 0                   | 4                    | $0+0+4=4$     |
| 0                   | 2                   | 2                    | $0+2+2=4$     |

عدد الأصفار التخيلية = ٤ أو ٢ أو ٠.

$$f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36 \quad (30)$$

عند  $f(x)$  نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢ أو ٠.

عند  $f(-x)$  نجد تغير واحد في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ١.  
 عدد الأصفار التخيلية = ٢ أو ٤.  
 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يلي من أصفارها.  
 (37)  $-2, -1, 5$   
 عوامل كثيرة الحدود:

$$\begin{aligned} F(x) &= (x-5)(x+2)(x+1) \\ &= x^2 + 2x - 5x - 10(x+1) \\ &= x^2 - 3x - 10(x+1) \\ &= x^3 + x^2 - 3x^2 - 3x - 10x - 10 \\ F(x) &= x^3 - 2x^2 - 13x - 10 \end{aligned}$$

(39)  $-1, -1, 2i$

بما أن  $2i$  صفر للدالة  $\leftarrow -2i$  صفر للدالة أيضا.  
 عوامل كثيرة الحدود:

$$\begin{aligned} F(x) &= (x+1)(x+1)(x-2i)(x+2i) \\ &= (x^2 + 2x + 1)[x^2 + 4] \\ &= x^4 + 4x^2 + 2x^3 + 8x + x^2 + 4 \\ F(x) &= x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4 \end{aligned}$$

(٤٣) b. تمثل الجذور الغير سالبة عدد الأجهزة المنتجة يوميا دون تحقيق أرباح.

(٤٤) b. أصفار الدالة الممثلة بيانيا هي  $-4, 3$

(٤٧) الدالة الممثلة بيانيا من الدرجة الثالثة ولا يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور  $x$  لذلك ليس هناك أصفار حقيقية موجبة للدالة ويقطع التمثيل البياني الجزء السالب مرة واحدة لذلك للدالة صفر حقيقي واحد سالب وبذلك يصبح للدالة ثلاث أصفار تخيلية.

(٥١)  $x^4 + 1 = 0$  هي المعادلة التي تختلف عن بقية المعادلات لان حلول هذه المعادلة أعداد تخيلية بينما حل بقية المعادلات أعداد حقيقية.

(٥٤) البديل الصحيح (B)



## نظرية الصفر النسبي

3-9

لاحظ عزيزي الطالب :

تساعد نظرية الصفر النسب على اختيار بعض الأعداد النسبية لاختبارها.

### نظرية الصفر النسبي

لتكن  $p(x)$  دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة فإن أي صفر نسبي للدالة  $p(x)$  سيكون على صورة العدد النسبي  $p/q$  في أبسط صورة حيث  $p$  أحد عوامل الحد الثابت  $q$ ، أحد عوامل الحد الرئيس.

### نتيجة نظرية الصفر النسبي

إذا كانت  $p(x)$  دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة والمعامل الرئيس لها 1 وحدها الثابت لا يساوي الصفر فإن أي صفر نسبي للدالة يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت.

### إيجاد الأصفار النسبية

نختبر كل عدد من الأعداد النسبية باستعمال التعويض التركيبي أو الطرق السابقة التي تعلمتها لإيجاد أصفار الدالة النسبية.

### مثال

منشور متوازي مستطيلات حجمه  $1056 \text{ cm}^3$  ويزيد طوله بمقدار  $1 \text{ cm}$  على عرضه وقل ارتفاعه بمقدار  $3 \text{ cm}$  عن عرضه. أوجد أبعاده.

نفرض أن عرض الصندوق هو  $w$  فيكون طوله  $1+w$  وارتفاعه  $w-3$ .  
حجم الصندوق = الطول  $\times$  العرض  $\times$  الارتفاع :

$$1056 = w(1+w)(w-3)$$

$$w + w^2(w-3) = 1056$$

$$w^2 - 3w + w^3 - 3w^2 = 1056$$

$$w^3 - 2w^2 - 3w - 1056 = 0$$

المعامل الرئيس = 1 ← الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل 1056 وهي :

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 11, \pm 12, \pm 16, \dots$$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.

هناك تغير واحد في إشارة المعاملات ← هناك صفر واحد حقيقي موجب.



| $p$  | $1$ | $-2$ | $-3$ | $-1056$ |
|------|-----|------|------|---------|
| $1$  | $1$ | $-1$ | $-4$ | $-1060$ |
| $3$  | $1$ | $1$  | $0$  | $-1056$ |
| $2$  | $1$ | $0$  | $0$  | $-1056$ |
| $4$  | $1$ | $2$  | $5$  | $-1036$ |
| $6$  | $1$ | $4$  | $21$ | $-910$  |
| $8$  | $1$ | $6$  | $45$ | $-696$  |
| $11$ | $1$ | $9$  | $96$ | $0$     |

العدد ١١ صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

$$W=11cm, 1+w=12cm, w-3=8cm$$

**انتبه** : ليس من الضروري اختبار جميع قيم الاصفار الممكنة فعند إيجاد احدها نحلل الدالة الناتجة عن عملية قسمة كثيرة الحدود على احد عواملها لنجد الاصفار الأخرى.

### مثال

أوجد جميع أصفار الدالة :  $f(x) = 9x^4 + 5x^2 - 4$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة ٤ أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفر واحد حقيقي موجب وصفر حقيقي سالب.

• الأعداد التي تحدها نظرية الصفر النسبي :

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm 1, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{9}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{4}{9}$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن  $\frac{2}{3}$  صفر للدالة.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} \overline{) 9 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad -4} \\ \underline{6 \quad 4 \quad 6 \quad 4} \\ 9 \quad 6 \quad 9 \quad 6 \quad 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x - \frac{2}{3})$  وهي :

$$9x^3 + 6x^2 + 9x + 6 = 0$$

$$3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(3x^3 + 2x^2) + (3x + 2) = 0$$

$$x^2(3x + 2) + (3x + 2) = 0$$

$$(x^2 + 1)(3x + 2) = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm i$$

$$3x + 2 = 0 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

أصفار الدالة هي :  $\pm i, \pm \frac{2}{3}$



## تكريرات وحلول

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي للدالة التالية :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 8x + 24 \quad (1)$$

إذا كان  $\frac{p}{q}$  صفر نسبي فإن  $p$  احد عوامل العدد ٢٤ و  $q$  احد عوامل العدد ١ .

$$q = \pm 1 \quad p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

٣) نفرض أن ارتفاع الهرم  $5x+3$  وطول القاعدة  $x$  وارتفاعها  $2x-1$ .

حجم الهرم =  $\frac{1}{3}$  مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$\begin{aligned} \text{مساحة القاعدة} &= \frac{1}{2} \times (x) \times (2x-1) \\ &= x^2 - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \left( x^2 - \frac{x}{2} \right) (5x+3)$$

حجم الهرم :

بحل المعادلة نصل إلى :

$$10x^3 + x^2 - 3x - 1260 = 0$$

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \dots$$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.

هناك تغير واحد في إشارة المعاملات ← هناك صفر واحد حقيقي موجب.

| $p$ | ١٠ | ١  | -3  | -1260 |
|-----|----|----|-----|-------|
| 1   | 10 | 11 | 8   | -1252 |
| 2   | 10 | 21 | 39  | -1174 |
| 3   | 10 | 31 | 90  | -990  |
| 4   | 10 | 41 | 161 | -616  |
| 5   | 10 | 51 | 252 | 0     |

العدد ١١ صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

$$x = 5in, 2x-1=9in, 5x+3=28in$$

أوجد جميع أصفار كل من الدوال التالية :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42 \quad (4)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإن للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \dots$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ٢ صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & -13 & 42 \\ & & 2 & -8 & -42 \\ \hline & 1 & -4 & -21 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-2)$  وهي :

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$x = 7 \text{ or } x = -3$$

أصفار الدالة هي : 2, 7, -3

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 5 \quad (6)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكرت للإشارات فإن للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm 1, \pm 5$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن  $\frac{5}{3}$  صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{5}{3} & 3 & -2 & -8 & 5 \\ & & 5 & 5 & -5 \\ \hline & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x - \frac{5}{3})$  وهي :

$$3x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- أصفار الدالة هي :  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{5}{3}$

$$f(x) = 4x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 13x - 12 \quad (8)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 4 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكرت للإشارات فإن للدالة صفر واحد حقيقي موجب وصفر حقيقي سالب.

- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \dots$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن -4 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 4 & 13 & -8 & 13 & -12 \\ & & -16 & 12 & -16 & 12 \\ \hline & 4 & -3 & 4 & -3 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x + 4)$  وهي :

$$4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x^2(4x-3) + (4x-3) = 0$$

$$(x^2+1)(4x-3) = 0$$

$$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\pm i$$

$$4x-3=0 \rightarrow 4x=3 \rightarrow x=\frac{3}{4}$$

- أصفار الدالة هي :  $\pm i, \frac{3}{4}, -4$

- اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي للدوال التالية :

$$f(x) = x^4 + 8x - 32 \quad (10)$$

- إذا كان  $\frac{p}{q}$  صفر نسبي فإن  $p$  احد عوامل العدد 32 و  $q$  احد عوامل العدد 1.

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$$

$$f(x) = 3x^6 - 4x^4 - x^2 - 35 \quad (12)$$

- إذا كان  $\frac{p}{q}$  صفر نسبي فإن  $p$  احد عوامل العدد 35 و  $q$  احد عوامل العدد 3.

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{7}{3}, \pm \frac{35}{3}$$

- (16) حجم الصندوق = الطول  $\times$  العرض  $\times$  الارتفاع :

$$V = x(28-2x)(28-2x)$$



$$= 784 - 56x - 56x + 4x^2(x)$$

$$= 4x^3 - 112x^2 + 84x$$

$$= x^3 - 28x^2 + 196x$$

$$x^3 - 28x^2 + 196x = 1152 \quad (b)$$

$$x^3 - 28x^2 + 196x - 1152 = 0$$

المعامل الرئيس = 1 ← الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل 1152 وهي :

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots$$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.

هناك تغييرين في إشارة المعاملات ← هناك صفرين حقيقيين موجبين.

باختبار الأصفار نجد أن العدد 2 صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

$$(c) \text{ بالتعويض عن } x=6cm$$

$$V = 6(28-12)(28-12)$$

$$= 1536cm^3$$

أوجد جميع أصفار كل من الدوال التالية :

$$f(x) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30 \quad (17)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإنه ليس للدالة أصفار حقيقية موجبة و 3 أصفار حقيقية سالبة.

• الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \dots$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن 2 - صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 10 & 31 & 30 \\ & & -2 & -16 & -30 \\ \hline & 1 & 8 & 15 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x+2)$  وهي :

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$x = -5 \text{ or } x = -3$$

أصفار الدالة هي : -2, -5, -3

$$f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 21x + 10 \quad (19)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 4 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإن للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفرين حقيقيين سالبين.

• الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \dots$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن  $\frac{1}{2}$  صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & 4 & 12 & -5 & -21 & 10 \\ & & 2 & 7 & 1 & -10 \\ \hline & 4 & 14 & 2 & -20 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x - \frac{1}{2})$  وهي :

$$4x^3 + 14x^2 + 2x - 20 = 0$$

أصفار الدالة هي : -2,  $-\frac{5}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 1

$$f(x) = 4x^3 + x^2 + 16x + 4 \quad (21)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإنه لا يوجد أصفار حقيقية موجبة للدالة و ٣ أصفار حقيقية سالبة.

• الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن  $-\frac{1}{4}$  صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{4} & 4 & 1 & 16 & 4 \\ & & -1 & 0 & -4 \\ \hline & 4 & 0 & 16 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x + \frac{1}{4})$  وهي :

$$4x^2 + 16 = 0$$

$$x = \pm 2i$$

- أصفار الدالة هي :  $\pm 2i, -\frac{1}{4}$

$$f(x) = 10x^3 - 17x^2 - 7x + 2 \quad (25)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإن للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفر حقيقي سالب.

• الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{10}, \pm \frac{2}{5} \dots$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن  $-\frac{1}{2}$  صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 10 & -17 & -7 & 2 \\ & & -5 & 11 & -2 \\ \hline & 10 & -22 & 4 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x + \frac{1}{2})$  وهي :

$$10x^2 - 22x + 4 = 0$$

$$\text{أصفار الدالة هي : } 2, \frac{1}{5}, \frac{-1}{2}$$

$$f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 \quad (27)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإن للدالة صفر حقيقي موجب وصفرين حقيقيين سالبين.

• الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3} \dots$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن  $\frac{1}{2}$  صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 6 & 11 & -3 & -2 \\ & & 3 & 7 & 2 \\ \hline & 6 & 14 & 4 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x - \frac{1}{2})$  وهي :

$$6x^2 + 14x + 4 = 0$$



أصفار الدالة هي :  $-2, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}$

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 8x + 28 \quad (29)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإن للدالة صفرين حقيقيين موجبين و صفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28, \dots$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن 2 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -7 & -8 & 28 \\ & & 4 & -6 & -28 \\ \hline & 2 & -3 & -14 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-2)$  وهي :

$$2x^2 - 3x - 14 = 0$$

$$x = -2 \text{ or } x = \frac{7}{2}$$

أصفار الدالة هي :  $-2, 2, \frac{7}{2}$

$$f(t) = t^4 - 31t^3 + 308t^2 - 1100t + 1200 \quad (34)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 4 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإن للدالة 4 أصفار حقيقية موجبة ولا يوجد أصفار سالبة.

- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \dots$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن 2 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -31 & 308 & -1100 & 1200 \\ & & 2 & -58 & 500 & -1200 \\ \hline & 1 & -29 & 250 & -600 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-2)$  وهي :

$$t^3 - 29t^2 + 250t - 600 = 0$$

أصفار الدالة هي :  $4, 15, 10, 2$

- هذه الاصفار تمثل الأوقات الأربعة التي تكون عندها الافعوانه عند مستوى الأرض.

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 \quad (36)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإن للدالة صفر حقيقي موجب و صفرين حقيقيين سالبين.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن -1 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 7 & 2 & -3 \\ & & -2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x+1)$  وهي :

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = -3 \text{ or } x = \frac{1}{2}$$

أصفار الدالة هي:  $-1, -3, \frac{1}{2}$  وبالمثل فإن أصفار الدالة  $g(x)$  هي  $1, 3, \frac{-1}{2}$

(a) التمثيل البياني خاص بالدالة  $g(x)$ .

(٣٩) إجابة نوب صحيحة.

(٤٤) البديل الصحيح (D) ١.

(٤٥) البديل الصحيح (C) ١.

## اختبار الفصل الثالث

بسط كلا مما يلي: (١)

$$\frac{\frac{2-i}{1+3i}}{\frac{1-3i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i}} = \frac{\frac{2-i}{1+3i}}{\frac{1-9i^2}{1-9i^2}} = \frac{\frac{2-i}{1+3i}}{\frac{1+9}{-7i-1}} = \frac{2-i}{10}$$

$$(2+3i)-(2-3i) \quad (٢)$$

$$= 2+3i-2+3i$$

$$= 6i$$

$$(7x-2)(2x+5) \quad (٥)$$

$$= 14x^2 + 35x - 4x - 10$$

$$= 14x^2 + 31x - 10$$

$$(4x^3 - x^2 + 5x - 4)(5x - 10) \quad (٧)$$

$$= 4x^3 - x^2 + 5x - 4 + 5x - 10$$

$$= 4x^3 - x^2 + 10x - 14$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 3 \quad -5 \quad -23 \quad 24} \\ \underline{3 \quad 9 \quad 12 \quad -33} \\ 3 \quad 4 \quad -11 \quad -9 \end{array} \quad (٩)$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 3 \quad -5 \quad -23 \quad 24} \\ \underline{3 \quad 9 \quad 12 \quad -33} \\ 3 \quad 4 \quad -11 \quad -9 \end{array}$$

• ناتج القسمة:

$$3x^2 + 4x - 11 - \frac{9}{x-3}$$

(١٢) كثيرة حدود أولية لا يمكن تحليلها.

(١٨) البديل الصحيح (B) ٢٧

$$\begin{array}{r} -5 \overline{) 2 \quad 15 \quad 22 \quad -15} \\ \underline{2 \quad -10 \quad -25 \quad 15} \\ 2 \quad 5 \quad -3 \quad 0 \end{array} \quad (١٩)$$

$$\begin{array}{r} -5 \overline{) 2 \quad 15 \quad 22 \quad -15} \\ \underline{2 \quad -10 \quad -25 \quad 15} \\ 2 \quad 5 \quad -3 \quad 0 \end{array}$$

• بتحليل ناتج القسمة:

$$2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$$

$$P(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1 \quad (٢١)$$

عند  $p(x)$  نجد تغير واحد في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ١.

عند  $p(-x)$  نجد تغير واحد في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ١.

عدد الأصفار التخيلية = ٤.

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad (٢٢)$$

• بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.



• بناء على قانون ديكارت للإشارات فإن للدالة صفر حقيقي سالب و صفرين حقيقيين موجبين.

• الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي هي احد عوامل العدد ٦ :

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن ١- صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x+1)$  وهي :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x=3 \text{ or } x=2$$

أصفار الدالة هي : -1, 3, 2

(٢٤) نفرض أن عرض الصندوق هو  $w$  فيكون طوله  $w-5$  وارتفاعه  $w+8$ .  
حجم الصندوق = الطول  $\times$  العرض  $\times$  الارتفاع :

$$612 = w(w+8)(w-5)$$

$$(8w+w^2)(w-5)=612$$

$$w^3 + 3w^2 - 40w - 612 = 0$$

المعامل الرئيس = ١ ← الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل ٦١٢ وهي :

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \dots$$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.

هناك ٣ تغيرات في إشارة المعاملات ← هناك ٣ أصفار حقيقية موجبة.

باختبار العدد ٩ نجد أنه صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

$$W=9cm, 8+w=17cm, w-5=4cm$$

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 12x + 8 \quad (٢٥)$$

إذا كان  $\frac{p}{q}$  صفر نسبي فإن  $p$  احد عوامل العدد 8 و  $q$  احد عوامل العدد 2.

$$q = \pm 1, \pm 2$$

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

## اختبار معياري تراكمي

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

١ - الحل: (B)  $3n^2 + 11n - 1$

٢ - الحل: (C) 6

٣ - الحل: (A) 2

٤ - الحل: (D)  $-\frac{4}{5}$

٥ - الحل: (D) ٣,٥ ملايين تقريبا

٦ - الحل: (C)  $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

٧ - الحل: (B) ٨١

٨ - الحل: (B)  $X = 2A$

٩ - الحل: مساحة الحديقة = الطول  $\times$  العرض

$$(12 + 2x)(25 + 2x) = 558$$

$$300 + 24x + 50x + 4x^2 - 558 = 0$$

$$4x^2 + 74x - 258 = 0$$

$$x = 3$$

or  $x = -21.5$  (إجابة مستبعدة لان العرض بعد والبعد موجب)

عرض الممر =  $3m$

$$64a^4 + ab^3 = a(64a^3 + b^3) \quad \text{١٠}$$

$$= a(4a^3 + b^3)$$

$$= a(4a + b)(16a^2 - 4ab + b^2) \quad \text{١١}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & -4 & -28 & -16 \\ & & -6 & 20 & 16 \\ \hline & 3 & -10 & -8 & 0 \end{array}$$

• بتحليل ناتج القسمة:

$$3x^2 - 10x - 8 = (3x + 2)(x - 4)$$

١٢ الحل:  $a = 7.5$

١٣ الحل: حجم المكعب =  $(15)^3 = 3375 \text{ in}^3$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$= \pi \times 4 \times 6 = 75 \text{ in}^3$$

يستعمل صالح العلبة:  $\frac{3375}{75} = 45$  مرة.

١٤ الحل:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < -2 \\ x + 1 & x > -1 \end{cases}$$



## الفصل الرابع

### العلاقات والدوال العكسية والجذرية

- ❖ العمليات على الدوال
- ❖ العلاقات والدوال العكسية
- ❖ دوال ومتباينات الجذر التربيعي
- ❖ الجذر النوني
- ❖ العمليات على العبارات الجذرية
- ❖ الأسس النسبية
- ❖ حل المعادلات والمتباينات الجذرية





## التهيئة للفصل الرابع

حلول اختبار  
سريع

$$(x^2 - 4x - 1) = 0$$

$$a=1, b=-4, c=1$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - (4 \times 1 \times 1)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 3.75 \text{ or } x = 0.25$$

الأعداد الصحيحة المتتالية التي تقع بينها الجذور بين ٠ و ١ وبين ٣ و ٤

$$\begin{array}{r} 5 \mid 5 \quad -22 \quad -15 \\ \quad 25 \quad 15 \\ \hline \quad 5 \quad 3 \quad 0 \end{array}$$

ناتج القسمة:  $5x + 3$

### 4-1 العمليات على الدوال

**تعلمت سابقاً:** قمت في الفصل السابق بإجراء العمليات الحسابية على كثيرات الحدود وهنا يمكنك إجراء العمليات الحسابية نفسها على الدوال.

#### العمليات على الدوال

- (١) عملية الجمع:  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- (٢) عملية الطرح:  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- (٣) عملية الضرب:  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- (٤) عملية القسمة:  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

**ملاحظة:** مجال جميع الدوال الناتجة عن جمع أو طرح أو ضرب دالتين هو تقاطع مجاليهما وكذلك في القسمة باستثناء القيم التي تجعل المقام صفراً.

