المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

رياضيات ٥

التعليم الثانوي
(نظام المقررات)

(مسار العلوم الطبيعية)

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٤٣ - ٢٠٢١

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ٥ : المستوى الخامس المسار العلمي / وزارة التعليم –
الرياض، ١٤٣٩هـ .
٢١٢ص ؛ ٢١ X ٢٧,٥ سم
ردمك : ٩٧٨-٦٠٣-٥٠٨-٦٥٣-٠
١ ـ الرياضيات ـ كتب دراسية ٢ ـ التعليم الثانوي ـ مناهج ـ السعودية
أ . العنوان
ديوي ٥١٠,٧١٢ **٩٣٤٥/١٤٣٩**

رقم الإيداع : ٩٣٤٥/١٤٣٩
ردمك : ٩٧٨-٦٠٣-٥٠٨-٦٥٣-٠

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين"

IEN.EDU.SA

تواصل بمقترحاتك لتطوير الكتاب المدرسي

FB.T4EDU.COM

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن هذه المناهج والكتب سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

الفهرس

الفصل 1 تحليل الدوال

الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفهرس

الفصل 3 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل 4 القطوع المخروطية

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل

1

تحليل الدوال

Analyzing Functions

فيما سبق:

درستُ الدوال وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أتعرف الدوال وخصائصها وتمثيلاتها البيانية.
- أتعرف الدوال الرئيسة، والتحويلات الهندسية عليها.
- أجد كلًّا من: متوسط معدل تغير دالة، تركيب الدوال، الدالة العكسية.

لماذا؟

إدارة أعمال: تُستعملُ الدوالُ في عالم الأعمال والتجارة لتحليل التكلفة، والتنبُّؤ بالمبيعات، وحساب الأرباح، وتوقُّع التكاليف، وتقدير الانخفاض في القوة الشرائية ... إلخ.

قراءة سابقة: كوّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

مثّل كلًّا من المتباينات الآتية على خط الأعداد:

(1 $x > -3$ **(2** $x \leq -2$

(3 $x \leq -5$ **(4** $x > 1$

(5 $7 \geq x$ **(6** $-4 < x$

حل كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:

(7 $y - 3x = 2$ **(8** $y + 4x = -5$

(9 $2x - y^2 = 7$ **(10** $y^2 + 5 = -3x$

(11 $9 + y^3 = -x$ **(12** $y^3 - 9 = 11x$

(13 **حلوى:** يستعملُ صانع حلوى المعادلة $n = 12D$ لحساب العدد الكلي المبيع من قطع الحلوى؛ حيث D عدد عبوات الحلوى، و n العدد الكلي من قطع الحلوى التي تم بيعها. كم عبوة من الحلوى تم بيعها إذا كان عدد القطع المبيعة 312 قطعة؟

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:

(14 $3y - 4, y = 2$ **(15** $2b + 7, b = -3$

(16 $x^2 + 2x - 3, x = -4a$ **(17** $5z - 2z^2 + 1, z = 5x$

(18 $-4c^2 + 7, c = 7a^2$ **(19** $2 + 3p^2, p = -5 + 2n$

(20 **درجات حرارة:** تُستعملُ المعادلة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ للتحويل بين درجات الحرارة بالقياس الفهرنهايتي والسيليزي؛ حيث تمثّل C الدرجات السيليزية، و F الدرجات الفهرنهايتية، فإذا كانت درجة الحرارة 73°F ، فأوجد درجة الحرارة السيليزية المقابلة لها مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

مراجعة المفردات

القانون العام (quadratic formula):

تعطى حلول المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالصيغة:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ، حيث $a \neq 0$

الميل (slope):

يعطي الميل m لمستقيم يحوي النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بالصيغة: $m = \frac{y_2, y_1}{x_2, x_1}$ ، حيث $x_2 \neq x_1$.

كثيرة الحدود بمتغير واحد (polynomial in one variable):

هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ، حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ، n عدد كلي.

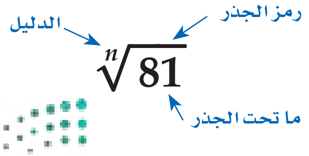
الدالة النسبية (rational function):

هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x), b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$

الجذر النوني (nth root):

العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

ويشير الرمز $\sqrt[n]{\quad}$ إلى الجذر النوني.