### مثال

إذا كان  $g(x) = x + 4$  ,  $f(x) = x^2 - 7x + 2$  فلوجد ما يلي :

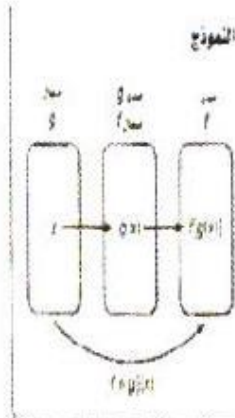
$$(f \cdot g)(x) = x^3 + 4x^2 - 7x^2 - 28x + 2x + 8$$

$$= x^3 - 3x^2 - 26x + 8$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 7x + 2}{x + 4}, \quad x \neq -4$$

**لاحظ عزيزي الطالب :** يمكن أن يكون تركيب دالتين

غير معرف ويكون  $(f \circ g)(x)$  معرف إذا كان  $g(x)$  مجموعة جزئية من مجال  $f(x)$ .



إذا كانت  $A$  و  $B$  دالتين وكان مجال  $B$  مجموعة جزئية من مجال  $A$  فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب  $A \circ B$  بالشكل:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

## مثال

أوجد  $(fg)(x)$ ,  $(gof)(x)$  لكل زوج من الدوال الآتية :

$$f(x) = \{(3, -2)(-1, -5)(4, 7)(10, 8)\}$$

$$g(x) = \{(4, 3)(2, -1)(9, 4)(3, 10)\}$$

$$(fg)(x) ; g(4) = 3 \rightarrow f(3) = -2$$

$$g(2) = -1 \rightarrow f(-1) = -5$$

$$g(9) = 4 \rightarrow f(4) = 7$$

$$g(3) = 10 \rightarrow f(10) = 8$$

$$(fg)(x) = \{(4, -2)(2, -5)(9, 7)(3, 8)\}$$

$(gof)(x)$  غير معرفة.

$$f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6$$

$$(fg)(x) = f(x-6)$$

$$F(x-6) = (x-6)^2 + 2$$

$$= x^2 - 12x + 36 + 2$$

$$= x^2 - 12x + 38$$

$$(gof)(x) = g(x^2 + 2)$$

$$g(x^2 + 2) = x^2 + 2 - 6$$

$$= x^2 - 4$$

**ملاحظة:** ليس من الضروري أن يكون  $(fg) = (gof)$  لذلك يجب أن تراعي ترتيب الدالتين عند تركيبهما.

## مثال

يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معا على جهاز كهربائي هم : خصم ٣٥ ريالاً وتخفيض نسبته ١٥% فإذا كان سعر الجهاز الأصلي ٣٠٠ ريال فأيهما يعطي سعراً أقل : تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده ؟

نفرض أن سعر الجهاز الأصلي هو  $x$ .

نفرض أن  $f(x)$  تمثل السعر بعد التخفيض  $f(x) = x - 0.15x$

نفرض أن  $g(x)$  تمثل السعر بعد الخصم  $g(x) = x - 35$

• إذا طبق التخفيض قبل الخصم فإن السعر النهائي للجهاز يمثل بـ :

$$(gof)(x) = g(300 - (0.15 \times 300))$$

$$= g(255)$$

$$g(255) = 255 - 35 = 220$$

السعر قبل الخصم = ٢٢٠ ريال.

• إذا طبق التخفيض بعد الخصم فإن السعر النهائي للجهاز يمثل بـ :

$$(fg)(x) = f(300 - 35)$$

$$= f(265)$$

$$F(265) = 265 - (0.15 \times 265)$$

$$= 265 - 39.75$$

$$= 225.25$$

السعر النهائي بعد الخصم = ٢٢٥,٢٥ ريال

إذا طبق التخفيض قبل الخصم فإن السعر النهائي سيكون أقل بـ ٥,٢٥ ريال.



أوجد  $(f+g)(x)$ ,  $(f-g)(x)$ ,  $(f.g)(x)$ ,  $(\frac{f}{g})(x)$  للدالتين فيمي يلي :

$$g(x) = 3x-1 \quad (1)$$

$$f(x) = x+2$$

$$(f+g)(x) = x+2+3x-1$$

$$= 4x+1$$

$$(f-g)(x) = x+2-3x+1$$

$$= -2x+3$$

$$(f.g)(x) = (x+2).(3x-1)$$

$$= 3x^2 + 5x - 2$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x+2}{3x-1}, x \neq \frac{1}{3}$$

أوجد  $(f+g)(x)$ ,  $(f-g)(x)$ ,  $(f.g)(x)$ ,  $(\frac{f}{g})(x)$  للدالتين فيمي يلي :

$$g(x) = -x+1 \quad (2)$$

$$f(x) = x^2$$

$$(f+g)(x) = x^2 - x + 1$$

$$(f-g)(x) = x^2 + x - 1$$

$$(f.g)(x) = x^2.(-x+1)$$

$$= -x^3 + x^2$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2}{-x+1}, x \neq 1$$

١١.  $a$  سرعته الكلية إذا كان مشي باتجاه سير الممر المتحرك :

$$(w+i)(x) = 4x+7+3x-4$$

$$= 7x-3$$

١٩.  $a$  الدالة التي تعبر عن ربح المصنع إذا باع  $x$  فئجان :

$$P(x) = r(x) - c(x)$$

$$= -6.5x - 0.75x - 1850$$

$$= 5.75x - 1850$$

$b$ . ربح المصنع عند :

$$P(500) = 5.75(500) - 1850 = 1025$$

$$P(1000) = 5.75(1000) - 1850 = 3900$$

$$P(5000) = 5.75(5000) - 1850 = 26900$$

$$(f-g)(x) = x^2 + x - 12 - x + 3 \quad (٢١)$$

$$= x^2 - 9$$

مجال الدالة مجموعة الاعداد الحقيقية.

$$2(f.g)(x) = 2(x^2 + x - 12)(x-3) \quad (٢٢)$$

$$= 2(x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 12x + 36)$$

$$= 2x^3 - 4x^2 - 30x + 72$$

مجال الدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية.

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x-3} \quad (٢٣)$$

$$= \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)} = (x-4)$$

المجال مجموعة الاعداد الحقيقية ما عدا {3}

$$h(f(-5)) \quad (٢٥)$$

$$F(-5) = 5(-5) = -25$$

$$\begin{aligned} H(-25) &= (-25)^2 + 6(-25) + 8 \\ &= 625 - 150 + 8 \\ &= 483 \end{aligned}$$

$$f(g(3a)) \quad (٢٧)$$

$$\begin{aligned} G(3a) &= -2(3a) + 1 \\ &= -6a + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(-6a+1) &= 5(-6a+1) \\ &= -30a+5 \end{aligned}$$

٣١. a. العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم :

$$7x + 6 - 5x + 5 = 2x + 11$$

b.  $(f-g)(x)$  تمثل الفرق بين عدد الرجال وعدد النساء الذين تم توظيفهم.

$$(f.g.h)(x) \quad (٢٢)$$

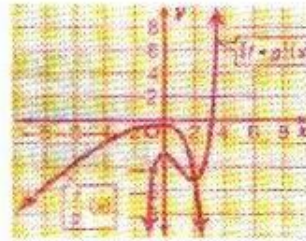
$$\begin{aligned} &(x+2)(-4x+3)(x^2-2x+1) \\ &= (-4x^2+3x-8x+6)(x^2-2x+1) \\ &= (-4x^2-5x+6)(x^2-2x+1) \\ &= -4x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 17x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f.g.h)(3) &= -4(81) + 3(27) + 12(9) - 17(3) + 6 \\ &= -180 \end{aligned}$$

a. ٣٨

| x | (f.g)(x) | f/g(x)   |
|---|----------|----------|
| 1 | -4       | -1       |
| 2 | -5       | -5       |
| 3 | 0        | غير معرف |
| 4 | 17       | 17       |
| 5 | 52       | 13       |

b.



c. عندما  $x=2$  فإن  $f(x)=g(x)$

وكذلك عندما  $x=4$  فإن  $f(x)=g(x)$

٤٠. اجابة ريم صحيحة لان العنود لم تقم بتعويض  $g(x)$  بدلا من  $x$  في الدالة  $f(x)$ .

٤٢. a. عبارة صحيحة دائما

٤٤. البديل الصحيح (B)  $k(x)=x^2+11x+29$  (٤٥) البديل الصحيح (c) 86



تذكر عزيزي الطالب:

العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة.  
العلاقة العكسية هي مجموعة أزواج مرتبة نحصل عليها عن طريق  
تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة بحيث يصبح مجال العلاقة هو  
المدى والمدى هو المجال.

### مفهوم

تكون كلا من العلاقتين عكسية لالأخرى  
إذا وفقط إذا احتوت أحدهما على أي  
زوج مرتب مثل  $(a, b)$  وتحتوي  
الأخرى على الزوج المرتب  $(b, a)$ .

### مثال

إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة  $\{(-8, -3), (-8, -6), (-3, -6)\}$  تمثل إحداثيات  
رؤوس المثلث قائم الزاوية فأوجد العلاقة العكسية لها وصف تمثيلها البياني؟  
العلاقة العكسية لها هي  $\{(-3, -8), (-6, -8), (-6, -3)\}$  وتمثيل المثلث المنعكس بيانيا  
سيكون ناتج عن انعكاس المثلث الأصلي حول المستقيم  $x=y$ .

**ملاحظة:** يرمز للدالة العكسية للدالة  $f(x)$  بالرمز  $f^{-1}(x)$ .  
• إذا كان كلا من  $f(x)$  ،  $f^{-1}(x)$  دالة عكسية للأخرى فإن  $f(a)=b$  إذا وفقط إذا كان  
 $f^{-1}(b)=a$ .

### مثال

أوجد معكوس الدالة التالية ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانيا على مستوى إحداثي واحد :

$$f(x) = \frac{x-3}{5}$$

- نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين  $x, y$  :  $y = \frac{x-3}{5}$
- نبذل بين كلا من  $x, y$  في المعادلة :  $x = \frac{y-3}{5}$
- نحل المعادلة بالنسبة للمتغير  $y$  :  $y-3 = 5x \leftarrow y = 5x+3$
- نضع  $f^{-1}(x) = 5x+3$  بدلا من المتغير  $y$  :  $f^{-1}(x) = 5x+3$
- التمثيل البياني لها هو انعكاس للدالة  $f(x)$  حول المستقيم  $x=y$ .

تكون كلا من الدالتين  $f, g$  دالة عكسية للأخرى إذا وفقط  
إذا كان تركيب كلا منهما يساوي الدالة المحايدة.  
أي أن : الدالتان  $f(x), g(x)$  تمثل كل منهما دالة عكسية  
لأخرى إذا وفقط إذا كان :  $(f \circ g) = (g \circ f) = x$

### مفهوم الدالة العكسية



## تكريرات وحلول

أوجد العلاقة العكسية للدوال للعلاقة التالية :

(1)  $\{(-9,10)(1,-3)(8,-5)\}$

العلاقة العكسية لها هي  $\{(10,-9)(-3,1)(-5,8)\}$

أوجد معكوس الدالة التالية ثم مثل الدالة ومكوسها بيانيا على مستوى إحداثي واحد :

(3)  $f(x) = -3x$

نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين  $x, y$  :

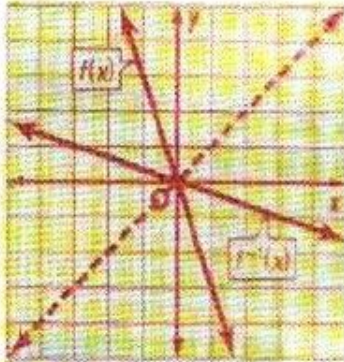
• نبدل بين كلا من  $x, y$  في المعادلة :  $x = -3y$

• نحل المعادلة بالنسبة للمتغير  $y$  :  $y = -\frac{1}{3}x$

• نضع  $f^{-1}(x)$  بدلا من المتغير  $y$  :  $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x$

$f^{-1}(x) =$

• التمثيل البياني لها هو :



(5)  $f(x) = x^2 - 3$

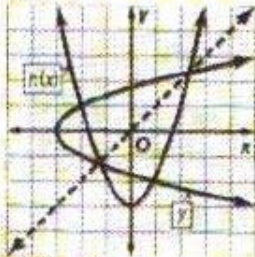
• نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين  $x, y$  :

• نبدل بين كلا من  $x, y$  في المعادلة :  $x = y^2 - 3$

• نحل المعادلة بالنسبة للمتغير  $y$  :  $y = \sqrt{x+3}$

• نضع  $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x+3}$  بدلا من المتغير  $y$  :

• التمثيل البياني لها هو :



حدد إذا كانت كل دالتين فيما يلي دالة عكسية للأخرى أم لا مع

التوضيح :

(7)  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, g(x) = 2x - \frac{4}{3}$

$(f \circ g)(x) = f(2x - \frac{4}{3})$

$= \frac{1}{2}(2x - \frac{4}{3}) + \frac{3}{4}$

$= x - \frac{4}{6} + \frac{3}{4}$

$= x - \frac{1}{12} \neq x$

لا تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

أوجد العلاقة العكسية للدوال للعلاقة التالية :

(9)  $\{(1,-5)(2,6)(3,-7)(4,8)(5,-9)\}$

العلاقة العكسية لها هي  $\{(-5,1)(6,2)(-7,3)(8,4)(-9,5)\}$

أوجد معكوس الدالة التالية ثم مثل الدالة ومكوسها بيانيا على

مستوى إحداثي واحد :

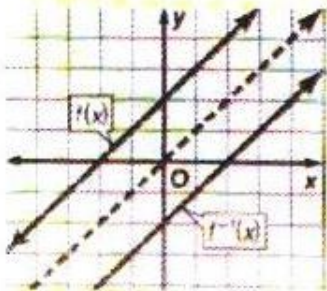
(11)  $f(x) = x+2$

• نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين  $x, y$  :

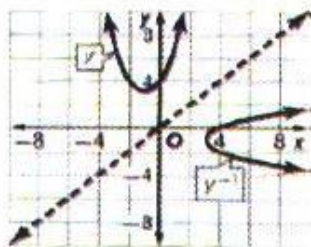
• نبدل بين كلا من  $x, y$  في المعادلة :  $x = y+2$

• نحل المعادلة بالنسبة للمتغير  $y$  :  $y = x-2$

• نضع  $f^{-1}(x) = x-2$  بدلا من المتغير  $y$  :







$$f(x) = (x+1)^2 + 3 \quad (19)$$

- نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين  $x, y$ :  $y = (x+1)^2 + 3$
- نبذل بين كلا من  $x, y$  في المعادلة:  $x = (y+1)^2 + 3$
- نحل المعادلة بالنسبة للمتغير  $y$ :  $y = \pm\sqrt{x-3} - 1$
- نضع  $f^{-1}(x)$  بدلا من المتغير  $y$ :  $\pm\sqrt{x-3} - 1$

$$f^{-1}(x) =$$

حدد إذا كانت كل دالتين فيما يلي دالة عكسية للأخرى أم لا مع التوضيح :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + 3, g(x) = -3x + 9 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(-3x + 9) \\ &= -\frac{1}{3}(-3x + 9) + 3 \\ &= x - 3 + 3 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\left(-\frac{1}{3}x + 3\right) \\ &= -3\left(-\frac{1}{3}x + 3\right) + 9 \\ &= x - 9 + 9 \\ &= x \end{aligned}$$

تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

$$f(x) = 2\sqrt{x-5}, g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(2\sqrt{x-5}) \\ &= \frac{1}{4}(2\sqrt{x-5})^2 - 5 \\ &= \frac{1}{4}(4(x-5)) - 5 \\ &= \frac{1}{4}(4x-20) - 5 \\ &= x - 5 - 5 \\ &= x - 10 \end{aligned}$$

لا تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

$$A = 36\text{cm}^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{36}{314}} \rightarrow r = 3.4\text{cm} \quad .b$$

$$F(x) = \frac{9}{5}x + 32 \quad .a \quad (32)$$

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

$$x = \frac{9}{5}y + 32$$

$$\frac{9}{5}y = x - 32$$

$$y = \frac{5}{9}(x - 32)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right) + 32 \\ &= x - 32 + 32 = x \end{aligned}$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x + 32 - 32\right) = x$$

كل من الدالتين تمثل دالة عكسية للأخرى.

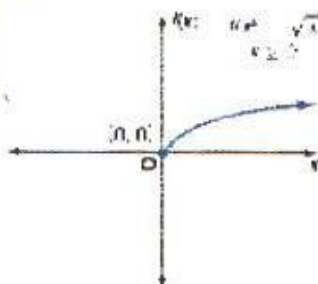
b. تستعمل قيم  $f^{-1}(x)$  للتحويل من درجة الحرارة الفهرنهايتية إلى درجة الحرارة السليزية.  
(٣٤) العبارة صحيحة أحيانا ومثال على ذلك الدالة معادلة الدائرة لا تمثل دالة ومعكوسها لا يمثل دالة.

$$f(x) = f^{-1}(x) = x \quad (٣٦)$$

$$g(x) = \frac{2x+5}{3} \quad (A) \quad (٣٩) \quad \text{البديل الصحيح هو } x^2 - 2x + 4 \quad (D) \quad (٣٨)$$

### 4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي

**لاحظ عزيزي الطالب:** إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير تسمى دالة الجذر التربيعي وهي نوع من أنواع الدالة الجذرية.



الدالة الرئيسية (اللام):  $f(x) = \sqrt{x}$

المجال:  $\{x | x \geq 0\}$

المدى:  $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

المقطع  $x$  والمقطع  $y$ :  $x = 0, f(x) = 0$

غير معرفة عندما:  $x < 0$

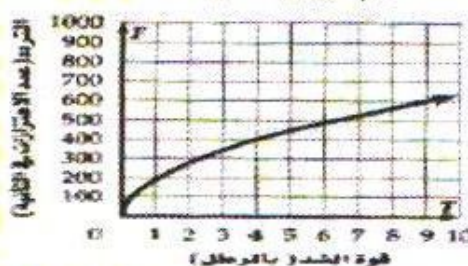
سلوك الدالة عند طرفيها:  $x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow 0$

$x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$

### مثال

يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة  $F = 200\sqrt{T}$  حيث تمثل  $F$  عدد الاهتزازات في الثانية  $T$  قوة الشد مقاسة بالرطل مثل هذه الدالة بيانيا في الفترة  $0 \leq T \leq 10$  ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشد ٣ أرطال.

$$F = 200\sqrt{T}$$



| $F$   | $T$ |
|-------|-----|
| 0     | 0   |
| 200   | 1   |
| 282.8 | 2   |
| 346.4 | 3   |

التردد عندما تكون قوة الشد ٣ أرطال = ٣٤٦,٤ اهتزازة / ثانية

### متباينة الجذر التربيعي

هي متباينة تحوي الجذر التربيعي ويمكن تمثيلها بيانيا تماما مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.



(٢) عين كلا من المجال والمدى للدالة :  $f(x) = \sqrt{x-5}$

$$x-5 \geq 0$$

$$x \geq 5$$

المجال  $\{x; x \geq 5\}$

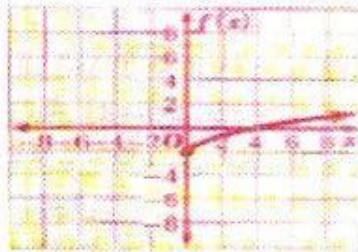
المدى  $\{f(x); f(x) \geq 0\}$

(٤) مثل بيانيا الدالة التالية وحدد مجالها ومداهما :  $f(x) = \sqrt{x} - 2$

• القيمة الصغرى للمجال عند  $h=0, k=-2$

• نعمل جنولا للقيم  $x$  حيث  $x \geq 0$

| $x$ | $y$   |
|-----|-------|
| 1   | -1    |
| 2   | -0.5  |
| 3   | -0.26 |
| 4   | 0     |



• قيمة  $a$  موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل

البياني للدالة  $f(x) = \sqrt{x}$  مع إزاحة بمقدار وحدتين إلى الأسفل.

• المجال  $\{x; x \geq 0\}$

• المدى  $\{f(x); f(x) \geq -2\}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1 \quad (6)$$

• القيمة الصغرى للمجال عند  $h=-4, k=-1$

• نعمل جنولا للقيم  $x$  حيث  $x \geq -4$

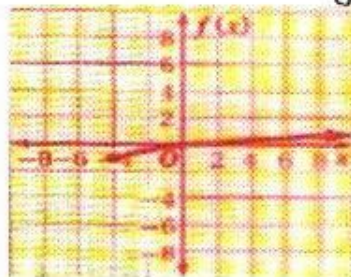
| $x$ | $y$   |
|-----|-------|
| -3  | -0.5  |
| -2  | -0.29 |
| -1  | -0.13 |
| 0   | 1     |
| 1   | 0.11  |
| 2   | 0.22  |

• قيمة  $a$  موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة  $f(x) = \sqrt{x}$  مع إزاحة

بمقدار وحدة إلى الأسفل و٤ وحدات يسارا.