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-1

الدوال
Functions

فيما سبق:

درستُ مجموعات الأعداد ورموزها. (مهارة سابقة)

والآن:

- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أتعرف الدوال، وأحسب قيمها، وأجد مجالاتها.

المفردات:

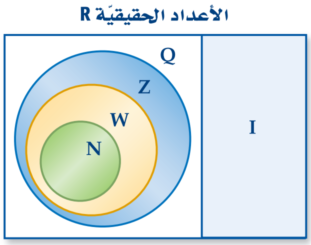
الصفة المميزة للمجموعة	set–builder notation
رمز الفترة	interval notation
الدالة	function
رمز الدالة	function notation
المتغير المستقل	independent variable
المتغير التابع	dependent variable
الدالة المتعددة التعريف	piecewise-defined function

لماذا؟

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية: تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

مفهوم أساسي الأعداد الحقيقية



الرمز	المجموعة	أمثلة
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205...$
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$

يمكنك وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**؛ إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز " | " حيث، والرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في .

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 16, x \in Z\}$$

الأعداد x حيث...

x لها هذه الخصائص...

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

مثال 1 استعمال الصفة المميزة

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, ...\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \geq 8, x \in W\}$ وتقرأ مجموعة الأعداد x، حيث x أكبر من أو تساوي 8، وَ x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على 2− وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

✓ تحقق من فهمك

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ 1B) $x \leq -3$ 1C) $-1 \leq x \leq 5$

قراءة الرياضيات

غير محدودة:
تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقُّف).

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	**رمز الفترة**	**المتباينة**	**رمز الفترة**
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

مثال 2 استعمال رمز الفترة

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \le 16$ $\quad$ $(-8, 16]$

b) $x < 11$ $\quad$ $(-\infty, 11)$

c) $x \le -16$ أو $x > 5$ $\quad$ $(-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

✓ تحقق من فهمك

2A) $-4 \le y < -1$ $\quad$ 2B) $a \ge -3$ $\quad$ 2C) $x < -2$ أو $x > 9$

إرشادات للدراسة

الرمزان $\cup$ ، $\cap$:
يُقرأ الرمز "$\cup$" (اتحاد)، ويعني: جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين.
يُقرأ الرمز "$\cap$" (تقاطع)، ويعني: جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.

تمييز الدالة: تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة بين مجموعتين من الأعداد الحقيقية هي:

1) **لفظيًّا:** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.
مثلًا: يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه قيمةً بمقدار 2 من المدى.

2) **عدديًّا:** جدول من القيم أو مخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y).
مثلًا: $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًّا:** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.

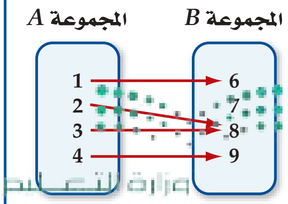
4) **جبريًّا:** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x , y لكل زوج من الأزواج المرتبة. مثلًا: $y = x + 2$

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مفهوم أساسي الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثّلة في المخطط المجاور تمثّل دالةً.
حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.
المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.
وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.
المدى $= \{6, 8, 9\}$.



إرشادات للدراسة

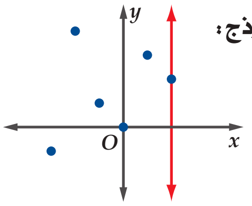
المجال والمدى:
في هذا المفهوم الأساسي، يمكن أن يستعمل الرمز D للتعبير عن المجال، والرمز R للتعبير عن المدى، أي أن:
$D = \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{6, 8, 9\}$

كما يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين، وهندسيًّا لا يمكن لنقطتين من نقاط الدالة أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

النموذج:



إرشادات للدراسة

جدوليًّا : إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن إحدى قيم x ترتبط بأكثر من قيمة من قيم y ، كما يوضح الجدول أدناه:

x	y
−2	−4
3	−1
3	4
5	6
7	9

مـثال 3 تحديد العلاقات التي تمثّل دوال

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثِّل دالةً في x أم لا:

a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

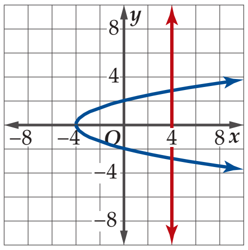
ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثل دالةً في x .

b)

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ، وعليه فإن y تمثل دالةً في x .

c)



بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة ، فإنّ y لا تمثّل دالةً في x .