• المجال  $\{x; x \geq -4\}$

• المدى  $\{f(x); f(x) \geq -1\}$



$$v = 356 \sqrt{d} \quad (8)$$

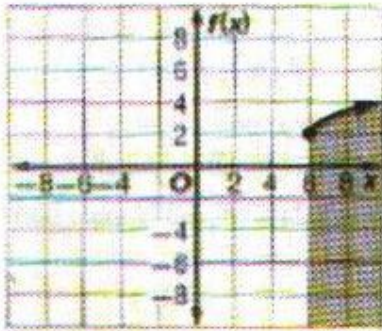
$$v = 145 \text{ km/h}$$

$$145 = 356 \sqrt{d}$$

$$\sqrt{d} = \frac{145}{356}$$

$$\sqrt{d} = 0.407$$

$$d = 0.17 \text{ km}$$

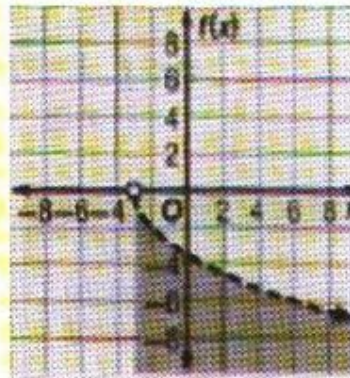


(١٠) مثل المتباينة التالية بيانياً :  $f(x) \leq \sqrt{x-6} + 2$

- تمثل المتباينة  $f(x) \leq \sqrt{x-6} + 2$
- تمثل الحد  $f(x) = \sqrt{x-6} + 2$
- المجال  $\{x; x \geq 6\}$
- قيمة  $y$  اقل من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد وضمن المجال.

$$f(x) < -2\sqrt{x+3} \quad (11)$$

- تمثل المتباينة  $f(x) < -2\sqrt{x+3}$
- تمثل الحد  $f(x) = -2\sqrt{x+3}$
- المجال  $\{x; x \geq -3\}$
- قيمة  $y$  اقل من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد وضمن المجال.
- التمثيل البياني لها :



(١٣) عين كلا من المجال والمدى للدالة :  $f(x) = -\sqrt{2x} + 2$

$$2x \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$\{x; x \geq 0\} \text{ المجال}$$

$$\{f(x); f(x) \leq 2\} \text{ المدى}$$

$$f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$$

(15)

$$x-2 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$\{x; x \geq 2\} \text{ المجال}$$

$$\{f(x); f(x) \geq -8\} \text{ المدى}$$

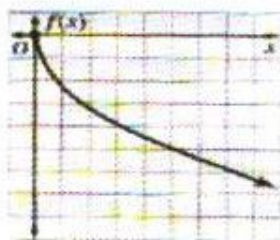
(١٧) مثل بيانياً الدالة التالية وحدد مجالها ومداه :  $f(x) = -\sqrt{5x}$

- القيمة الصغرى للمجال عند  $h=0, k=0$



• نعمل جدولاً للقيم  $x$  حيث  $x \geq 0$

| $x$ | $y$  |
|-----|------|
| 0   | 0    |
| 1   | -2.2 |
| 2   | -3.1 |
| 3   | -3.8 |



• قيمة  $a$  سالبة فالتمثيل البياني للدالة ينعكس حول المحور  $x$  بدون إزاحات.

• المجال  $\{x; x \geq 0\}$

• المدى  $\{f(x); f(x) \leq 0\}$

$$t = \sqrt{\frac{d}{16}}, \quad t \leq 11 \quad (٢٢)$$

$$121 = \frac{d}{16} \quad \leftarrow \quad t = 11s \quad \text{عند}$$

$$d = 121(16)$$

$$d = 1936 \text{ ft}$$

$$V = 90 \text{ ft/s} \quad a(٢٣)$$

$$v = 10 \text{ ft/s}$$

$$V = \sqrt{v^2 + 64h}$$

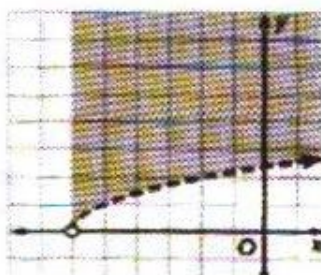
$$90 = \sqrt{100 + 64h}$$

$$90 = \sqrt{100 + 64h} \quad (a) \quad \text{بحل المعادلة في الفقرة}$$

$$8100 = 100 + 64h$$

$$8000 = 64h$$

$$h = 125 \text{ ft}$$



(٢٥) مثل المتباينة التالية بيانياً:  $y > \sqrt{x+6}$

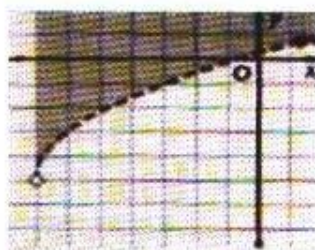
• نمثل المتباينة  $y > \sqrt{x+6}$

• نمثل الحد  $y = \sqrt{x+6}$

• المجال  $\{x; x \geq -6\}$

• قيمة  $y$  أكبر من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة

المظللة فوق الحد وضمن المجال.



$$y > 2\sqrt{x+7} - 5 \quad (27)$$

• نمثل المتباينة  $y > 2\sqrt{x+7} - 5$

• نمثل الحد  $y = 2\sqrt{x+7} - 5$

• المجال  $\{x; x \geq -7\}$

• قيمة  $y$  أكبر من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة فوق الحد وضمن

المجال.

(٣٧) الأعداد الفردية الموجبة.

$$y = \sqrt{x+2} + 4 \quad (٣٢)$$

(٤٠) البديل الصحيح هو  $(D) -8x^3$  (٤١) البديل الصحيح هو  $(D) III$  فقط.

## 4-4 الجذر النوني

**عزيزي الطالب:** لننتذكر سويا أن الجذر التربيعي هو عملية عكسية لتربيعة وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة ( $n$ ) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

### مفهوم

لأي عددين حقيقيين  $a, b$  ولأي عدد صحيح موجب  $n$ ، إذا كان  $a^n = b$  فإن  $a$  هو الجذر النوني للعدد  $b$ .

**لاحظ جيدا:** يشير الرمز  $\sqrt[n]{a}$  إلى الجذر النوني وبعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي وحينها عندما تكون  $n$  عدد زوجي فإن الجذر غير السالب يسمى الجذر الرئيس. لكن  $n$  عدداً صحيحاً أكبر من 1 و  $a$  عدداً حقيقياً.

| $a$     | $n$ عدد زوجي                                                                                     | $n$ عدد فردي                                                              |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $a > 0$ | هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد $\pm \sqrt[n]{a}$ ، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس. | هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب $\sqrt[n]{a}$ .        |
| $a < 0$ | ليس هناك جذور حقيقية                                                                             | ليس هناك جذور حقيقية موجبة، وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد $\sqrt[n]{a}$ . |
| $a = 0$ | هناك فقط جذر حقيقي $\sqrt[n]{0} = 0$                                                             | هناك فقط جذر حقيقي $\sqrt[n]{0} = 0$                                      |

### مثال

بسّط العبارة التالية:  $\sqrt[3]{8x^6}$   
 $= \sqrt[3]{(2x^2)^3} = 2x^2$   
 أي أن الجذر الثالث لـ  $8x^6$  هو  $2x^2$

**ملاحظة:** إذا كان دليل الجذر عدد زوجي واس ما تحت الجذر عدد زوجي وكان أس الناتج عدد فردي يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالباً.

### مثال

يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها باستعمال القانون  $s = \sqrt[3]{36\pi v^2}$  حيث  $v$  تمثل حجم الكرة، أوجد مساحة سطح كرة حجمها  $200 \text{ m}^3$ .

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt[3]{36\pi v^2} \\
 &= \sqrt[3]{36\pi (200)^2} \\
 &= \sqrt[3]{4523893.4} \\
 &= 165.3 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$



## تدريبات وحلول

(١) بسط كلا مما يلي :  $\pm \sqrt{100y^8}$

$$= \pm \sqrt{(10y^4)^2} = \pm 10y^4$$

$$(y-6)^8 \quad (٢)$$

$$= \sqrt{((y-6)^4)^2} = (y-6)^4$$

$$\sqrt[3]{-125} \quad (٥)$$

$$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{-5^3} = -5$$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى اقرب ثلاث منازل عشرية:

$$r = \sqrt[3]{v} \rightarrow v = 512 \text{ cm}^3 \quad (٢٥)$$

$$= \sqrt[3]{512}$$

$$= \sqrt[3]{8^3}$$

$$= 8 \text{ cm}$$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى اقرب ثلاث منازل عشرية:

$$\sqrt{196c^6d^4} \quad (٣١)$$

$$= \sqrt{(14c^3d^2)^2} = 14|c^3d^2|$$

$$33) \sqrt[4]{-16x^{16}y^8}$$

$$= \sqrt[4]{-(2x^4y^2)^4} = \pm 2ix^4y^2$$

$$d = \sqrt[3]{6t^2} \rightarrow t = 687 \quad (٣٥)$$

$$= \sqrt[3]{6(687)^2}$$

$$= 141.4$$

بعد كوكب المريخ عن الشمس ١٤١ ملون ميل تقريبا.

$$p = 73.3 \sqrt[4]{m^3} \quad (٣٦)$$

| متوسط الايض اليومي له                               | الحيوان  | الكتلة |
|-----------------------------------------------------|----------|--------|
| $p = 73.3 \sqrt[4]{(4.5)^3} = 226.5 \text{ cal}$    | النسر    | 4.5    |
| $p = 73.3 \sqrt[4]{(30)^3} = 939.6 \text{ cal}$     | الكلب    | 30     |
| $p = 73.3 \sqrt[4]{(72)^3} = 1811.8 \text{ cal}$    | التمساح  | 72     |
| $p = 73.3 \sqrt[4]{(156)^3} = 3235.5 \text{ cal}$   | الدولفين | 156    |
| $p = 73.3 \sqrt[4]{(2300)^3} = 24344.4 \text{ cal}$ | الفيل    | 2300   |

(٣٩) العدد ٦٤ جذره التربيعي ٨ وجذره التكعيبي ٤.

(٤٢) البديل الصحيح هو (B) 26

(٤٢) البديل الصحيح هو (B) 2.7

(١) الحل:

$$(f+g)(x) = 2x^2 + 4x - 3 + 5x - 2 \\ = 2x^2 + 9x - 5$$

(٣) الحل:

$$(f.g)(x) = (2x^2 + 4x - 3).(5x - 2) \\ = 10x^3 - 4x^2 + 20x^2 - 8x - 15x + 6 \\ = 10x^3 + 16x^2 - 23x + 6$$

(٥) الحل:

$$(f \circ g)(x) = f(5x - 2) \\ = 2(5x - 2)^2 + 4(5x - 2) - 3 \\ = 2(25x^2 - 20x + 4) + 20x - 8 - 3 \\ = 50x^2 - 40x + 8 + 20x - 11 \\ = 50x^2 - 20x - 3$$

(٧) الحل:

$p(x) = 0.75x$  تمثل المبلغ الإجمالي بعد خصم القسيمة  $A$   
نفرض أن  $p(x)$  تمثل المبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة  $g(x) = 1.06x$   
 $B \bullet$

$$(p \circ g)(x) = p(1.06x) \\ = 0.75(1.06x) \\ = 0.795x$$

$$(g \circ p)(x) = g(0.75x) \\ = 1.06(0.75x) \\ = 0.795x$$

$$(g \circ p)(x) = (p \circ g)(x)$$

كلتا الدالتين تمثل المبلغ النهائي.

(٩) الحل:

(١٢) الحل:

$$h(x) = \frac{2}{5}x + 8$$

$$y = \frac{2}{5}x + 8$$

$$x = \frac{2}{5}y + 8$$

$$x - 8 = \frac{2}{5}y$$

$$5x - 8 = 2y$$

$$y = \frac{5}{2}(x - 8)$$

(١٤) الحل:

$$h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$$

$$y = -\frac{10}{3}(x + 5)$$

$$x = -\frac{10}{3}(y + 5)$$

$$y + 5 = \frac{3}{10}x$$



$$y = \frac{3}{10}x - 5$$

(16) الحل:

$$f(h) = 15h + 25$$

$f^{-1}(h) = \frac{1}{15}h - \frac{5}{3}$  .a وهذه الدالة تمثل عدد ساعات العمل.

$$f(h) = 15(h) + 25 .b$$

$$85 = 15h + 25$$

$$15h = 60$$

$$h = 4$$

عدد ساعات عمل المؤسسة في الحديقة 4 ساعات

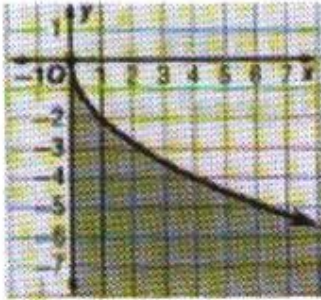
(18) الحل:

نمثل المتباينة  $y \leq -2\sqrt{x}$

• نمثل الحد  $y = -2\sqrt{x}$

• المجال  $\{x; x \geq 0\}$

• قيمة  $y$  أقل من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظلة تحت الحد وضمن المجال.



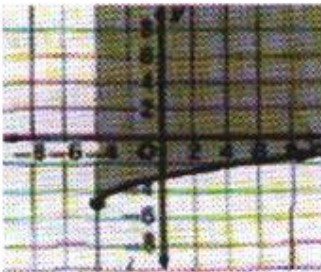
(20) الحل:

• نمثل المتباينة  $y \geq \sqrt{x+4} - 5$

• نمثل الحد  $y = \sqrt{x+4} - 5$

• المجال  $\{x; x \geq -4\}$

• قيمة  $y$  أكبر من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظلة فوق الحد وضمن المجال.



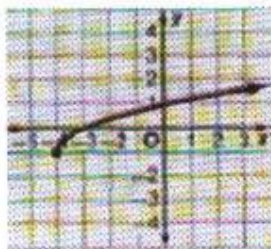
(22) الحل:

$$f(x) = \sqrt{x+4} - 1$$

• القيمة الصغرى للمجال عند  $h = -4, k = -1$

• نعمل جدولاً للقيم  $x$  حيث  $x \geq -4$

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| -2  | 0.4 |
| -1  | 0.7 |
| 0   | 1   |
| 1   | 1.2 |
| 2   | 1.4 |



• قيمة  $a$  موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة  $f(x) = \sqrt{x}$  مع إزاحة بمقدار 4 وحدات يساراً ووحدة واحدة إلى الأسفل.

• المجال  $\{x; x \geq -4\}$

• المدى  $\{f(x); f(x) \geq -1\}$

(24) الحل:

$$\sqrt{121a^4b^{18}} = \sqrt{(11a^2b^9)^2} = 11a^2|b^9|$$

(26) الحل:

$$\sqrt[3]{27(2x-5)^{15}} = \sqrt[3]{3((2x-5)^5)^3} = 3(2x-5)^5$$

(28) الحل:

$$\sqrt[3]{8(x+4)^6} = \sqrt[3]{2((x+4)^2)^3} = 2(x+4)^2$$

(30) الحل: البديل الصحيح (B) 5.42 in

(31) الحل:

$$\begin{aligned} c(p(h)) &= c(40h).a \\ c(40h) &= 5(40h) + 60 \\ &= 200h + 60 \\ h &= 8.b \end{aligned}$$

$$200(8) + 60 = 1600 + 60 = 1660 \text{ S.R}$$

## 4-5 العمليات على العبارات الجذرية

خاصية ضرب الجذور:

لأي عددين حقيقيين  $a, b$  ولأي عدد صحيح  $n$  حيث  $n > 1$  فإن:  
 $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  إذا كانت  $n$  عددا زوجيا وكان  $a, b$  عددين غير سالبين أو إذا كان  $n$  عددا فرديا.

**⚠ انتبه** تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة عندما لا يحتوي ما تحت الجذر عوامل هي قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

### مثال

$$\begin{aligned} \sqrt{12d^3c^{12}} &: \text{بسط ما يلي} \\ &= \sqrt{3 \cdot 4 \cdot d^2 \cdot d \cdot c^6 \cdot c^2} \\ &= 2dc^6\sqrt{3d} \end{aligned}$$

خاصية قسمة الجذور:

لأي عددين حقيقيين  $a, b$  حيث  $b \neq 0$  ولأي عدد صحيح  $n$  حيث  $n > 1$  فإن:  
 $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  إذا كانت جميع الجذور معرفة.

هو عملية تستعمل لازالة الجذور من المقام او الكسور تحت الجذر وذلك بضرب البسط والمقام في مقدار ثابت بحيث تكون جميع اسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر.

**انطاق المقام**



## تبسيط العبارات الجذرية

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية :

- \* إذا كان دليل الجذر  $n$  اصغر ما يمكن.
- \* إذا لم يتضمن ماتحت الجذر عوامل غير العدد ١ يمكن أن تكتب على صورة قوى ثنائية لعدد صحيح أو كثيرة حدود .
- \* إذا لم يتضمن ماتحت الجذر كسورا.
- \* إذا لم توجد جذور في المقام.

### مثال

$$\begin{aligned} & \text{بسط ما يلي : } 6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3} \\ & 6 \cdot 4 \sqrt{8c^3d^5 \cdot 2cd^3} \\ & = 6 \cdot 4 \sqrt{16c^4d^8} \\ & = 24 \sqrt{4^2c^2d^4} \\ & = 24 \cdot 4c^2d^4 \\ & = 96c^2d^4 \end{aligned}$$

**انتبه** الجذور المتشابهة لها الدليل نفسه وما تحت الجذر المقادير نفسها.

### مثال

$$\begin{aligned} & \text{بسط ما يلي : } 4\sqrt{8} + 3\sqrt{50} \\ & = 4\sqrt{2 \cdot 2^2} + 3\sqrt{2 \cdot 5^2} \\ & = 4 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} \\ & = 8\sqrt{2} + 15\sqrt{2} \\ & = 23\sqrt{2} \end{aligned}$$

**ملاحظة هامة:**

تنطبق خاصية التوزيع على ضرب الجذور.

**انتبه** حاصل ضرب عددين مرافقين هو عدد نسبي دائما.

### مثال

$$\begin{aligned} & \text{بسط ما يلي :} \\ & = \frac{1}{\sqrt{3}-4} \times \frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+4} \\ & = \frac{\sqrt{3}+4}{3-16} = \frac{\sqrt{3}+4}{-13} \end{aligned}$$

بسط كل عبارة جذرية مما يلي :

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{6^2 \cdot a \cdot (b^2)^2 \cdot (c^2)^2 \cdot c} \\
 &= 6b^2c^2\sqrt{ac} \\
 &= 5\sqrt{2x} \cdot 3\sqrt{8x} \cdot 5 \\
 &= 5 \cdot 3\sqrt{2x \cdot 8x} \\
 &= 15\sqrt{4^2 \cdot x^2} \\
 &= 15 \cdot 4 \cdot x \\
 &= 60x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(8\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(8\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \cdot 10 \\
 &= (8\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2 \\
 &= 64(3) - 4(2) \\
 &= 192 - 8 \\
 &= 184
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8}{\sqrt{6}-5} \times \frac{\sqrt{6}+5}{\sqrt{6}+5} \quad (12) \\
 &= \frac{8\sqrt{6}+40}{6-25} = \frac{-8\sqrt{6}-40}{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 &= \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4} \times \frac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}-4} \quad (14) \\
 &= \frac{6\sqrt{3}-24-3+4\sqrt{3}}{3-16} = \frac{-10\sqrt{3}+27}{13}
 \end{aligned}$$

(١٥) مساحة المثلث =  $\frac{1}{2} \times$  القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$189 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot (12 + \sqrt{3}) \cdot x$$

$$378 \cdot 8\sqrt{3} = (12 + \sqrt{3}) \cdot x$$

$$x = \frac{378+8\sqrt{3}}{12+\sqrt{3}} \times \frac{12-\sqrt{3}}{12-\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4536-378\sqrt{3}+96\sqrt{3}-24}{144-3} = \frac{4512-282\sqrt{3}}{141} \\
 &= 32 - 2\sqrt{3}cm
 \end{aligned}$$

بسط كل عبارة جذرية مما يلي :

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{3^2 \cdot a^2 \cdot (a^5) \cdot a \cdot (b^2) \cdot b} \\
 &= 3a^7b\sqrt{ab} \\
 &= (3\sqrt{5y} \cdot 8\sqrt{10y}) \cdot 22 \\
 &= 3 \cdot 8 \cdot 5y \sqrt{2} \\
 &= 120y\sqrt{2}
 \end{aligned}$$



(٢٦) مساحة المستطيل = العرض × الطول

$$\sqrt{6}(8 + \sqrt{3})$$

$$= 8\sqrt{6} + \sqrt{18}$$

المحيط = ٢ ( الطول + العرض )

$$= 2 (\sqrt{6} + 8 + \sqrt{3})$$

$$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 16$$

بسط كل عبارة جذرية مما يلي :

$$(7\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(4\sqrt{6} + 3\sqrt{12}) \quad (27)$$

$$= 28\sqrt{12} + 21\sqrt{24} - 12\sqrt{18} - 9\sqrt{36}$$

$$= 28 \cdot 2\sqrt{3} + 21 \cdot 2\sqrt{6} - 12 \cdot 3\sqrt{2} - 9 \cdot 6$$

$$= 56\sqrt{3} + 42\sqrt{6} - 36\sqrt{2} - 54) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \quad (30)$$

$$= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{5-3} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$$

$$= \sqrt{-54x^6y^{11}} \quad (33)$$

$$= -3x^2y^3\sqrt{2y^2}$$

$$= \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} \quad (37)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$$

$$d = \sqrt[3]{3w} \quad (٣٩)$$

$$w = 6.47$$

$$d = \sqrt[3]{3(6.47)} = \sqrt[3]{19.41} = 2.68$$

$$\sqrt[b]{a^{2b}} = a^2 \quad (٤٢) \quad \sqrt[b]{a^b} = |a| \quad (٤٠)$$

(٤٥) خالد إجابته صحيحة لأن ناصر أخطأ في إتمام عملية الضرب.

(٤٧) ٠ هي القيمة التي تجعل المعادلة صحيحة لأن  $\sqrt{a}$  يساوي عدد حقيقي عندما  $a \geq 0$

وكذلك  $\sqrt{-a}$  يساوي عدد حقيقي عندما  $a \leq 0$ .

(٤٩) إذا كان  $n$  عددا فرديا فهناك فقط جذر حقيقي واحد وبناء على ذلك فلا حاجة إلى استعمال

رمز القيمة المطلقة أما إذا كان  $n$  عددا زوجيا فإن

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|$$

(٥٠) البديل الصحيح (B)  $6\sqrt{5} \mid a|b^4$

خاصية العدد  $b^{\frac{1}{n}}$ :

لأي عدد حقيقي  $b$  ولأي عدد صحيح موجب  $n$  فإن  $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ .  
إلا إذا كانت  $b < 0$  و  $n$  عددا زوجيا فإن الجذر النوني قد يكون عددا مركبا.

### مثال

اكتب ما يلي على الصورة الجذرية:  $d^{\frac{7}{4}}$   
 $= \sqrt[4]{d^7}$

اكتب ما يلي على الصورة الأسية:  $\sqrt[3]{c^{-5}}$   
 $= c^{\frac{-5}{3}}$

الأسس النسبية:

يكون  $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$  لأي عدد حقيقي  $b$  لا يساوي صفر، ولأي عددين صحيحين  $x, y$  بحيث  $y > 1$  إلا إذا كانت  $b < 0$  و  $y$  عددا زوجيا فإن الجذر قد يكون عددا مركبا.

**انتبه** القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضا على الأسس النسبية السالبة.

### مثال

(1) بسط كل عبارة فيما يأتي:  $-3125^{\frac{-1}{5}}$   
 $= \frac{1}{-3125^{\frac{1}{5}}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{3125}} = -\frac{1}{5}$

(2)  $256^{\frac{3}{8}}$   
 $= \sqrt[8]{(256)^3} = \sqrt[8]{(2^8)^3} = 2^3 = 8$

**انتبه** عند تبسيط العبارة الجذرية حاول أن تجعل دليل الجذر اقل ما يمكن.

تكون العبارة التي تتضمن اسما نسبيا في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- \* جميع الأسس غير سالبة.
- \* جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- \* لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرا.
- \* دليل الجذر / الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

**تبسيط  
عبارات  
الأسس  
النسبية**



## تكريرات وحلول

اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية والعبارة الجذرية على الصورة الأسية فيما يأتي  
أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي :

$$343^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

$$= \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{(7)^3} = 7$$

$$125^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

$$= \sqrt[3]{(125)^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = 5^2 = 25$$

$$(x)^{\frac{4}{5}} \quad (1)$$

بسط كل عبارة فيما يأتي :

$$= x^{\frac{4}{5} - \frac{1}{5}} = x^{\frac{3}{5}}$$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي :

$$27^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

$$= \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{(3)^3} = 3$$

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

$$a) r = \left(\frac{3(413)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1239}{12.5}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{99.12} = 4.62in$$

$$b) r = \left(\frac{3(455)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1365}{12.5}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{109.2} = 4.77in$$

$$y^{\frac{-4}{5}} \quad (26)$$

بسط كل عبارة فيما يأتي :

$$A = \pi r^2 \quad (31)$$

$$= \pi (3x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{5}} \cdot z^2)^2$$

$$= 28,26 x^{\frac{4}{3}} \cdot y^{\frac{2}{5}} \cdot z^4$$

$$a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}} \quad (33)$$

بسط كل عبارة فيما يأتي :

$$= a^{\frac{12}{4}} = a^3$$

$$D = 100(2)^{\frac{t}{2}} \quad (37)$$

$$a) D = 100(2)^{\frac{4.5}{2}}$$

$$= 100(2)^{2.25}$$

$$= 100(4.75) = 475$$

عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف = ٤٧٥ غزال تقريبا.

(b)

| السنة | عدد الغزلان |
|-------|-------------|
| 0     | 100         |
| 1     | 141         |
| 2     | 200         |
| 3     | 282         |
| 4     | 400         |
| 5     | 565         |





## مثال

حل المعادلة التالية :  $(3n + 2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$

$$(3n + 2)^{\frac{1}{3}} = -1$$

$$((3n + 2)^{\frac{1}{3}})^3 = (-1)^3$$

$$3n + 2 = -1$$

$$3n = -1 - 2$$

$$3n = -3$$

$$n = -1$$

ما هي المتباينة الجذرية: هي متباينة تحوي متغيرا في الصورة الجذرية.

- (١) إذا كان دليل الجذر عددا زوجيا نعين قيم المتغير التي لا تجعل ماتحت الجذر سالبا.
- (٢) نحل المتباينة جبريا.
- (٣) نختبر القيم للتأكد من صحة الحل.

## خطوات حل المتباينة الجذرية

## مثال

حل المتباينة التالية :  $\sqrt{2x + 2} + 1 \geq 5$

$$2x + 2 \geq 0$$

$$2x \geq -2$$

$$x \geq -1$$

$$\sqrt{2x + 2} \geq 4$$

$$2x + 2 \geq 16$$

$$2x \geq 14$$

$$x \geq 7 \text{ (وهو حل المتباينة)}$$

حل كل معادلة مما يأتي :

$$\sqrt{x-4} + 6 = 10 \quad (1)$$

$$4 = \sqrt{x-4}$$

$$16 = x-4$$

$$20 = x$$

$$8 - \sqrt{x+12} = 3 \quad (3)$$

$$8-3 = \sqrt{x+12}$$

$$25 = x+12$$

$$13 = x$$

$$5 + \sqrt{4y-5} = 12 \quad (9)$$

$$7 = \sqrt{4y-5}$$

$$49 = 4y-5$$

$$54 = 4y$$

$$y = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (11)$$

$$a) T = 2\pi \sqrt{\frac{73}{32}} = 2\pi(1.5) = 9.4S$$

$$b) 20 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{32}}$$

$$\frac{20}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{32}}$$

$$\sqrt{\frac{l}{32}} = 3.18$$

$$\frac{l}{32} = 10.11$$

$$L = 323.5 \text{ ft}$$

حل كل متباينة مما يأتي :

$$1 + \sqrt{7x-3} > 3 \quad (17)$$

$$7x-3 \geq 0$$

$$7x \geq 3$$

$$x \geq \frac{3}{7}$$

$$1 + \sqrt{7x-3} > 3$$

$$7x-3 > 4$$

$$7x > 7$$

$$x > 1 \text{ (وهو حل المتباينة)}$$



$$-2 + \sqrt{9 - 5x} \geq 6(19)$$

$$9 - 5x \geq 64$$

$$-55 \geq 5x$$

$$x \geq -11 \text{ (وهو حل المتباينة)}$$

حل كل معادلة مما يأتي :

$$\sqrt{x - 15} = 3 - \sqrt{x} (23)$$

لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

$$t = \frac{1}{4} \sqrt{d - h} (27)$$

$$t = \frac{1}{4} \sqrt{65 - h}$$

$$8 = \sqrt{65 - h}$$

$$64 = 65 - h$$

$$h = 1m$$

حل كل معادلة مما يأتي :

$$(6q + 1)^{\frac{1}{4}} + 2 = 5 (29)$$

$$6q + 1 = 81$$

$$6q = 80$$

$$q = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$$

$$3(x + 5)^{\frac{1}{3}} - 6 = 0 (31)$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

$$\frac{1}{7} (14a)^{\frac{1}{3}} = 1 (33)$$

$$14a = 343$$

$$a = 24.5$$

حل كل متباينة مما يأتي :

$$\sqrt{2x + 14} - 6 \geq 4 (35)$$

$$2x + 14 \geq 100$$

$$2x \geq 86$$

$$x \geq 43 \text{ (وهو حل المتباينة)}$$

$$6 + \sqrt{3y + 4} < 6 (37)$$

لا يوجد حل حقيقي للمتباينة

$$\sqrt{2y + 5} + 3 \leq 6 (39)$$

$$2y + 5 \geq 0$$

$$2y \geq -5$$

$$y \geq -\frac{5}{2}$$

$$\sqrt{2y + 5} \leq 3$$

$$2y + 5 \leq 9$$

$$2y \leq 4$$

$$y \leq 2$$

$$\text{حل المتباينة: } 2 \geq x \geq -\frac{5}{2}$$

$$-3 + \sqrt{6a+1} > 4 \quad (41)$$

$$\sqrt{6a+1} > 7$$

$$6a+1 > 49$$

$$6a > 48$$

$$a > 8 \text{ (وهو حل المتباينة)}$$

$$s = 2\pi \sqrt{\frac{l}{32}} \quad (43)$$

$$1.5 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{32}}$$

$$0.24 = \sqrt{\frac{l}{32}}$$

$$\frac{l}{32} = 0.057$$

$$L = 1.8 \text{ ft}$$

$$L = 0.46 \sqrt[3]{M} \quad (44)$$

$$\left(\frac{L}{0.46}\right)^3 = (\sqrt[3]{M})^3$$

$$M = \left(\frac{L}{0.46}\right)^3$$

(٤٧) نعم لان  $\sqrt[4]{X+5} \geq 0$  فالطرف الأيسر للمعادلة غير سالب لذا فانه لن يساوي ٤ - وبذلك ليس للمعادلة حل حقيقي.

(٥٥) محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه.

$$x = \text{طول الضلع الثالث}$$

$$x + 20 + 20 = 56$$

$$x = 56 - 40$$

$$x = 16 \text{ in}$$

(٥٦) البديل الصحيح (A) 4



## اختبار الفصل الرابع

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 5, g(x) = 3x - 15 \quad (2)$$

$$(fg)(x) = f(3x - 15)$$

$$= \frac{1}{3}(3x - 15) + 5$$

$$= x - 5 + 5$$

$$= x$$

$$(gf)(x) = g\left(\frac{1}{3}x + 5\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}x + 5\right) - 15$$

$$= x + 15 - 15$$

$$= x$$

تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

$$f(x) = \frac{x-2}{3}, g(x) = 3x-2 \quad (4)$$

$$(fg)(x) = f(3x - 2)$$

$$= \frac{3x-2-2}{3}$$

$$= \frac{3x-4}{3} \neq x$$

لا تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

○ البديل الصحيح

$$y \leq \sqrt{x+4} \quad (B)$$

$$(f+g)(x) = 3x+2+x^2-2x+1 \quad (6)$$

$$= x^2+x+3$$

$$(f-g)(x) = 3x+2-x^2+2x-1 \quad (8)$$

$$= -x^2+5x+1$$

$$\sqrt{5a-4} = \sqrt{a+12} \quad (10)$$

$$5a-4 = a+12$$

$$5a-a = 4+12$$

$$4a = 16$$

$$a = 4$$

$$4\sqrt[4]{3x+1} - 8 = 0 \quad (12)$$

$$4\sqrt[4]{3x+1} = 8$$

$$\sqrt[4]{3x+1} = 2$$

$$3x+1 = 16$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

$$\sqrt{x-6} - \sqrt{x} = 3 \quad (15)$$

لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

١٦ البديل الصحيح (C)  $\frac{1}{5}$

$$(2+\sqrt{5}) \cdot (6-3\sqrt{5}) \quad (17)$$

$$(2+\sqrt{5}) \cdot 3(2-\sqrt{5})$$

$$= (4-5)(3) = -3$$

$$= \frac{12}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \quad (19)$$

$$= \frac{12\sqrt{3}+24}{4-3} = 12\sqrt{3} + 24$$

$$= \sqrt[6]{729a^9b^{24}} \quad (23)$$

$$= \sqrt[6]{(3ab^4)^6 \cdot a} = 3ab^4\sqrt{a}$$

$$w^{-\frac{4}{5}} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{w^{\frac{4}{5}}} \cdot \frac{w^{\frac{1}{5}}}{w^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{w}$$

$$\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{6a^{\frac{11}{12}}}} \quad (27)$$

$$= \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{6a^{\frac{11}{12}}}} \cdot \frac{a^{\frac{11}{12}}}{a^{\frac{11}{12}}} = \frac{5}{6a}$$

٢٩) البديل الصحيح (A)  $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$  وحدة مربعة.

$$\sqrt{4x-3} < 5 \quad (30)$$

$$4x-3 < 25$$

$$4x < 28$$

$$x < 7$$

$$4x-3 \geq 0$$

$$4x \geq 3$$

$$x \geq \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{y-7} + 5 \geq 10 \quad (34)$$

$$y-7 \geq 0$$

$$y \geq 7$$

$$\sqrt{y-7} \geq 5$$

$$y-7 \geq 25$$

$$y \geq 32 \text{ (وهو حل المتباينة)}$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad (٣٦)$$

$$= \frac{1}{2}(5+10+7)$$

$$= \frac{1}{2}(22) = 11$$

$$A = \sqrt{11(11-10)(11-5)(11-7)}$$

$$= \sqrt{11(1)(6)(4)}$$

$$= \sqrt{246}$$

$$= \sqrt{66(4)}$$

$$= 2\sqrt{66}m^2$$



## اختبار معياري تراكمي

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

١ - الحل: (B)  $p(d) = (0.8 \times d) - 5$

٢ - الحل: (A)  $-1$

٣ - الحل: (B)  $4a^2 - a + 6$

٤ - الحل: (H)  $64000$

٥ - الحل: (B)  $-3b^2c^4$

٦ - الحل: (J)  $f(x) = \sqrt{x-1} - 3$

٧ - الحل: (C)  $200$

٨ - الحل: (A)  $f(x) = x + 5$

٩ - الحل: (A) فقط I

١٠ - المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى  $\{f(x); f(x) \geq 0\}$

١٢ - a  $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3(8580)}{12.56}} = \sqrt[3]{2049.4} = 12.7 \text{ in}$

b  $r^3 = \frac{3v}{4\pi}$

$4\pi r^3 = 3v$

$v = \frac{4\pi r^3}{3}$

13 - a  $x + y = 56$   $x - 2y = 20$

b  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \end{bmatrix}$

c  $-\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 44 \end{bmatrix}$

عمر الأب ٤٤ عاماً وعمر الابن ١٢ عاماً.

سنقدم لك في الصفحات القليلة القادمة ملخصاً لأهم القوانين والقواعد التي احتوى عليها هذا الكتاب لتكون مرجعاً مفيداً لك ترجع إليه عند حاجتك إليه خاصة عند قراءتك للامتحانات فستجد هنا أهم ما يلزمك دراسته ومراجعته متمنين لك النجاح والتوفيق بإذن الله.

**انتبه** إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد أما إشارة النظير الضربي لعدد فهي نفسها إشارة العدد.

### الدالة المتباينة:

كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى أي أنه لا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.

### أنواع العلاقات:

٣) علاقة منفصلة: وهي التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط المنفردة وتمثل بيانياً بنقاط غير متصلة.

٤) علاقة متصلة: وهي التي يكون فيها المجال مجموعة من العناصر الغير منتهية وتمثل بيانياً بمنحني أو منحنى متصل.

**ما هو المتغير:** المتغير إما تابع أو مستقل أما المستقل فهو في الغالب ما يكون  $(X)$  وأما التابع في الغالب ما يكون  $(Y)$  وقيمته تعتمد على قيمة  $(X)$ .

**الدالة المتعددة التعريف:** هي الدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر.

### كيف نمثلها بيانياً؟

نضع دائرة صغيرة مظللة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني ونضع دائرة غير مظللة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

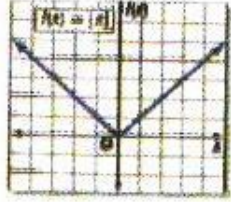
### الدالة الدرجية:

هي نوع من أنواع الدالة المتعددة التعريف الخطية وهي تتكون من قطع مستقيمة أفقية ومن أمثلتها دالة أكبر عدد صحيح.

### دالة القيمة المطلقة:

هي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

**مشهور أساسي**



**دالة القيمة المطلقة الأساسية**

الدالة الرئيسية (الأم)

$$f(x) = |x|$$

وعُرف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

على شكل حرف V

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

المقطعان:  $x = 0, f(x) = 0$

ولا يمكن أن تكون  $f(x) < 0$

### خطوات تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانياً:

١. تمثل معادلة القيمة المطلقة المرتبطة بالمتباينة.
٢. نحدد إذا كان المستقيم الذي يمثل حد المتباينة متقطع أو متصل.
٣. نحدد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

{ 154 }



**انتبه \*** يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين في أي نقطة وبالتالي لا يوجد حل للنظام في هذه الحالة وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية التي يرمز لها بالرمز  $\emptyset$  أو  $\{ \}$

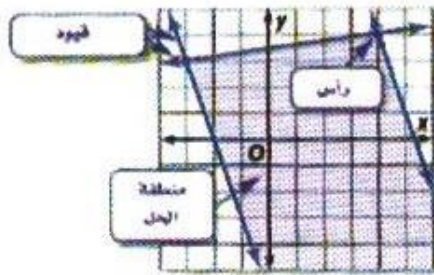
- إذا احتوت المتباينة على رمز  $<$ ،  $>$  فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل ويمثل الحد بمستقيم منقطع، أما إذا احتوت على رمز  $\leq$ ،  $\geq$  فإن الحد يدخل ضمن إطار الحل ويمثل الحد بمستقيم متصل .

- ينتج في كثير من الأحيان من تمثيل نظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع يمكننا إيجاد إحداثيات رؤوسه بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للشكل المضلع.

### البرمجة الخطية :

هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية وذلك بتمثيل نظام المتباينات بيانيا وتوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ذات الصلة دائما عند أحد رؤوس منطقة الحل.

### منطقة الحل:



تكون منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك غير محدودة ويمكن أن تحتوي قيمة عظمى أو قيمة صغرى .



تكون منطقة الحل محدودة أو محصورة بقيود، وتظهر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة عادة عند رؤوس منطقة الحل.

**انتبه** إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقي غير مغلقة فإن النظام غير محدود وهنا نختبر قيمة الدالة عند كل رأس لنحدد إذا كان هناك قيم عظمى أو صغرى.

### إيجاد الحل الأمثل:

هو عملية البحث عن السعر أو الكمية الأفضل لتقليل التكلفة أو زيادة الربح ويمكن الحصول عليه باستعمال البرمجة الخطية.

### خطوات إيجاد الحل الأمثل باستعمال البرمجة الخطية:

- (١) نحدد المتغيرات
- (٢) نكتب نظام المتباينات الخطية الذي مثل المسألة.
- (٣) نمثل نظام المتباينات بيانيا.
- (٤) نوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
- (٥) نكتب الدالة الخطية التي نريد إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لها.
- (٦) نعوض عن إحداثيات الرؤوس في الدالة.
- (٧) نختار القيمة العظمى أو الصغرى حسب ما هو مطلوب في الدالة.



### ما هي المصفوفة؟

هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين وتسمى كل قيمة في المصفوفة عنصرا ورمز للمصفوفة باستعمال الحروف الكبيرة.

### كيف نحدد نوع المصفوفة:

نحدد نوع المصفوفة برتبته فالمصفوفة المكونة من  $m$  صفا و  $n$  عمودا يقال عنها مصفوفة من الرتبة  $m \times n$

### لاحظ عزيزي الطالب/

- نقول عن مصفوفتين أنهما متساويتين إذا كانتا من الرتبة نفسها وتساوت عناصرهما المتناظرة.
- هناك مصفوفات لها تسميات خاصة تعرف عليها فيما يلي :

| الاسم        | الوصف                        | مثال                                            |
|--------------|------------------------------|-------------------------------------------------|
| مصفوفة صف    | تحتوي صف واحد                | $[1 \quad -5]$                                  |
| مصفوفة عمود  | تحتوي عمود واحد              | $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$          |
| مصفوفة مربعة | عدد الأعمدة يساوي عدد الصفوف | $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ |
| مصفوفة صفرية | جميع عناصرها أصفار           | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  |

- يمكننا جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وإذا فقط كان لهما الرتبة نفسها.

التعبير التلخيصي: إذا كانت  $A, B$  مصفوفتين من الرتبة  $m \times n$  فإن  $A + B$  هي مصفوفة أيضا من الرتبة

$m \times n$  ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في  $A$  و  $B$  وكذلك

$A - B$  هي مصفوفة من الرتبة  $m \times n$  أيضا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

$$\begin{aligned} A + B &= A + B & \text{الرموز} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \\ -A - B &= A - B \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3+(-2) & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix} & \text{مثال} \end{aligned}$$

### \* خصائص جمع المصفوفات :

لأي ثلاث مصفوفات  $A, B, C$  لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت  $K$  فإن الخصائص التالية صحيحة:

- (4) الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات  $(A+B=B+A)$
- (5) الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات  $((A+B)+C=A+(B+C))$
- (6) خاصية التوزيع للضرب في عدد  $(K(A+B)=KA+KB)$

**انتبه \*** يمكننا ضرب مصفوفتين إذا وإذا فقط كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى

يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية.