إرشادات للدراسة

دوال تتكرر فيها قيم y: لا يمكن أن ترتبط أكثر من قيمة لـ y بقيمة واحدة لـ x في الدالة، بينما يمكن أن ترتبط قيمة واحدة لـ y بأكثر من قيمة لـ x كما في المثال 3b .

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لـ y.

$$y^2 - 2x = 5$$ المعادلة الأصلية

$$y^2 = 5 + 2x$$ أضف $2x$ لكلا الطرفين

$$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

y لا تمثّل دالةً في x ؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من −2.5 ترتبط بقيمتين لـ y ، إحداها موجبة ، والأخرى سالبة.

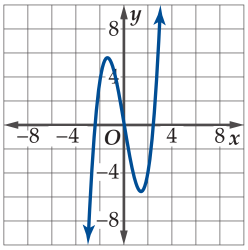
☑ تحقق من فهمك

3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C)



3D) $3y + 6x = 18$

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة**، ويُقرأ (f الـ x) ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

الدالة المرتبطة بالمعادلة	المعادلة
$f(x) = -6x$	$y = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيّرًا مستقلًّا**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

a) $f(6)$

لإيجاد $f(6)$، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$$f(x) = x^2 + 8x - 24 \quad \text{الدالة الأصلية}$$
$$f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24 \quad \text{عوِّض 6 مكان } x$$
$$= 36 + 48 - 24 \quad \text{بسّط}$$
$$= 60 \quad \text{بسّط}$$

b) $f(-4x)$

$$f(x) = x^2 + 8x - 24 \quad \text{الدالة الأصلية}$$
$$f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24 \quad \text{عوِّض } -4x \text{ مكان } x$$
$$= 16x^2 - 32x - 24 \quad \text{بسّط}$$

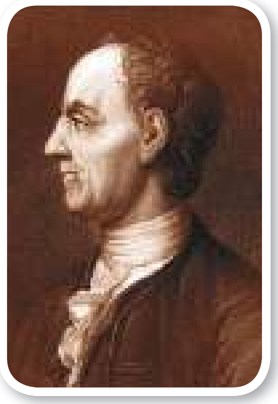
c) $f(5c + 4)$

$$f(x) = x^2 + 8x - 24 \quad \text{الدالة الأصلية}$$
$$f(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24 \quad \text{عوِّض } (5c + 4) \text{ مكان } x$$
$$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24 \quad \text{فك الأقواس } (5c + 4)^2 \text{ و } 8(5c + 4)$$
$$= 25c^2 + 80c + 24 \quad \text{بسّط}$$

✓ تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

4A) $f(12)$　　**4B)** $f(6x)$　　**4C)** $f(-3a + 8)$



الربط مع تاريخ الرياضيات

ليونارد أويلر (1707م – 1783م)
عالم رياضي سويسري كتب أكثر من 800 بحث في الرياضيات، وهو أول من استعمل رمز الدالة $f(x)$.

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًّا.

مثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًّا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $f(x) = \dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$

تكون العبارة $\dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$ غير معرّفة إذا كان المقام صفرًا، وبحل المعادلة $x^2 - 7x = 0$ ، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x = 0$ و $x = 7$، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$ و $x = 7$ ، أي $D = \{x \mid x \neq 0, x \neq 7, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, 0) \cup (0, 7) \cup (7, \infty)$.

b) $g(t) = \sqrt{t - 5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t - 5 \geq 0$ ؛ أي أن مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 أي أن $D = \{x \mid x \geq 5, x \in R\}$ أو $D = [5, \infty)$.