\* عند ضرب مصفوفة  $A$  من الرتبة  $m \times r$  بالمصفوفة  $B$  ذات الرتبة  $r \times t$  فإن الناتج هو المصفوفة  $AB$  ذات الرتبة  $m \times t$

### \* خصائص ضرب المصفوفات :

لأي ثلاث مصفوفات  $A, B, C$  ولأي عدد ثابت  $K$  فإن الخصائص التالية صحيحة على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أ منها معرفا:

- (1) خاصية التجميع لضرب المصفوفات  $(AB)C = A(BC)$
- (2) خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد  $K(AB) = (KA)B = A(KB)$



(٣) خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات  $(C(A+B) = CA + CB)$

(٤) خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات  $(A+B)C = AC + BC$

### مفهوم المحددة :

قيمة محددة الدرجة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

### انتبه :

\* كل مصفوفة مربعة لها محددة.

\* نغني بمحددات الدرجة الثالثة محددات المصفوفات التي من النوع  $3 \times 3$  ويمكننا حساب محددات هذا النوع من المصفوفات عن طريق قاعدة الأقطار.

### قاعدة الأقطار :

(١) نعيد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحددة

(٢) نوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات ثم نجمع.

(٣) نوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات ثم نجمع

(٤) قيمة المحددة = ناتج الخطوة ٣ - ناتج الخطوة ٢

### مصفوفة المعاملات :

هي المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام.

### لاحظ عزيزي الطالب :

إذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرا فإن للنظام حلا وحيدا وإذا كانت قيمة المحددة صفرا فإما أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول أو لا حل له.

### استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات :

هي طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية بحيث :

$$ax + by + c = m$$

$$fx + gy + hz = n \quad \text{حيث :}$$

$$jx + ky + lz = p$$

$$C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

فإن حل النظام هو :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & l \end{vmatrix}}{|C|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & l \end{vmatrix}}{|C|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

بحيث تكون  $|C| \neq 0$

### تذكر عزيزي الطالب :

أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلا منهما نظيرا ضربيا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب.

### مصفوفة الوحدة :

هي مصفوفة مربعة بحيث إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

**تنبيه** إذا كانت المصفوفتان  $A, B$  مربعيتين ولهما الرتبة نفسها وكان  $AB = BA = I$  فإن المصفوفة  $B$  تسمى نظيرا ضربيا للمصفوفة  $A$  وكذلك تسمى المصفوفة  $A$  نظيرا ضربيا للمصفوفة  $B$  وإذا كان للمصفوفة  $A$  نظير ضربى فإنه يرمز إليه بالرمز  $A^{-1}$  حيث :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

**النظير الضربى لمصفوفة :**

هناك مصفوفات ليس لها نظير ضربى ونستطيع تحديد إذا كان لمصفوفة ما نظير ضربى أم لا باستعمال المحددات وذلك عن طريق الآتي :

النظير الضربى للمصفوفة  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ حيث } ad-bc \neq 0$$

**لاحظ عزيزى الطالب/**

- أن  $ad - bc$  هي قيمة محددة  $A$  لذا فإذا كانت قيمة محددة مصفوفة ما تساوي صفرا فليس للمصفوفة نظير ضربى.
- يمكن استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من معادلات وحله إذا كان لمصفوفة المعاملات نظير ضربى.
- إذا لم يكن لمصفوفة المعاملات نظير ضربى فإن النظام ليس له حل أو له عدد لانهاى من الحلول.

**الوحدة التخيلية :**

الجزء التربيعى الأساسى للعدد  $-1$  أي  $i = \sqrt{-1}$

**الأعداد التخيلية البحتة :**

هي جنور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة لأي عدد حقيقى موجب مثل  $b$  فإن :

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$$

**تنبيه** الأعداد التخيلية البحتة تحقق خاصيتي التجميع والإبدال على عملية الضرب.

**بعض قوى (i) :**

|           |            |            |           |
|-----------|------------|------------|-----------|
| $i^1 = i$ | $i^2 = -1$ | $i^3 = -i$ | $i^4 = 1$ |
| $i^5 = i$ | $i^6 = -1$ | $i^7 = -i$ | $i^8 = 1$ |

**ما هو العدد المركب ؟**

هو عدد مكون من جزأين أحدهما حقيقى والآخر تخيلي ويمكن كتابته على الصورة :

$$a + bi$$

حيث  $a, b$  عدنان حقيقيان ،  $i$  عدد تخيلي

**ملاحظات هامة :**

- $b = 0$  ← العدد المركب عدد حقيقى
- $b \neq 0$  ← العدد المركب عدد تخيلي
- $a = 0$  ← العدد المركب عدد تخيلي بحت

**متى يتساوى عدنان مركبان ؟**

إذا فقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين والجزأين التخيليين. أي :

$$a + bi = c + di \text{ عندما } a = c, b = d$$



**⚠️ انتبه** عند جمع الأعداد المركبة وطرحها فإننا نجمع الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء التخيلية معا.

**ما هما العددان المترافقان ؟**

يسمى العددان  $a + bi$  ،  $a - bi$  عدداً مترافقان مركبان ناتج ضربهما عدد حقيقي دائماً **القانون العام لحل المعادلات التربيعية :**

يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة :

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a \neq 0$$

باستعمال القانون :

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**لاحظ عزيزي الطالب/**

- يكون للمعادلة جذر نسبي واحد عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام يساوي صفر.
- يمكنك عزيزي الطالب التعبير عن الجذور التربيعية الغير نسبية بكتابتها على الصورة الجذرية.
- إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عدد سالب فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

**مفهوم المميز:**

تسمى العبارة تحت الجذر  $b^2 - 4ac$  بالمميز وتستعمل لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية ونوعها وللتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون العام.

**تذكر عزيزي الطالب/**

- نعني بعملية تبسيط عبارات تتضمن قوى إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.
- الأسس السالبة هي طريقة للتعبير عن النظير الضربي لعدد ما.

**وحيدة الحد:**

هي عدد أو متغير أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو أكثر وأسسها أعداد صحيحة غير سالبة.

**متى تكون وحيدة الحد في أبسط صورة ؟**

- (1) عندما لا تتضمن قوى القوة.
- (2) عندما يظهر كل أساس مرة واحدة فقط.
- (3) عندما تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- (4) عندما لا تتضمن أسس سالبة.

**درجة كثيرة الحدود :**

هي درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأكبر.

**خوارزمية القسمة :**

هي عملية مشابهة للقسمة المطولة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى.

**⚠️ انتبه** قد ينتج باق عن قسمة كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية.

**مفهوم القسمة التركيبية :**

هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

**خطوات القسمة التركيبية :**

- (1) نكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازلياً.
- (2) نأكد أن المقسوم عليه على الصورة  $x - r$  وكتب الثابت  $r$  في الصندوق والمعامل الأول أسفل الخط الأفقي.
- (3) نضرب المعامل الأول في  $r$  ونكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.
- (4) نجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني .



٥) نكرر الخطوتين ٣، ٤ حتى نصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير.

**لاحظ عزيزي الطالب :**

- الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم والعدد الأخير هو الباقي.
- لإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة  $x-r$  وإذا كان معامل  $x$  في المقسوم عليه لا يساوي واحد فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكن استعمال القسمة التركيبية لإيجاد ناتج القسمة.

**كثيرة الحدود بمتغير واحد :**

هي عبارة جبرية على الصورة :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

حيث  $a_0, a_1, a_{n-1}, a_n$  أعداد حقيقية ،  $a_n \neq 0$  ،  $n$  عدد صحيح غير سالب.

**الصورة القياسية لكثيرة الحدود :**

تكون كثيرة الحدود مكتوبة على الصورة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيباً تنازلياً

**درجة كثيرة الحدود :**

هي أس المتغير ذي أكبر أس فيها.

**المعامل الرئيس :**

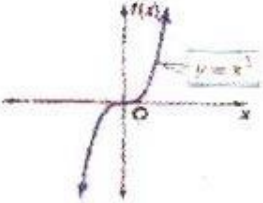
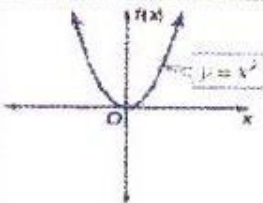
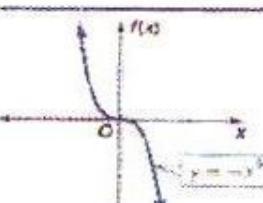
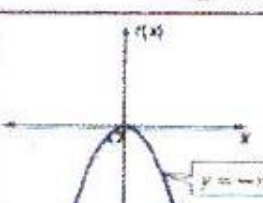
هو معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصورة القياسية.

**دالة كثيرة الحدود :**

هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد وتكتب أبسطها على الصورة  $f(x) = bx^a$  حيث  $b$  عدد حقيقي لا يساوي صفر ،  $a$  عدد صحيح غير سالب وتسمى نوال القوة.

**ملاحظة \*** إذا علمت عنصر في مجال دالة كثيرة الحدود فانك تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.

**\* تمثيل نوال كثيرات الحدود بيانياً يظهر أكبر عدد من المرات التي يقطع فيها هذا التمثيل المحور  $x$  وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.**

| مفهوم أساسي                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | سلوك طرقي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>الدرجة : فردية</p> <p>المعامل الرئيس : موجب</p> <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>سلوك طرقي التمثيل البياني :</p> <p><math>x \rightarrow -\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow -\infty</math></p> <p><math>x \rightarrow +\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow +\infty</math></p> |  | <p>الدرجة : زوجية</p> <p>المعامل الرئيس : موجب</p> <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>سلوك طرقي التمثيل البياني :</p> <p><math>x \rightarrow -\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow +\infty</math></p> <p><math>x \rightarrow +\infty</math> عندما <math>f(x) \rightarrow +\infty</math></p> |
|                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                              |



### تذكر عزيزي الطالب:

مقاطع المحور  $(x)$  تحدد أصفار دالة كثيرة الحدود وعدد مرات تقاطع التمثيل الباني مع محور  $(x)$  يمثل عدد هذه الأصفار.

### مفهوم هام:

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية إلى  $H$  بينما يكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى  $H$ .

### مجموع مكعبين والفرق بينهما:

$$\begin{aligned} \text{مجموع مكعبين } (a^2 - ab + b^2)(a + b) &= a^3 + b^3 \\ \text{الفرق بين مكعبين } (a^2 + ab + b^2)(a - b) &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

**⚠️ انتبه \*** إذا لم يمكننا تحليل كثيرة حدود فإنها تسمى كثيرة حدود أولية.

\* الطريقة الوحيدة لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر هي تجميع الحدود.

### الصورة التربيعية لكثيرة حدود:

هي عبارة عن :  $ax^2 + bx + c$  بحيث  $a \neq 0$  ،  $a, b, c$  أعداد حقيقية ، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود التي تتضمن المتغير  $x$  على هذه الصورة وذلك بعد تعريف  $u$  بدلالة  $x$ ...

### لاحظ عزيزي الطالب:

- هناك بعض كثيرات الحدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.
- يمكننا استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات حدود ذات درجة أكبر من الدرجة الثانية.

### نظرية الباقي:

إذا قسمت كثيرة حدود  $p(x)$  على  $x-r$  فإن الباقي ثابت ويساوي  $p(r)$  وكذلك :

$$p(x) = q(x) \cdot (x-r) + p(r)$$

الباقي + المقسوم عليه . ناتج القسمة = المقسوم

حيث  $q(x)$  دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة المقسوم  $p(x)$ .

### التعويض التركيبي:

هي عملية تطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

### نظرية العوامل:

هي حالة خاصة من نظرية الباقي وهي تنص على أن ثنائية الحد  $x-r$  تكون عاملاً من عوامل كثيرة الحدود  $p(x)$  إذا وفقط إذا كان  $p(r)=0$

**⚠️ انتبه \*** يمكن استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة ويمكن استعمالها أيضاً لتحديد جميع عوامل كثيرة الحدود.

\* عند التحليل إلى عوامل ليس شرطاً أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد.

\* صفر دالة  $f(x)$  يمكن أن يكون أية قيمة مثل  $c$  حيث  $f(c)=0$  وعند تمثيل الدالة بيانياً تكون أصفار الدالة الحقيقية هي مقاطع المحور  $x$ .

### مفهوم هام:

لتكن  $p(x) = ax^n + \dots + ax + a$  كثيرة حدود فإنه ينطبق عليها ما يلي:

- (١)  $c$  صفر للدالة  $p(x)$ .
- (٢)  $c$  جذر أو حل للمعادلة بحيث  $p(x)=0$ .
- (٣)  $x-c$  عامل من عوامل كثيرة الحدود  $p(x)$ .
- (٤) إذا كان  $c$  عدد حقيقي  $\leftarrow (c, 0)$  هو المقطع  $x$  للدالة  $p(x)$ .



### ⚠️ انتبه :

- (١) قد يوجد جذر واحد أو أكثر للدالة درجتها أكبر من صفر.
- (٢) قد لا يوجد جذور حقيقية للدالة (أي لها جذور تخيلية).
- (٣) كلا من الأعداد الحقيقية والتخيلية تسمى مجموعة الأعداد المركبة.

### النظرية الأساسية في الجبر :

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة.

### قانون ديكرارت للإشارات :

إذا كانت  $p(x)$  دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن :

\* عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة  $p(x)$  يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة  $p(x)$  أو أقل منه بعدد زوجي.

\* عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة  $p(x)$  يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة  $p(-x)$  أو أقل منه بعدد زوجي.

### نظرية الأعداد المركبة المترافقة :

إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين حيث  $b \neq 0$  وكان  $a+bi$  صفر لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن  $a-bi$  صفر للدالة أيضا.

### نظرية الصفر النسبي :

لتكن  $p(x)$  دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة فإن أي صفر نسبي للدالة  $p(x)$  سيكون على صورة العدد النسبي  $p/q$  في أبسط صورة حيث  $p$  احد عوامل الحد الثابت  $q$ ، احد عوامل الحد الرئيس.

### نتيجة نظرية الصفر النسبي :

إذا كانت  $p(x)$  دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة والمعامل الرئيس لها ١ وحدها الثابت لا يساوي الصفر فإن أي صفر نسبي للدالة يجب أن يكون احد عوامل الحد الثابت.

### إيجاد الأصفار النسبية :

نختبر كل عدد من الأعداد النسبية باستعمال التعويض التركيبي أو الطرق السابقة التي تعلمتها لإيجاد أصفار الدالة النسبية.

⚠️ انتبه : ليس من الضروري اختبار جميع قيم الأصفار الممكنة فعند إيجاد احدها نحلل الدالة الناتجة عن عملية قسمة كثيرة الحدود على احد عواملها لنجد الأصفار الأخرى.

### العمليات على الدوال :

$$(1) \text{ عملية الجمع : } (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

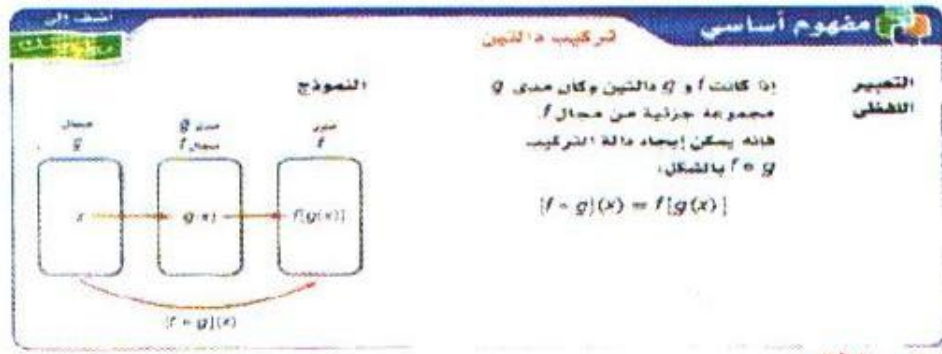
$$(2) \text{ عملية الطرح : } (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(3) \text{ عملية الضرب : } (f.g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(4) \text{ عملية القسمة : } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

⚠️ انتبه : مجال جميع الدوال الناتجة عن جمع أو طرح أو ضرب دالتين هو تقاطع مجاليهما وكذلك في القسمة باستثناء القيم التي تجعل المقام صفرا .





### لاحظ عزيزي الطالب :

- يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرف ويكون  $(f \circ g)(x)$  معرف إذا كان  $g(x)$  مجموعة جزئية من مجال  $f(x)$ .
- ليس من الضروري أن يكون  $(f \circ g) = (g \circ f)$  لذلك يجب أن تراعي ترتيب الدالتين عند تركيبهما.

### مفهوم هام :

تكون كلا من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا احتوت إحداها على أي زوج مرتب مثل  $(a, b)$  وتحتوي الأخرى على الزوج المرتب  $(b, a)$ .

### الانتبه :

- يرمز للدالة العكسية للدالة  $f(x)$  بالرمز  $f^{-1}(x)$ .
- إذا كان كلا من  $f^{-1}(x)$  ،  $f(x)$  دالة عكسية للأخرى فإن  $f(a) = b$  إذا وفقط إذا كان  $f^{-1}(b) = a$ .

### مفهوم الدالة العكسية :

تكون كلا من الدالتين  $f, g$  دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان تركيب كلا منهما يساوي الدالة المحايدة.

أي أن : الدالتان  $f(x), g(x)$  تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان :  
 $(f \circ g) = (g \circ f) = x$

| مفهوم أساسي                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| تحويلات دوال الجذر التربيعي                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                             |
| $f(x) = a\sqrt{x} - h + k$                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                             |
| $k$ ، إزاحة رأسية                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $h$ ، إزاحة أفقية                                                                                                                           |
| إزاحة بمقدار $ k $ وحدة إلى الأعلى، إذا كانت $k$ موجبة<br>إزاحة بمقدار $ k $ وحدة إلى الأسفل، إذا كانت $k$ سالبة<br>المسار هو $\{f(x) \mid f(x) \geq k\}$                                                                                                                                               | إزاحة بمقدار $ h $ وحدة يميناً، إذا كانت $h$ موجبة<br>إزاحة بمقدار $ h $ وحدة يساراً، إذا كانت $h$ سالبة<br>المجال هو $\{x \mid x \geq h\}$ |
| $a$ ، الشكل والاتجاه                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                             |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• إذا كانت <math>a &lt; 0</math>، فإن التمثيل البياني ينمكس حول المحور <math>x</math>.</li> <li>• إذا كانت <math>a &gt; 1</math>، فإن التمثيل البياني يتسع رأسياً.</li> <li>• إذا كانت <math>0 &lt; a &lt; 1</math>، فإن التمثيل البياني يضيق رأسياً.</li> </ul> |                                                                                                                                             |

### متباينة الجذر التربيعي :

هي متباينة تحوي الجذر التربيعي ويمكن تمثيلها بيانياً تماماً مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

### مفهوم :

لأي عددين حقيقيين  $a, b$  ولأي عدد صحيح موجب  $n$ ، إذا كان  $a^n = b$  فإن  $a$  هو الجذر النوني للعدد  $b$ .

### لاحظ عزيزي الطالب :

يشير الرمز  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  إلى الجذر النوني وبعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي وحينها عندما تكون  $n$  عدد زوجي فإن الجذر غير السالب يسمى الجذر الرئيس.



### الجذر النوني الحقيقي

### مفهوم أساسي

ليكن  $n$  عدداً صحيحاً أكبر من 1، و  $a$  عدداً حقيقياً،

| $a$     | $n$ عدد زوجي                                                                                      | $n$ عدد فردي                                                            |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $a > 0$ | هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد، $\pm \sqrt[n]{a}$ . الجذر الموجب هو الجذر الرئيس. | هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$       |
| $a < 0$ | ليس هناك جذور حقيقية.                                                                             | ليس هناك جذور حقيقية موجبة وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$ |
| $a = 0$ | هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$                                                             | هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$                                   |

**⚠️ انتبه** إذا كان دليل الجذر عدد زوجي واس ما تحت الجذر عدد زوجي وكان أس الناتج عدد فردي يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالباً.

### خاصية ضرب الجذور :

لأي عددين حقيقيين  $a, b$  ولأي عدد صحيح  $n$  حيث  $n > 1$  فإن :  

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
 إذا كانت  $n$  عدداً زوجياً وكان  $a, b$  عددين غير سالبين أو إذا كان  $n$  عدداً فردياً.

**⚠️ انتبه** تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة عندما لا يحتوي ما تحت الجذر عوامل هي قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.



### خاصية قسمة الجذور :

لأي عددين حقيقيين  $a, b$  حيث  $b \neq 0$  ولأي عدد صحيح  $n$  حيث  $n > 1$  فإن :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{إذا كانت جميع الجذور معرفة.}$$

### انطاق المقام :

هو عملية تستعمل لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر وذلك بضرب البسط والمقام في مقدار ثابت بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر.

### تبسيط العبارات الجذرية :

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية :

- \* إذا كان دليل الجذر  $n$  أصغر ما يمكن.
- \* إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل غير العدد 1 يمكن أن تكتب على صورة قوى
- نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود .
- \* إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورا.
- \* إذا لم توجد جذور في المقام.

**⚠ انتبه \*** الجذور المتشابهة لها الدليل نفسه وما تحت الجذر المقادير نفسها.

\* تنطبق خاصية التوزيع على ضرب الجذور.

\* حاصل ضرب عددين مرافقين هو عدد نسبي دائما.

### خاصية العدد $\frac{1}{n}$ :

لأي عدد حقيقي  $b$  ولأي عدد صحيح موجب  $n$  فإن :  $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$  .  
إلا إذا كانت  $b < 0$  و  $n$  عددا زوجيا فإن الجذر النوني قد يكون عددا مركبا.

### الأسس النسبية :

يكون  $\frac{x}{y} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$  لأي عدد حقيقي  $b$  لا يساوي صفر، ولأي عددين صحيحين  $x, y$  بحيث  $y > 1$  إلا إذا كانت  $b < 0$  و  $y$  عددا زوجيا فإن الجذر قد يكون عددا مركبا.

**⚠ انتبه \*** القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضا على الأسس النسبية السالبة.

\* عند تبسيط العبارة الجذرية حاول أن تجعل دليل الجذر أقل ما يمكن.

### تبسيط عبارات الأسس النسبية :

تكون العبارة التي تتضمن أسسا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية :

- \* جميع الأسس غير سالبة.
- \* جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- \* لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرا.
- \* دليل الجذر / الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

### خطوات حل المعادلات الجذرية :

- (1) نجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.
- (2) نرفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر وذلك للتخلص من الجذر.
- (3) نحل معادلة كثيرة الحدود الناتجة ، ثم نتحقق من صحة الحل.



### ملاحظات هامة :

- عند حل بعض المعادلات الجذرية قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية ويسمى مثل هذا الحل حلا دخيلا.
- للتخلص من الجذر التربيعي نرفع العبارة الجذرية للأس ٢ وللتخلص من الجذر التكعيبي نرفع العبارة الجذرية للأس ٣ وهكذا.

### ما هي المتباينة الجذرية:

هي متباينة تحوي متغيرا في الصورة الجذرية.

### خطوات حل المتباينة الجذرية:

- (١) إذا كان دليل الجذر عددا زوجيا نعين قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبا.
- (٢) نحل المتباينة جبريا.
- (٣) نختبر القيم لتأكد من صحة الحل.

## نموذج اختبار (١)

### السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس فيما يلي :

- هو مجموعة الإحداثيات السينية للأزواج المرتبة التي تحدد العلاقة ( المجال ، المدى )
- $\sqrt{15}$  ينتمي إلى مجموعة الأعداد (النسبية ، الغير نسبية )
- يسمى عدد الصفوف  $\times$  عدد الأعمدة (محددة ، رتبة ) المصفوفة.
- العدد  $3i$  يسمى عدد (مركب ، تخيلي بحث )
- عند (تركيب ، ضرب ) دالتين نستعمل نواتج دالة منعما لحساب نواتج الأخرى.
- عندما يكون هناك أكثر من جنر حقيقي يسمى الجذر (السالب ، الموجب) بالجذر الرئيس.

### السؤال الثاني:

اشترى محمد ٥ دفاتر بسعر ٢,٥ ريال للدفتري الواحد و ٣ أقلام بسعر ١,٥ ريال للقلم الواحد استعمل خاصية التوزيع لتكتب تعبيرين يمثل كل منهما المبلغ الذي دفعه محمد  $a$ . أوجد المبلغ الذي دفعه محمد باستعمال خاصية التوزيع

### السؤال الثالث : مثل الدالة التالية بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداها:

$$F(x) = \begin{cases} -3, & x < -1 \\ 4x - 3, & -1 \leq x \leq 3 \\ x, & x > 3 \end{cases}$$

### السؤال الرابع : استعمل المصفوفات $A, B$ لإيجاد ناتج كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

(١) ما هي رتبة المصفوفة  $A$  ؟

(٢) ما هي قيمة  $A_{12}, B_{21}$  ؟

(٣)  $A + B$  ؟

(٤) النظير الضربي للمصفوفة  $A$

### السؤال الخامس : للدالة $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ أوجد كلا من :

- (١) قيمة المميز.
- (٢) عدد الجذور وأنواعها.
- (٣) الحلول الدقيقة مستعملا القانون العام



### السؤال السادس :

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية للدالة :

$$F(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3$$

### السؤال الثامن : حل المعادلة التالية :

$$4 + \sqrt{3x - 1} = 8$$

## نموذج اختبار (٢)

### السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس فيما يلي :

- الدالة ( المحايدة ، الثابتة ) هي الدالة الخطية  $f(x) = x$
- تسمى منطقة الحل المفتوحة بـ (الغير محدودة ، الخالية)
- تكون كلا من المصفوفتين نظيرا ضربيا للأخرى إذا كان حاصل ضربهما يعطي ( مصفوفة الوحدة ، المصفوفة الصفرية )
- القسمة (التركيبية ، المطولة ) هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية الحد .
- دالة الجذر التربيعي نوع من أنواع الدوال (الجذرية ، التربيعية )
- تعد  $\sqrt{x+2} > 7$  مثال على (معادلة ، متباينة ) جذر تربيعي.

### السؤال الثاني:

تتقاضى شركة لتأجير السيارات ٤٠ ريالاً عن توصيل السيارة للمكان المراد و ١٠٠ ريال أجره يومية عن السيارة ويمثل ما تتقاضاه هذه المؤسسة عند تأجير السيارة  $x$  يوم بالمعادلة :  $y = 40 + 100x$

أوجد مجال هذه المعادلة ومداها ثم حدد إذا كانت المعادلة دالة أم لا وهل هي متصلة أم منفصلة؟

### السؤال الرابع : حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر :

$$5x + 2y = 4$$

$$3x + 4y + 2z = 6$$

$$7x + 3y + 4z = 29$$

### السؤال الخامس : بسط كلا من العبارات التالية :

$$3n(4l - 6) \quad (١)$$

$$2a(b - 1) + (4a - 10) \quad (٢)$$

$$(6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2) \quad (٣)$$

### السؤال السادس : أوجد جميع أصفار الدالة التالية :

$$F(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$$

### السؤال السابع :

$$g(x) = 5x - 1$$

$$f(x) = 3x + 4$$

إذا كانت :

فأوجد كلا من :

$$(f \cdot g)(x) \quad (١) \quad (f+g)(x) \quad (٢) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad (٣)$$

(٢) معكوس  $g(x)$  ومثله بيانياً مع  $g(x)$  على مستوى إحداثي واحد.





# كتاب التمارين





## خصائص الأعداد الحقيقية

1-1

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي :

$$\{I, R\} \ni \sqrt{7} \quad (٢)$$

$$\{I, W, Z, Q, R\} \ni 0 \quad (٤)$$

$$\{Z, Q, R\} \ni -\sqrt{16} \quad (٦)$$

$$\{Q, R\} \ni -31.8 \quad (٨)$$

اذكر الخاصية الموضحة في كل مما يلي:

(١٠) خاصية العملية التجميعية في عملية الجمع.

(١٢) خاصية توزيع الضرب على الجمع.

(١٤) خاصية العملية التجميعية في عملية الضرب.

(١٦) خاصية النظير الضربي.

(١٨) خاصية النظير الجمعي.

أوجد النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يلي :

$$(٢٠) 1.6 - \text{النظير الجمعي } 1.6 \text{ بينما النظير الضربي } -0.625$$

$$(٢٢) \frac{5}{6} \text{ النظير الجمعي } -\frac{5}{6} \text{ بينما النظير الضربي } -\frac{6}{35}$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$(24) -11a -13b +7a -3b$$

$$=-4a -13b$$

$$(26) 4c -2c - (4c + 2c)$$

$$=-4c$$

$$(28) \frac{1}{5}(10a -15b) + 0.5(8b + 4a)$$

$$=2a -13b +4b +2a = 4a -9b$$

$$(30) \frac{5}{6}(-\frac{3}{5}x + 12y) - 0.25(2x - 12y)$$

$$=0.5x + 10y - 0.5x + 3y = 13y$$

$$(٣٢) a(\frac{1}{a}) = 1, b(\frac{1}{b}) = 1 \text{ العبارة خاطئة لأن}$$

## العلاقات

1-2

## والدوال

حدد كلا من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي ثم حدد إذا كانت دالة أم لا وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا

$$(٢) \text{ المجال } = \{5, 10, 15\}$$

$$\text{المدى } = \{105, 110\}$$

وهذه العلاقة دالة وهي ليست متباينة .

$$(٤) \text{ المجال } = \{-2, 1, -1, 2\}$$

$$\text{المدى } = \{-1, 1, 0\}$$

وهذه العلاقة ليست دالة وهي ليست متباينة

$$(٦) y = 2x - 1$$

المجال : جميع الأعداد الحقيقية

المدى : جميع الأعداد الحقيقية.

الدالة متباينة ومتصلة.

$$\text{إذا كانت } f(x) = \frac{5}{x+2} \text{ فأوجد كل مما يلي :}$$

$$(٨) f(-4) = \frac{-5}{2}$$

$$(10) f(-2) \text{ غير معرفة}$$

$$f(m-2) = \frac{5}{m} \quad (١٢)$$

(١٤) الزمن الذي يتطلبه ذلك الحاسوب لتنفيذ ٥ بلايين عملية حسابية :

$$T(0.0000000015) = 0.0000000015(5) = 7.5$$

أي ٧,٥ بلايين ثانية.

## مقدمة في المصفوفات

2-1

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$1 \times 3 \quad (١)$$

$$2 \times 3 \quad (٢)$$

$$3 \times 4 \quad (٣)$$

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 9 & 8 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  فحدد كل عنصر فيما يأتي :

$$7 = b_{23} \quad (٤)$$

$$2 = b_{11} \quad (٦)$$

$$0 = b_{14} \quad (٨)$$

$$-4 = a_{23} \quad (٩)$$

(١٠) يمكن تمثيل مصدر الطاقة المستعمل في الطهو وعدد السكان في كل من المدينتين بالمصفوفة :

## العمليات على المصفوفات

2-2

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$\begin{bmatrix} 71 \\ -116 \\ -6 \end{bmatrix} \quad (٧)$$

$$\begin{bmatrix} 16 & -15 & 62 \\ 14 & 45 & 75 \end{bmatrix} \quad (٤)$$

$$\begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 24 & 3 \end{bmatrix} \quad (٦)$$

استعمل المصفوفات  $A, B, C$  لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 6 \\ -6 & -4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$A - C = \begin{bmatrix} -6 & 7 & -6 \\ 3 & 10 & -18 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$4B - A = \begin{bmatrix} -12 & 17 & 20 \\ 7 & -6 & 34 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$A + 0.5C = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 \\ -6 & 4 & 12 \end{bmatrix} \quad (12)$$

(١٤) المصفوفة التي تمثل الفروق بين نسب المواد الغذائية الثلاثة في نوعي الأعلاف:

$$\begin{bmatrix} 22 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$



## ضرب المصفوفات

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يلي أم لا وإن كانت معرفة فلو جد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$A_{3 \times 5} M_{5 \times 8} \quad (2)$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة  $A$  يساوي عدد صفوف المصفوفة  $M$  فإن مصفوفة حاصل الضرب  $A.M$  معرفة ورتبتها  $3 \times 8$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة  $M$  لا يساوي عدد صفوف المصفوفة  $A$  فإن مصفوفة حاصل الضرب  $MA$  غير معرفة.

بما أن عدد أعمدة المصفوفة  $P$  يساوي عدد صفوف المصفوفة  $Q$  فإن مصفوفة حاصل الضرب  $C.D$  معرفة ورتبتها  $9 \times 9$ .

أوجد الناتج في كل مما يلي إذا كان ذلك ممكناً :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad -8 \\ = \begin{bmatrix} 2 & 22 \\ -23 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad -10$$

المصفوفة الناتجة غير معرفة لأن عدد أعمدة الأولى لا يساوي عدد صفوف الثانية.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad -11 \\ = [2]$$

$$\begin{bmatrix} -15 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 23 & -10 \end{bmatrix} \quad -14 \\ = [-297 \quad -75]$$

(١٥)  $AC = CA$  (عبارة خاطئة لأن ضرب المصفوفات غير إبدالي)

(١٧)  $(AB)K = K(AB)$  (عبارة صحيحة)

## المحددات وقاعدة كرامر

جد قيمة كل محدد مما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0 \quad -2$$

$$\begin{vmatrix} -14 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 28 + 6 = 34 \quad -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} = -22 + 25 = 3 \quad -6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -9.5 \end{vmatrix} = -19 + 3 = -16 \quad -8$$

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار :

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (١٠)$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -0 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$8 - 18 + 0 = -10$$

$$8 + 30 + 0 = 38$$

$$-10 - 38 = -48 \text{ (قيمة المحددة)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (١٢)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2 - 2 + 1 = 1$$

$$-1 - 4 - 1 = -6$$

$$1 + 6 = 7 \text{ (قيمة المحددة)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (١٤)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$24 + 0 + 48 = 72$$

$$-24 + 0 + 168 = 144$$

$$72 - 144 = -72 \text{ (قيمة المحددة)}$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام من معادلتين مما يأتي:

$$4x - 2y = -6 \quad (١٦)$$

$$3x + y = 18$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 18 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{30}{10} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{90}{10} = 9$$

حل النظام هو (3, 9).

$$-2x - 3y = -14 \quad (١٨)$$

$$4x - y = 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -14 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -14 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{56}{14} = 4$$

حل النظام هو (1, 4).

$$5x - 6 = 3y \quad (٢٠)$$

$$5y = 54 - 3x$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 54 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{192}{16} = 12$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 54 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{288}{16} = 18$$

حل النظام هو (12, 18).



٢٢) أوجد مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه  $(-4, 10), (6, -5), (3, 5)$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 10 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

بتطبيق قاعدة الأقطار :

$$\begin{vmatrix} -4 & 10 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 6 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$20 + 30 + 30 = 80$$

$$-15 - 20 + 60 = 25$$

$$(قيمة المحددة) 80 - 25 = 55$$

$$A = 0.5(55) = 27.5$$

## النظير الضربي للمصفوفة والنظمية المعادلات الخطية

2-5

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرا ضربيا للأخرى فيما يلي :

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

كلا من المصفوفتين تمثل نظير ضربيا للأخرى.

$$P = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

كلا من المصفوفتين تمثل نظير ضربيا للأخرى.

٤) العبارة (لكل مصفوفة مربعة نظير ضربيا) صحيحة.

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن كان ذلك ممكنا :

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad (٦)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-3}{8} & \frac{-5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \quad (٨)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} (١٠)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix}$$

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

$$p + 3q = 6 \quad (١٢)$$

$$2p - 3q = -6$$

المعادلة المصفوفية هي :

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$\frac{1}{-9} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$2m + 2n = -8 \quad (١٤)$$

$$6m + 4n = -18$$

المعادلة المصفوفية هي :

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$= \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$\frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$



بسط كلا مما يأتي:

$$\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-32} \quad (٢)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{-1 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \sqrt{-1 \cdot 16 \cdot 2} \\ &= 2\sqrt{2}i \cdot 4\sqrt{2}i \\ &= -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3i)(4i)(-5i) \quad (٥) \\ &= 60i^3 \\ &= -60i \\ &(i^{42}) \quad (٦) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i^{67} = (-1)^7 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$(5-2i) + (-13-8i) \quad (٩)$$

$$= -8 - 10i$$

$$(7-6i) + (9+11i) \quad (١٠)$$

$$= 16 + 5i$$

$$(10+15i) - (48-30i) \quad (١٢)$$

$$= -38 + 45i$$

$$(6-4i)(6+4i) \quad (١٤)$$

$$= 36 - 16i^2$$

$$= 36 + 16$$

$$= 52$$

$$(4+3i)(2-5i) \quad (١٦)$$

$$= 8 - 20i + 6i - 15i^2$$

$$= 23 - 14i$$

$$\begin{aligned} &\frac{6+5i}{-2i} \quad (١٨) \\ &= \frac{6+5i}{-2i} \times \frac{2i}{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{3-2i}{2-i} \quad (٢٠) \\ &= \frac{3-2i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} \end{aligned}$$

حل كل معادلة مما يأتي:

$$5n^2 + 35 = 0 \quad (٢٢)$$

$$5n^2 = -35$$

$$n = \pm \sqrt{-7}$$

$$n = \pm i\sqrt{7}$$

$$4m^2 + 76 = 0 \quad (24)$$

$$4m^2 = -76$$

$$m^2 = -19$$

$$m = \pm\sqrt{-19}$$

$$-5m^2 - 65 = 0 \quad (26)$$

$$5m^2 = -65$$

$$m^2 = -13$$

$$m = \pm\sqrt{-13}$$

$$m = \pm i\sqrt{13}$$

أوجد قيمة  $m$  الحقيقية التي تجعل كل معادلة مما يأتي صحيحة:

$$15 - 28i = 3l + (4m)i \quad (28)$$

الجزء الحقيقي :

$$15 = 3l$$

$$l = 5$$

الجزء التخيلي :

$$-28i = 4mi$$

$$-28 = 4m$$

$$m = -7$$

$$(3l+4) + (3-m)i = 16 - 3i \quad (30)$$

الجزء الحقيقي :

$$16 = 3l + 4$$

$$3l = 12$$

$$l = 4$$

الجزء التخيلي :

$$(3-m)i = -3i$$

$$3-m = -3$$

$$m = 6$$

(٣٢) المقاومة الكلية في الدائرة الكهربائية :

$$= 1 + 3j + 7 - 5j = 8 - 2j$$

### القانون العام والميز

3-2

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام :

$$4x^2 - 9 = 0 \quad -٢$$

$$a=4, b=0, c=-9$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0+144}}{8}$$

$$= \frac{\pm 12}{8} = \frac{\pm 3}{2}$$

$$x^2 - 21 = 4x \quad -٤$$

$$a=1, b=-4, c=-21$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 10}{2}$$

$$x=7 \quad x=-3$$



$$15x^2 + 22x = -8 \quad -٦$$

$$a=15, b=22, c=8$$

$$x = \frac{-22 \pm \sqrt{484 - 480}}{30}$$

$$= \frac{-22 \pm 2}{30}$$

$$x = \frac{-2}{3} \quad \text{or} \quad x = \frac{-4}{5}$$

$$x^2 - 14x + 53 = 0 \quad -8$$

$$a=1, b=-14, c=53$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 212}}{2}$$

$$= \frac{14 \pm 4i}{2}$$

$$x = 7 + 2i \quad x = 7 - 2i$$

$$25x^2 - 20x - 6 = 0 \quad -١٠$$

$$a=25, b=-20, c=-6$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 600}}{50}$$

$$= \frac{20 \pm 31.6}{50}$$

$$x = 1.03 \quad x = -0.23$$

$$8x - 1 = 4x^2 \quad -١٢$$

$$a=14, b=-8, c=1$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{8}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{48}}{8}$$

$$x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{or} \quad x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4x^2 - 12x + 7 = 0 \quad -١٤$$

$$a=4, b=-12, c=7$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 112}}{8}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{32}}{8}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

أجب عن الفرعين  $a, b$  لكل معادلة تربيعية فيما يأتي :

(a) أوجد قيمة المميز

(b) أوجد عدد الجذور وحدد أنواعها

$$x^2 = 3x \quad (16)$$

$$a=1, b=-3, c=0$$

← المميز موجب

← يوجد جذران حقيقيان

$$x^2 - 3x = 40 \quad (18)$$

$$a=1, b=-3, c=-40$$

$$b^2 - 4ac = 9 - (4 \times 1 \times -40)$$

$$= 169$$

← المميز موجب

← يوجد جذران حقيقيان

$$2x^2 + 7x = 0 \quad (20)$$

$$a=2, b=7, c=0$$

$$b^2 - 4ac = 49 - (4 \times 2 \times 0)$$

← المميز موجب

← يوجد جذران حقيقيان.

$$12x^2 - x - 6 = 0 \quad (22)$$

$$a=12, b=-1, c=-6$$

$$b^2 - 4ac = 1 - (4 \times 12 \times -6) \\ = 283$$

← المميز موجب

← يوجد جذران حقيقيان

$$12x^2 + 2x - 4 = 0 \quad (24)$$

$$a=12, b=2, c=-4$$

$$b^2 - 4ac = 4 - (4 \times 12 \times -4) \\ = 196$$

← المميز موجب

← يوجد جذران حقيقيان.

$$x^2 + 3x + 6 = 0 \quad (26)$$

$$a=1, b=3, c=6$$

$$b^2 - 4ac = 9 - (4 \times 1 \times 6) \\ = -15$$

← المميز سالب

← يوجد جذران مركبان.

$$16x^2 - 8x + 1 = 0 \quad (28)$$

$$a=16, b=-8, c=1$$

$$b^2 - 4ac = 64 - (4 \times 16 \times 1) \\ = 0$$

← المميز = 0

← يوجد جذر واحد حقيقي.

30- بحل المعادلة التربيعية لإيجاد الزمن عند  $h=56$

$$-16t^2 + 60t = 56$$

$$4t^2 - 15t + 14 = 0.$$

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{255 - (4 \times 4 \times 14)}}{8}$$

$$= \frac{15 \pm 1}{8}$$

$$t = 2 \text{ or } t = 1.75$$



### العمليات على كثيرات الحدود

3-3

بسط كلا مما يأتي مقترضا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرا:

$$n^5 \cdot n^2 = n^7 \quad (1)$$

$$t^9 \cdot t^{-8} = t^1 \quad (3)$$

$$(2f^4)^6 = 2^6 f^{24} = 2^{64} f^{24} \quad (5)$$

$$8u(2z)^3 = 8u \cdot 8z^3 \quad (8)$$

$$= 64uz^3$$

$$\frac{12m^8y^6}{-9my^4} = -\frac{4}{3}m^7y^5 \quad (9)$$

$$\frac{-27x^3(-x)^7}{16x^4} = \frac{27}{16x^8} \quad (11)$$

$$-(4w^{-3}z^{-5})(8w)^2 = -4 \cdot \frac{1}{w^3} \cdot \frac{1}{z^5} \cdot 64w^2 = \frac{-256}{wz^5} \quad (13)$$

$$\left(\frac{2x^3y^2}{-x^2y^5}\right)^{-2} = \left(\frac{-x^2y^5}{2x^3y^2}\right)^2 = \frac{-x^4y^{10}}{4x^6y^4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot y^6 = \frac{-y^6}{4x^2} \quad (15)$$

$$3n^2 + 1 + 8n^2 - 8 = 11n^2 - 7 \quad (18)$$

$$6w - 11w^2 - 4 - 7w^2 = -18w^2 + 6w - 4 \quad (19)$$

(21)

الربح في المشروع الأول:

$$15000(0.038) = 570$$

الربح في المشروع الثاني:

$$6 - 3.8 = 2.2$$

الربح بعد عام واحد:

$$570 + 2.2x$$

### قسمة كثيرات الحدود

3-4

بسط كل عبارة فيما يأتي مستعملا القسمة:

$$\frac{15r^{10} - 5r^8 + 40r^2}{5r^4} = \frac{15r^{10}}{5r^4} - \frac{5r^8}{5r^4} + \frac{40r^2}{5r^4} \quad (1)$$

$$= 3r^6 - r^4 + \frac{8}{r^2}$$

$$\frac{-30x^3y + 12x^2y^2 - 18x^2y}{-6x^2y} = \frac{-30x^3y}{-6x^2y} + \frac{12x^2y^2}{-6x^2y} - \frac{18x^2y}{-6x^2y} \quad (3)$$

$$= 5x - 2y + 3$$

$$\frac{4a^3 - 8a^2 + a^2}{4a} = \frac{4a^3}{4a} - \frac{8a^2}{4a} + \frac{a^2}{4a} \quad (5)$$

$$= a^2 - 2a + \frac{1}{4}a$$

$$(a^3 - 64) \div (a - 4) \quad (9)$$

$$\begin{array}{r} \text{4)} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -64 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad 4 \quad 16 \quad 64 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad 1 \quad 4 \quad 16 \quad 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو  $a^2 + 4a + 16$

$$(2x^3 + 6x + 152) \div (x + 4) \quad (11)$$

$$\begin{array}{r} \text{-4)} \quad 2 \quad 0 \quad 6 \quad 152 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad -8 \quad 32 \quad -152 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad 2 \quad -8 \quad 38 \quad 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو  $2x^2 - 8x + 38$

$$(3w^3 + 7w^2 - 4w + 3) \div (w + 3) \quad (13)$$

$$\begin{array}{r} -r \overline{) \begin{array}{cccc} 3 & 7 & -4 & 3 \\ & -9 & 6 & -6 \\ \hline & 3 & -2 & 2 & -3 \end{array}} \end{array}$$

نتائج القسمة هو  $3w^2 - 2w + 2 - \frac{3}{w+3}$

$$(x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10) \div (x - 5) \quad (15)$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) \begin{array}{cccccc} 1 & -3 & -11 & 3 & 10 \\ & 5 & 10 & -5 & -10 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}} \end{array}$$

نتائج القسمة هو  $x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$((x^4 - 3x^3 + 5x - 6) \div (x + 2)) \quad (17)$$

$$\begin{array}{r} -r \overline{) \begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 0 & 5 & -6 \\ & -2 & 10 & -20 & 30 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -15 & 24 \end{array}} \end{array}$$

نتائج القسمة هو  $x^3 - 5x^2 + 10x - 15 + \frac{24}{x+2}$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل  $x$  وهو هنا 2 لتصبح عملية القسمة.

$$\left( \frac{2x^2 - x + 3}{x - \frac{3}{2}} \right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} \overline{) \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 6 \end{array}} \end{array}$$

نتائج القسمة  $2x + 2 + \frac{6}{2x-3}$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل  $r$  وهو هنا 2 لتصبح عملية القسمة.

$$\left( \frac{r^3 + \frac{5}{2}r^2 - r - \frac{15}{2}}{r - \frac{3}{2}} \right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} \overline{) \begin{array}{cccc} 1 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{15}{2} \\ & \frac{3}{2} & 6 & \frac{15}{2} \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}} \end{array}$$

نتائج القسمة  $r^2 + 4r + 5$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل  $p$  وهو هنا 2 لتصبح عملية القسمة.

$$\left( \frac{2p^4 - \frac{17}{2}p^2 + 7p - \frac{3}{2}}{p - \frac{3}{2}} \right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} \overline{) \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -\frac{17}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ & 3 & \frac{9}{2} & -6 & \frac{3}{2} \\ \hline & 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \end{array}} \end{array}$$

نتائج القسمة  $2p^3 + 3p^2 - 4p + 1$



25 نقسم الدالة التي تمثل المساحة على ٢ لتصبح العملية :

$$\left( \frac{x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{15}{2}}{x - \frac{5}{2}} \right)$$

$$\frac{5}{2} \quad 1 \quad \frac{-11}{2} \quad \frac{15}{2}$$

$(x - 3)$  وهو يمثل طول المستطيل

نتج القسمة

3-5

## دوال كثيرات الحدود

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود فيما يأتي وإذا لم تكن كثيرة حدود فاذكر السبب :

$$(3x^2 + 1)(2x^2 - 9) \quad (1)$$

كثيرة حدود من الدرجة الرابعة والمعامل الرئيس فيها ٦ .

ليست كثيرة حدود لأنها تحتوي متغير في المقام

أوجد  $p(3), p(-2)$  لكل دالة فيما يلي :

$$p(x) = x^3 - x^5 \quad (٥)$$

$$p(-2) = (-2)^3 - (-2)^5 = 24$$

$$p(3) = (3)^3 - (3)^5 = -216$$

$$p(x) = -x^5 + 4x^3 \quad (٧)$$

$$p(-2) = -(-2)^5 + 4(-2)^3 = 0$$

$$p(3) = -(3)^5 + 4(3)^3 = -135$$

$$p(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \quad (9)$$

$$p(-2) = (-2)^4 + \frac{1}{2}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2) = -11$$

$$p(3) = (3)^4 + \frac{1}{2}(3)^3 - \frac{1}{2}(3) = 24$$

إذا كانت  $p(x) = 3x^2 - 4$  ،  $r(x) = 2x^2 - 5x + 1$  فأوجد قيمة كل مما يلي :

$$p(8a) = 3(8a)^2 - 4 \quad (11)$$

$$= 3(64a^2) - 4$$

$$= 192a^2 - 4$$

$$-5r(2a) \quad (13)$$

$$r(2a) = 2(2a)^2 - 5(2a) + 1 \quad *$$

$$= 8a^2 - 10a + 1$$

$$-5r(2a) = -40a^2 + 50a - 5$$

$$p(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1)^2 - 4 \quad (١٥)$$

$$= 3(x^4 - 2x^2 + 1) - 4$$

$$= 3x^4 - 6x^2 - 1$$

(18) الحل :

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } F(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } F(x) \rightarrow +\infty$$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاه واحد فالدالة زوجية الدرجة ، ويقطع التمثيل البياني للدالة محور

السينات في نقطتين لذا يكون للدالة صفرين حقيقيين.

$$c(w) = 0.013w^2 - w - 7 \quad (٢٠)$$

$$c(20) = 0.013(20)^2 - 20 - 7$$

$$= 5.2 - 20 - 7$$

$$= -21.8$$

حل كل كثيرة حدود مما يأتي إلى عواملها الأولية وإذا لم تقبل التحليل فكتب كثيرة حدود أولية:

$$15a^2b - 10ab^2 \quad (1)$$

$$= 5ab(3a-2b)$$

(3) كثيرة حدود أولية.

(5) كثيرة حدود أولية.

$$(y^2 + 20y + 96) \quad (7)$$

$$= (y+8)(y+12)$$

$$(6n^2 - 11n - 2) \quad (9)$$

$$= (n-2)(n+\frac{1}{6})$$

$$(4x^2 - 8x + 8) \quad (11)$$

$$x = 1 \pm i$$

اكتب العبارة التالية على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكناً :

$$10b^4 + 3b^2 - 11 \quad (13)$$

$$= 10(b^2)^2 + 3(b^2) - 11$$

$$= 10u^2 + 3u - 11$$

$$28d^6 + 25d^3 \quad (15)$$

$$= 28u^2 + 25u$$

$$500x^4 - x^2 \quad (17)$$

$$= 500u^2 - u$$

حل كل معادلة فيما يأتي :

$$y^4 - 7y^3 - 18y^2 = 0 \quad (19)$$

$$y^2(y^2 - 7y - 18) = 0$$

$$y^2 = 0 \rightarrow y = 0$$

$$(y^2 - 7y - 18) = 0$$

$$y = 9 \text{ or } y = -2$$

$$m^4 - 625 = 0 \quad (21)$$

$$= (m^2)^2 - (25^2)$$

$$= (m^2 - 25)(m^2 + 25)$$

$$m^2 = 25 \rightarrow m = \pm 5$$

$$\text{or } m^2 = -25 \rightarrow m = \pm 5i$$

$$x^4 - 50x^2 + 49 = 0 \quad (23)$$

$$u^2 - 50u + 49 = 0$$

$$U = 49 \text{ or } u = 1$$

$$x^2 = 49 \rightarrow x = \pm 7$$

$$\text{or } x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

(25) قيم  $x$  التي يقطع عندهما مسار البروتون المحور  $x$  هي حل المعادلة :

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 15 = 0$$

$$u^2 - 2u - 15 = 0$$

$$U = 5 \text{ or } u = -3$$

$$x^2 = 5 \rightarrow x = \pm \sqrt{5}$$

$$\text{or } x^2 = -3 \rightarrow x = \pm i\sqrt{3}$$



## نظرية الباقي والعوامل

3.7

أوجد  $f(4)$ ,  $f(-3)$  لكل دالة مما يأتي مستعملا التعويض التركيبي:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

(١)

بناء على نظرية الباقي فإن  $f(4)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-4$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} x-4 & 1 & 2 & 3 & \\ & & 4 & 24 & \\ \hline & 1 & 6 & 27 & \end{array}$$

باقي القسمة هو ٢٧  $\leftarrow f(4) = 27$

بناء على نظرية الباقي فإن  $f(-3)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+3$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} x+3 & 1 & 2 & 3 & \\ & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \end{array}$$

باقي القسمة هو 6  $\leftarrow f(-3) = 6$

$$f(x) = x^2 - 5x - 4$$

(٢)

بناء على نظرية الباقي فإن  $f(4)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-4$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} x-4 & 1 & -5 & -4 & \\ & & 4 & -4 & \\ \hline & 1 & -1 & -8 & \end{array}$$

باقي القسمة هو -٨  $\leftarrow f(4) = -8$

بناء على نظرية الباقي فإن  $f(-3)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+3$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} x+3 & 1 & -5 & -4 & \\ & & -3 & 24 & \\ \hline & 1 & -8 & 20 & \end{array}$$

باقي القسمة هو 20  $\leftarrow f(-3) = 20$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$$

(٥)

بناء على نظرية الباقي فإن  $f(4)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-4$ .

$$\begin{array}{r|rrrrr} x-4 & 1 & 2 & 0 & 5 & \\ & & 4 & 24 & 96 & \\ \hline & 1 & 6 & 24 & 101 & \end{array}$$

باقي القسمة هو 101  $\leftarrow f(4) = 101$

بناء على نظرية الباقي فإن  $f(-3)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+3$ .

$$\begin{array}{r|rrrrr} x+3 & 1 & 2 & 0 & 5 & \\ & & 3 & 3 & -9 & \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -4 & \end{array}$$

باقي القسمة هو -4  $\leftarrow f(-3) = -4$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 8$$

(٧)

بناء على نظرية الباقي فإن  $f(4)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-4$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} x-4 & 1 & -2 & -2 & 8 & \\ & & 4 & 8 & 24 & \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 32 & \end{array}$$

باقي القسمة هو 32  $\leftarrow f(4) = 32$

بناء على نظرية الباقي فإن  $f(-3)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+3$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} x+3 & 1 & -2 & -2 & 8 & \\ & & -3 & 15 & -39 & \\ \hline & 1 & -5 & 13 & -31 & \end{array}$$

باقي القسمة هو -31  $\leftarrow f(-3) = -31$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 50 \quad (9)$$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(4)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-4$ .

|    |   |   |    |     |
|----|---|---|----|-----|
| ε] | 1 | 3 | 2  | -50 |
|    |   |   | 4  | 28  |
|    |   |   |    | 120 |
|    | 1 | 7 | 30 | 70  |

باقي القسمة هو  $70 \leftarrow f(4) = 70$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(-3)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+3$ .

|     |   |   |    |     |
|-----|---|---|----|-----|
| -r] | 1 | 3 | 2  | -50 |
|     |   |   | -3 | 0   |
|     |   |   |    | -6  |
|     | 1 | 0 | 2  | -56 |

باقي القسمة هو  $-56 \leftarrow f(-3) = -56$

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 26 \quad (13)$$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(4)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-4$ .

|    |   |    |    |     |     |
|----|---|----|----|-----|-----|
| ε] | 2 | -1 | 2  | 0   | -26 |
|    |   |    |    | 8   | 28  |
|    |   |    |    |     | 120 |
|    |   |    |    |     | 480 |
|    | 2 | 7  | 30 | 120 | 454 |

باقي القسمة هو  $454 \leftarrow f(4) = 454$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(-3)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+3$ .

|     |   |    |    |     |     |
|-----|---|----|----|-----|-----|
| -r] | 2 | -1 | 2  | 0   | -26 |
|     |   |    |    | -6  | 21  |
|     |   |    |    |     | -69 |
|     |   |    |    |     | 207 |
|     | 2 | -7 | 23 | -69 | 181 |

باقي القسمة هو  $181 \leftarrow f(-3) = 181$

$$f(x) = x^5 + 7x^3 - 4x - 10 \quad (15)$$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(4)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x-4$ .

|    |   |   |    |    |     |      |
|----|---|---|----|----|-----|------|
| ε] | 1 | 0 | 7  | 0  | -4  | -10  |
|    |   |   |    | 4  | 16  | 92   |
|    |   |   |    |    |     | 368  |
|    |   |   |    |    |     | 1456 |
|    | 1 | 4 | 23 | 92 | 364 | 1446 |

باقي القسمة هو  $1446 \leftarrow f(4) = 1446$

بناءً على نظرية الباقي فإن  $f(-3)$  يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على  $x+3$ .

|     |   |    |    |     |     |      |
|-----|---|----|----|-----|-----|------|
| -r] | 1 | 0  | 7  | 0   | -4  | -10  |
|     |   |    |    | -3  | 9   | -48  |
|     |   |    |    |     |     | 144  |
|     |   |    |    |     |     | -420 |
|     | 1 | -3 | 16 | -48 | 140 | -430 |

باقي القسمة هو  $-430 \leftarrow f(-3) = -430$

أوجد العوامل الأخرى لكل كثيرة حدود مما يأتي علماً بأنه قد أعطي أحد عواملها:

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8, (x-2) \quad (17)$$

باستعمال القسمة التركيبية:

|    |   |   |    |    |
|----|---|---|----|----|
| r] | 1 | 3 | -6 | -8 |
|    |   |   | 2  | 10 |
|    |   |   |    | 8  |
|    | 1 | 5 | 4  | 0  |

$$x^2 + 5x + 4$$

$$(x+1)(x+4)(x-2)$$

نتائج القسمة هو

العوامل هي

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27, (x-3) \quad (19)$$

باستعمال القسمة التركيبية:

|    |   |    |    |     |
|----|---|----|----|-----|
| r] | 1 | -9 | 27 | -27 |
|    |   |    | 3  | -18 |
|    |   |    |    | 27  |
|    | 1 | -6 | 9  | 0   |

$$x^2 - 6x + 9$$

$$(x-2)(x-3)$$

نتائج القسمة هو

العوامل هي



$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24, (x-2) \quad (٢١)$$

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r|rrrr} x & 1 & 5 & -2 & -24 \\ & & & 2 & 14 & 24 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 7x + 12$$

$$(x+3)(x+4)(x-2)$$

ناتج القسمة هو

العوامل هي

$$3x^3 - 4x^2 - 17x + 6, (x-2) \quad (٢٢)$$

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r|rrrr} -x & 3 & -4 & -17 & 6 \\ & & & -6 & 20 & -6 \\ \hline & 3 & -10 & 3 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 10x + 3$$

$$(x-3)(x-\frac{1}{3})(x+2)$$

ناتج القسمة هو

العوامل هي

$$18x^3 - 9x^2 - 2x - 1, (2x+1) \quad (٢٥)$$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل  $x$  وهو هنا 2 لتصبح عملية القسمة:

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 9 & \frac{9}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ & & -\frac{9}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline & 9 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$9x^2 - 1 = 0 \quad \text{ناتج القسمة}$$

$$(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(2x+1)$$

العوامل هي

(٣٠) نقسم الدالة التي تمثل حجم البركة على ٢:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0 \quad (\div 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} & 3 \\ & & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{ناتج القسمة}$$

$$(x-3)(x-2)(2x+1)$$

العوامل هي

طول البركة  $(x-3)$  وعرضها  $(x-2)$

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها وأنواعها :

$$-9x - 15 = 0 \quad (1)$$

$$-9x = 15$$

$$x = -\frac{15}{9}$$

للمعادلة جذر حقيقي واحد.

$$x^5 - 81x = 0 \quad (3)$$

$$= x(x^4 - 81) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x^4 - 81 = 0$$

$$(x^2)^2 - (9)^2 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

$$x^2 + 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3i$$

للمعادلة خمسة جذور ثلاثة حقيقية واثنين تخيليين.

$$x^3 + 6x + 20 = 0 \quad (5)$$

$$(x-2)(x^2+2x+10)=0$$

$$x=2 \quad \text{or} \quad (x^2+2x+10)=0$$

$$x=2 \pm 3i$$

للمعادلة ثلاثة جذور واحد حقيقي واثنين تخيليين.

اذكر عدد الأصفار الممكنة الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يلي:

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 3 \quad (7)$$

عند  $f(x)$  نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢ أو ٠.

عند  $f(-x)$  نجد تغير واحد في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ١

عدد الأصفار التخيلية = ٢ أو ٠.

$$q(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x + 5 \quad (9)$$

عند  $f(x)$  نجد تغير في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ١

عند  $f(-x)$  نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ٢ أو ٠.

عدد الأصفار التخيلية = ٢ أو ٠.

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل

مما يأتي هي بعض أصفارها :

$$-5, 3i$$

بما أن  $3i$  صفر للدالة  $\leftarrow -3i$  صفر للدالة أيضا.

عوامل كثيرة الحدود:

$$(x+5)(x-3i)(x+3i)$$

$$= (x+5)[x^2+9]$$

$$= x^3+9x+5x^2+9x$$

$$f(x) = x^3+5x^2+18x$$

$$-1, 4, 3i$$

بما أن  $3i$  صفر للدالة  $\leftarrow -3i$  صفر للدالة أيضا.

عوامل كثيرة الحدود:

$$(x+1)(x-4)(x+3i)(x-3i)$$

$$= x^2-4x+x(x^2+9)$$

$$= x^2-3x-4(x^2+9)$$

$$= x^4+9x^2-3x^3-27x-4x^2-36$$

$$f(x) = x^4-3x^3+5x^2-27x-36$$



### 3-9 نظرية الصفر النسبي

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي للدالة التالية :

$$h(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 12 \quad (1)$$

إذا كان  $\frac{p}{q}$  صفر نسبي فإن  $p$  احد عوامل العدد ١٢ و  $q$  احد عوامل العدد ١ .

$$q = \pm 1 \quad p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 12$$

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 12$$

$$f(x) = 3x^5 - 5x^2 + x + 6 \quad (3)$$

إذا كان  $\frac{p}{q}$  صفر نسبي فإن  $p$  احد عوامل العدد ٦ و  $q$  احد عوامل العدد ٣ .

$$q = \pm 1, \pm 3 \quad p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

$$g(x) = 5x^3 + x^2 - x + 8 \quad (5)$$

إذا كان  $\frac{p}{q}$  صفر نسبي فإن  $p$  احد عوامل العدد ٨ و  $q$  احد عوامل العدد ٥ .

$$q = \pm 1, \pm 5 \quad p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{8}{5}, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

اوجد جميع الاصفار النسبية لكل من الدوال التالية :

$$q(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \quad (7)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 اصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكرت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقيين سالبين وصفر حقيقي موجب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ٢ صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & 2 & 10 & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-2)$  وهي :

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$x = -1 \text{ or } x = -4$$

أصفار الدالة هي : 2, -1, -4

$$c(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 \quad (9)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 اصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكرت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن 2 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\ & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-2)$  وهي :

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -3 \text{ or } x = 2$$

$$h(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15 \quad (11)$$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 اصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكرت للإشارات فان للدالة 3 اصفار موجبة
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن 3 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -7 & 17 & -15 \\ & & 3 & -12 & 15 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-3)$  وهي :

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = 2 \pm i$$

أصفار الدالة هي :  $2 \pm i, 3$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 24 \quad (13)$$

• بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.

• بناء على قانون ديكرات للإشارات فإن للدالة 3 أصفار موجبة.

• الأعداد التي تحدها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن 6 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & -6 & 4 & -24 \\ & & 6 & 0 & 24 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-6)$  وهي :

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x = \pm 2i$$

أصفار الدالة هي :  $\pm 2i, 6$

$$h(x) = 2x^3 - 7x^2 - 21x + 54 \quad (15)$$

• بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.

• بناء على قانون ديكرات للإشارات فإن للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفر حقيقي سالب.

• الأعداد التي تحدها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm \dots$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن 2 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -7 & -21 & 54 \\ & & 4 & -6 & -54 \\ \hline & 2 & -3 & -27 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-2)$  وهي :

$$2x^2 - 3x - 27 = 0$$

$$x = -3 \text{ or } x = \frac{9}{2}$$

أصفار الدالة هي :  $2, -3, \frac{9}{2}$

$$n(x) = x^4 - 2x^3 - 3 \quad (18)$$

• بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 4 أصفار مركبة فقط.

• بناء على قانون ديكرات للإشارات فإن للدالة صفر واحد حقيقي موجب وصفر حقيقي سالب.

• الأعداد التي تحدها نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 3$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن -1 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ & & -1 & 3 & -3 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -3 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x+1)$  وهي :

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$x^2(x-3) + 3(x-1) = 0$$

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 20 \quad (21)$$

• بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 4 أصفار مركبة فقط.

• بناء على قانون ديكرات للإشارات فإن للدالة ثلاث أصفار حقيقية موجبة وصفر حقيقي سالب.

• الأعداد التي تحدها نظرية الصفر النسبي:



$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن 2 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 16 & -20 \\ & & 2 & -4 & -6 & 20 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 10 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-2)$  وهي :

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$$

$$n(x) = x^6 - 1 \quad (23)$$

• بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 6 أصفار مركبة فقط.

• بناء على قانون ديكرات للإشارات فإن للدالة صفر واحد حقيقي موجب وصفر حقيقي سالب.

• الأعداد التي تحددنا نظرية الصفر النسبي:

$$\frac{p}{q} = \pm 1$$

• باختبار الأعداد النسبية نجد أن 1 صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

• نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على  $(x-1)$  وهي :

(٢٤) نفرض أن عرض الصندوق هو  $w$  فيكون طوله  $2+2w$  وارتفاعه  $w-3$ .

حجم الصندوق = الطول  $\times$  العرض  $\times$  الارتفاع :

$$1540 = w(2+2w)(w-3)$$

$$(w^2 - 3w)(2w+2) = 1540$$

$$2w^3 + 2w^2 - 6w^2 - 6w = 1540$$

$$w^3 - 2w^2 - 3w - 770 = 0$$

المعامل الرئيس = 1  $\leftarrow$  الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل 770 وهي :

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 7, \pm 10, \pm 11, \dots$$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.

هناك تغير واحد في إشارة المعاملات  $\leftarrow$  هناك صفر واحد حقيقي موجب.

باختبار الأعداد نجد أن العدد 10 صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

العرض :  $w = 10 \text{ in}$  الارتفاع :  $w-3 = 7 \text{ in}$  الطول :  $2+2w = 22 \text{ in}$

## العمليات على الدوال

4-1

أوجد  $(f+g)(x)$ ,  $(f-g)(x)$ ,  $(f \cdot g)(x)$ ,  $(\frac{f}{g})(x)$  للدالتين فيمي يلي :

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = 8x^2$$

$$(f+g)(x) = 8x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{8x^4 + 1}{x^2}$$

$$(f-g)(x) = 8x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{8x^4 - 1}{x^2}$$

$$(f \cdot g)(x) = 8x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 8$$

$$(\frac{f}{g})(x) = 8x^2 \cdot x^2 = 8x^4$$

أوجد  $(fg)(x)$ ,  $(gof)(x)$  لكل زوج من الدوال الآتية :

$$f(x) = \{(-9, -1), (-1, 0), (3, 4)\} \quad (4)$$

$$g(x) = \{(0, -9), (-1, 3), (4, -1)\}$$

$$(gof)(x) : f(-9) = -1 \rightarrow g(-1) = 3$$

$$f(-1) = 0 \rightarrow g(0) = -9$$

$$f(3) = 4 \rightarrow g(4) = -1$$

$$(g \circ f)(x) = \{(-9, 3)(-1, -9)(3, -1)\}$$

$$(f \circ g)(x) ; g(0) = -9 \rightarrow f(-9) = -1$$

$$g(-1) = 3 \rightarrow f(3) = 4$$

$$g(4) = -1 \rightarrow f(-1) = 0$$

$$(f \circ g)(x) = \{(0, -1)(-1, 4)(4, 0)\}$$

$$f(x) = \{(-4, -5)(0, 3)(1, 6)\} \quad (6)$$

$$g(x) = \{(6, 1)(-5, 0)(3, -4)\}$$

$$(g \circ f)(x) ; f(-4) = -5 \rightarrow g(-5) = 0$$

$$f(0) = 3 \rightarrow g(3) = -4$$

$$f(3) = -4 \rightarrow g(-4) = -5$$

$$(g \circ f)(x) = \{(-4, 0)(0, -4)(-4, -5)\}$$

$$(f \circ g)(x) ; g(6) = 1 \rightarrow f(1) = 6$$

$$g(-5) = 0 \rightarrow f(0) = 3$$

$$g(3) = -4 \rightarrow f(-4) = -5$$

$$(f \circ g)(x) = \{(6, 6)(-5, 3)(3, -5)\}$$

أوجد  $(h \circ g)(x), (g \circ h)(x)$  إن كان ذلك ممكناً :

$$h(x) = x - 4, g(x) = 3x \quad (8)$$

$$(h \circ g)(x) = h(3x) = 3x - 4$$

$$(g \circ h)(x) = g(x - 4) = 3(x - 4) = 3x - 12$$

$$h(x) = 3x^2, g(x) = x + 6 \quad (10)$$

$$(h \circ g)(x) = h(x + 6) = 3(x + 6)^2$$

$$= 3(x^2 + 12x + 36)$$

$$= 3x^2 + 36x + 108$$

$$(g \circ h)(x) = g(3x^2) = 3x^2 + 6$$

$$h(x) = x^2 + 3x + 2, g(x) = -2x \quad (12)$$

$$(h \circ g)(x) = h(-2x) = (-2x)^2 + 3(-2x) + 2$$

$$= 4x^2 - 6x + 2$$

$$(g \circ h)(x) = g(x^2 + 3x + 2)$$

$$= -2(x^2 + 3x + 2)$$

$$= -2x^2 - 6x - 4$$

إذا كان  $f(x) = x^2, g(x) = 5x, h(x) = x - 4$  فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$f(g(1)) \quad (١٤)$$

$$g(1) = 5 \rightarrow f(5) = 25$$

$$h(f(4)) \quad (١٦)$$

$$f(4) = 16 \rightarrow h(16) = 20$$

$$h(g(-3)) \quad (١٨)$$

$$g(-3) = -15 \rightarrow h(-15) = -11$$

$$f = \frac{2}{12}, m = \frac{f}{5280} \quad (٢٠)$$

$$(m \circ f) = m\left(\frac{n}{12}\right) = \frac{n}{12} \cdot 5280 = 440n$$



أوجد معكوس كل من العلاقات التالية :

$$\{(-5,1)(-5,-1)(-5,8)\} \quad (2)$$

العلاقة العكسية لها هي  $\{(1,-5)(-1,-5)(8,-5)\}$

$$\{(8,-2)(10,5)(12,6)(14,7)\} \quad (4)$$

العلاقة العكسية لها هي  $\{(-2,8)(5,10)(6,12)(7,14)\}$

$$\{(-3,9)(-2,4)(0,0)(1,1)\} \quad (6)$$

العلاقة العكسية لها هي  $\{(9,-3)(4,-2)(0,0)(1,1)\}$

أوجد معكوس الدالة التالية :  $g(x) = -3 + x$  (8)

• نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين  $x, y$  :  $y = 3 + x$

• نبدل بين كلا من  $x, y$  في المعادلة :  $x = 3 + y$

• نحل المعادلة بالنسبة للمتغير  $y$  :  $y = x - 3$

نضع  $f^{-1}(x) = x - 3$  بدلا من المتغير  $y$  :  $f^{-1}(x) = x - 3$

حدد إذا كانت كل دالتين فيما يلي دالة عكسية للأخرى :

$$f(x) = x + 6, g(x) = x - 6 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= f(x-6) \\ &= x-6+6 \\ &= x \end{aligned}$$

$$(gf)(x) = g(x+6)$$

$$\begin{aligned} &= x + 6 - 6 \\ &= x \end{aligned}$$

تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

حدد إذا كانت كل دالتين فيما يلي دالة عكسية للأخرى أم لا مع التوضيح :

$$h(x) = \frac{1}{13}x - 1, g(x) = 13x - 13 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (gh)(x) &= g\left(\frac{1}{13}x - 1\right) \\ &= 13\left(\frac{1}{13}x - 1\right) - 13 \\ &= x - 13 - 13 \\ &= x - 26 \end{aligned}$$

لا تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

$$f(x) = \frac{6}{7}x, g(x) = \frac{7}{6}x \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= f\left(\frac{7}{6}x\right) \\ &= \frac{6}{7}\left(\frac{7}{6}x\right) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (gf)(x) &= g\left(\frac{6}{7}x\right) \\ &= \frac{7}{6}\left(\frac{6}{7}x\right) = x \end{aligned}$$

تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

١٦ النقاط التي تمثل الطول كدالة بدلالة الوزن :

$$\{(121,63)(180,71)(140,67)(108,65)(165,72)\}$$

### دوال ومتباينات الجذر التربيعي

4-3

عين كلا من المجال والمدى للدوال التالية:

$$y = -\sqrt{x-1} \quad (2)$$

- القيمة الصغرى للمجال عند  $(1, 0)$
- نعمل جدولاً للقيم  $x$  حيث  $x \geq 1$

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 1   | 0   |
| 2   | -1  |
| 5   | -2  |
| 10  | -3  |

- قيمة  $a$  سالبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة  $f(x) = \sqrt{x}$  مع إزاحة بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين.

- المجال  $\{x; x \geq 1\}$
- المدى  $\{f(x); f(x) \geq 0\}$

$$y = 2\sqrt{x+2} \quad (3)$$

- القيمة الصغرى للمجال عند  $(-2, 0)$
- نعمل جدولاً للقيم  $x$  حيث  $x \geq -2$

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| -2  | 0   |
| -1  | 2   |
| 0   | 2.8 |
| 1   | 3.4 |
| 2   | 4   |

- قيمة  $a$  موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة  $f(x) = \sqrt{x}$  مع إزاحة بمقدار وحدتين إلى اليسار.

- المجال  $\{x; x \geq -2\}$
- المدى  $\{f(x); f(x) \geq 0\}$

$$y = \sqrt{x+7} - 4 \quad (5)$$

- القيمة الصغرى للمجال عند  $(-7, -4)$
- نعمل جدولاً للقيم  $x$  حيث  $x \geq -7$

| $x$ | $y$  |
|-----|------|
| -7  | -4   |
| -6  | -3   |
| -5  | -2.5 |
| 0   | -1.3 |
| 2   | -1   |

- قيمة  $a$  موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة  $f(x) = \sqrt{x}$  مع إزاحة بمقدار 4 وحدات إلى اليسار وأربع وحدات إلى الأسفل.

- المجال  $\{x; x \geq -7\}$



المدى  $\{f(x); f(x) \geq -4\}$

$$y \geq -\sqrt{6x} \quad (7)$$

• نمثل الحد  $y = -\sqrt{6x}$

• المجال  $\{x; x \geq 0\}$

• قيمة  $y$  اكبر من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة فوق الحد وضمن المجال.

$$y \leq \sqrt{x-5} + 3 \quad (8)$$

• نمثل الحد  $y = \sqrt{x-5} + 3$

• المجال  $\{x; x \geq 5\}$

• قيمة  $y$  اقل من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد وضمن المجال.

(١) الارتفاع  $h$ :

$$v = \sqrt{v + 64h}$$

$$70 = \sqrt{8^2 + 64h}$$

$$70 = \sqrt{64 + 64h}$$

$$4900 = 64 + 64h$$

$$4836 = 64h$$

$$75.5 = h$$

## 4-4 الجذر النوني

بسط كلا مما يأتي :

$$-\sqrt{324} \quad (2)$$

$$= -\sqrt{(18)^2} = -18$$

$$\sqrt[3]{0.512} \quad (6)$$

$$= \sqrt[3]{(0.8)^3} = 0.8$$

$$-\sqrt[4]{1296} \quad (8)$$

$$= -\sqrt[4]{6^4} = -6$$

$$\sqrt[5]{243x^{10}} \quad (10)$$

$$= \sqrt[5]{(3x^2)^5} = 3x^2$$

$$\sqrt{\frac{16m^2}{25}} \quad (14)$$

$$= \frac{\sqrt{16m^2}}{\sqrt{25}} = \frac{4m}{5}$$

$$\sqrt{(2x)^8} \quad (16)$$

$$= \sqrt{((2x^2)^2)^2} = 4x^4$$

$$\sqrt[3]{216p^3q^9} \quad (18)$$

$$= \sqrt[3]{(6pq^3)^3} = 6pq^3$$

$$\sqrt[3]{-27x^9y^{12}} \quad (20)$$

$$= \sqrt[3]{-(3x^3y^4)^3} = -i(3x^3y^4)$$

$$\sqrt[5]{-32x^5y^{10}} \quad (22)$$

$$= \sqrt[5]{-(2xy^2)^5} = -i(2xy^2)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(2x+1)^3} (24) \\ & = (2x+1) \\ & \sqrt[4]{(x-5)^8} (26) \\ & = \sqrt[4]{((x-5)^2)^4} = (x-5)^2 \\ & = x^2 - 10x + 25 \\ & \sqrt{x^2 + 10x + 25} (28) \\ & = \sqrt{(x+5)^2} = x+5 \end{aligned}$$

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{89} (30) \\ & = -9.434 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{-4} (32) \\ & = 1.587i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{-0.1} (34) \\ & = 0.631i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{(0.94)^2} (36) \\ & = 0.970 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (38) \\ & \text{محيط المثلث} = 52 = 20 + 17 + 15 \\ & \text{نصف المحيط} \quad (s) = 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{26(26-15)(26-17)(26-20)} \\ & = \sqrt{15444} = 124.3 \end{aligned}$$

#### العمليات على العبارات الجذرية

4-5

بسط كل عبارة جذرية مما يلي :

$$\begin{aligned} & \sqrt{540} (1) \\ & = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 6\sqrt{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{128} (3) \\ & = \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = 4\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{-5000} (5) \\ & = \sqrt[3]{10^3 \cdot -1.5} = 10i\sqrt[3]{-1.5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{125t^6w^2} (7) \\ & = 5t^2\sqrt[3]{w^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{8g^3k^8} (9) \\ & = 2g\sqrt[3]{k^8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{11}{9}} \quad (11) \\ & = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3} \end{aligned}$$



$$\sqrt{\frac{1}{128}c^4d^7} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{8}c^2d^3\sqrt{\frac{d}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{9a^5}{64b^6}} \quad (15)$$

$$= \frac{3a^2\sqrt{a}}{8b^2}$$

$$(3\sqrt{15})(-4\sqrt{45}) \quad (16)$$

$$= -12\sqrt{(15)(45)}$$

$$= -12\sqrt{675}$$

$$\sqrt{810} + \sqrt{240} - \sqrt{250} \quad (18)$$

$$= \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 9^2} + \sqrt{4^2 \cdot 3 \cdot 5} - \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 5^2}$$

$$= 9\sqrt{10} + 4\sqrt{15} - 5\sqrt{10}$$

$$= 4\sqrt{10} + 4\sqrt{15}$$

$$8\sqrt{48} - 6\sqrt{75} + 7\sqrt{80} \quad (20)$$

$$= 8\sqrt{3 \cdot 4^2} - 6\sqrt{5^2 \cdot 3} + 7\sqrt{5 \cdot 4^2}$$

$$= 32\sqrt{3} - 30\sqrt{3} + 28\sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{3} + 28\sqrt{5}$$

$$(3 - \sqrt{7})^2 \quad (22)$$

$$= 9 - 3\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 7$$

$$= 16 - 6\sqrt{7}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} - \sqrt{10}) \quad (24)$$

$$= (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2$$

$$= 2 - 10 = -8$$

$$(\sqrt{3} + 4\sqrt{7})^2 \quad (26)$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{7} + 112$$

$$= 8\sqrt{21} + 115$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} \quad (28)$$

$$= \frac{\sqrt{15}+2}{5-4} = \sqrt{15} + 2$$

$$= \frac{5+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} \quad (30)$$

$$= \frac{20-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}-3}{16-3} = \frac{17-\sqrt{3}}{13}$$

$$s = 2\sqrt{5l} \quad (32)$$

$$l = 85 \rightarrow s = 2\sqrt{5(85)}$$

$$= 2\sqrt{425}$$

$$= 2(20.6) = 41.2 \text{ m/h}$$

اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية والعبارة الجذرية على الصورة الأسية فيما يأتي : (1)  $5^{\frac{1}{3}}$

$$= \sqrt[3]{5}$$

$$m^{\frac{4}{7}} (3)$$

$$= \sqrt[7]{m^4}$$

$$\sqrt{79} (5)$$

$$= 79^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{27m^6n^4} (7)$$

$$= 3m^2n^{\frac{4}{3}}$$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي :

$$\sqrt[4]{81} (9)$$

$$= \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$8^{\frac{5}{3}} (11)$$

$$= \sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{(32)^3} = 32$$

$$(-64)^{\frac{2}{3}} (13)$$

$$= \sqrt[3]{-(64)^2} = \sqrt[3]{(16)^3} = 16$$

$$\left(\frac{125}{216n}\right)^{\frac{2}{3}} (15)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{64^{\frac{2}{3}}}{343^{\frac{2}{3}}n} (16)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{64^2}}{\sqrt[3]{343^2}} = \frac{16}{49}$$

بسط كل عبارة مما يأتي :

$$g^{\frac{4}{7}} \cdot g^{\frac{3}{7}} (18)$$

$$= g^{\frac{4}{7} + \frac{3}{7}} = g^{\frac{7}{7}} = g$$

$$(u^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{5}} (20)$$

$$= u^{\frac{4}{15}}$$

$$b^{\frac{-3}{5}} (22)$$

$$= \frac{1}{b^{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{b^{\frac{2}{5}}}{b^{\frac{2}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{b^{\frac{3}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{b}$$

$$\frac{(q)^{\frac{3}{5}}}{q^{\frac{2}{5}}} (23)$$

$$= q^{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}} = q^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[4]{6} \cdot 3\sqrt[4]{6} (25)$$



$$= 3\sqrt[4]{36}$$

$$I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

$$= \left(\frac{500}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{50} = 7.0$$

## 4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل كل معادلة مما يأتي :

$$\sqrt{x} = 8(1)$$

$$x = 64$$

$$\sqrt{2p} + 3 = 10 \quad (3)$$

$$7 = \sqrt{2p}$$

$$49 = 2p$$

$$24.5 = p$$

$$(c)^{\frac{1}{2}} + 6 = 9(5)$$

$$\sqrt{c} = 3$$

$$c = 9$$

$$\sqrt[3]{d+2} = 7(7)$$

$$343 = d+2$$

$$341 = d$$

$$6 + \sqrt[3]{q-4} = 9(9)$$

$$27 = q-4$$

$$31 = q$$

$$\sqrt{2m-6} - 16 = 0(11)$$

$$16 = \sqrt{2m-6}$$

$$256 = 2m-6$$

$$131 = m$$

$$\sqrt{8n-5} - 1 = 2(13)$$

$$3 = \sqrt{8n-5}$$

$$9 = 8n-5$$

$$\frac{7}{4} = n$$

$$(3g+1)^{\frac{1}{2}} - 6 = 4(15)$$

$$(3g+1)^{\frac{1}{2}} = 10$$

$$3g+1 = 100$$

$$3g = 99$$

$$g = 33$$

$$\sqrt{2d-5} = \sqrt{d-1}(17)$$

$$2d-5 = d-1$$

$$2d-d = -1+5$$

$$d = 4$$

$$\sqrt{6x-4} = \sqrt{2x+10} \quad (19)$$

$$6x-4 = 2x+10$$

$$6x-2x = 10+4$$

$$4x = 14$$

$$x = \frac{7}{2}$$

حل كل متباينة مما يأتي :

$$3\sqrt{a} \geq 12 \quad (21)$$

$$a \geq 0$$

$$a \geq 16$$

$$\sqrt{x-1} < 2 \quad (23)$$

$$x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$x-1 < 4$$

$$x < 5$$

$$\sigma = \sqrt{v} \quad (٢٥)$$

$$15 = \sqrt{v}$$

$$v = 225$$



# مراجع



- ١ - مبادئ أساسية في التحليل العددي .د.فتحي بن حسن فياض، المدرسة الوطنية للعلوم الاعلامية - تونس.



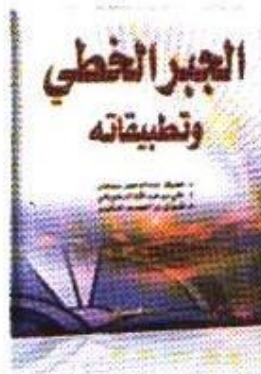
- ٢ - تمارين ومسائل محلولة في الرياضيات، ابن العامر عادل - BAC مكتبة الجامعة.



- ٣ - مبادئ الرياضيات لتأهيل المعلمين: عدنان محمد عوض: دار الكتاب الجديد المتحدة مكتبة الرياضيات التطبيقية الجامعية.



- ٤ - نحن و الرياضيات، تأليف: فايز فوق العادة ، دار الفكر المعاصر .



- ٥ - معروف عبد الرحمن سمحان، علي بن عبد الله السحبياني، فوزي بن أحمد الذكير مكتبة العبيكان ٢٠٠١.