إرشادات للدراسة

مجال الدالة:
يمكنك كتابة مجال الدالة في المثال 5a بالطريقة المختصرة بالشكل:
$D = R - \{0, 7\}$

إرشادات للدراسة

تسمية الدوال:
يمكنك التعبير عن الدالة ومتغيرها المستقل برموز أخرى فمثلًا، $f(x) = \sqrt{x - 5}$ و $g(t) = \sqrt{t - 5}$ يعبران عن الدالة نفسها.

c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

تكون هذه الدالة معرّفة إذا كان المقام معرّفًا، وقيمته لا تساوي صفرًا، وهذا يعني أنها معرفة عندما يكون $x^2 - 9 > 0$ ، وعليه فإن $x^2 > 9$ وهذا يعني أن $|x| > 3$ ؛ لأن $\sqrt{x^2} = |x|$ ، ويكون مجال $h(x)$ هو $D = \{x \mid x < -3$ أو $x > 3, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

✓ تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$ 5B) $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$ 5C) $g(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوالّ المتعددة التعريف**.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 \ , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 \ , & 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 \ , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ تعريف الدالة في الفترة $66 \le x \le 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ عوِّض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ بسِّط

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لايجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$ تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ عوِّض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ بسِّط

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

✓ تحقق من فهمك

6) **سرعة:** إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t \ , & 0 \le t \le 15 \\ 60 \ , & 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 \ , & 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ 6B) $v(15)$ 6C) $v(245)$

إرشادات للدراسة

سرعة السيارة:
تقاس سرعة السيارة عادة بالميل أو بالكيلومتر لكل ساعة، ويمكن أن تتغير كل ثانية ما لم يستعمل مثبت السرعة.

تدرب وحل المسائل

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 1, 2)

1) $x > 50$
2) $x < -13$
3) $x \leq -4$
4) $\{-3, -2, -1, \ldots\}$
5) $-31 < x \leq 64$
6) $x > 21$ أو $x < -19$
7) $x \geq 67$ أو $x \leq 61$
8) $x > 86$ أو $x \leq -45$
9) المضاعفات الموجبة للعدد 5
10) $x \geq 32$

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالةً في x أم لا: (مثال 3)

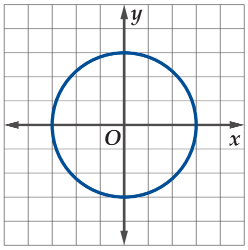
11) المتغير المستقل x يمثّل رقم الحساب في البنك، والمتغير y يمثّل الرصيد في الحساب.

12)

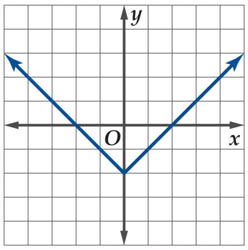
x	0.01	0.04	0.04	0.07	0.08	0.09
y	423	449	451	466	478	482

13) $\frac{1}{x} = y$
14) $x^2 = y + 2$
15) $\sqrt{48y} = x$
16) $\frac{x}{y} = y - 6$

17)



18)



أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية: (مثال 4)

19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$
a) $g(9)$
b) $g(3x)$
c) $g(1 + 5m)$

20) $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$
a) $h(4)$
b) $h(-2y)$
c) $h(5b + 3)$

21) $f(t) = \frac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$
a) $f(-6)$
b) $f(4t)$
c) $f(3 - 2a)$

22) $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4}$
a) $g(-2)$
b) $g(5x)$
c) $g(8 - 4b)$

23) $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$
a) $g(-2)$
b) $g(3m)$
c) $g(4m - 2)$

24) $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$
a) $t(-4)$
b) $t(2x)$
c) $t(7 + n)$

25) **مبيعات:** قُدرت مبيعات شركة للسيارات خلال خمس سنوات بالدالة: $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$، حيث t الزمن بالسنوات، وكانت المبيعات الفعلية موضحة في الجدول المجاور. (مثال 4)

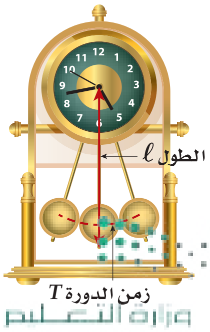
السنة	المبيعات بملايين الريالات
1	1
2	3
3	14
4	74
5	219

a) أوجد $f(1)$.
b) أوجد $f(5)$.
c) هل تعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنة الأولى، أم في السنة الأخيرة؟ برِّر إجابتك.

حدّد مجال كل دالة مما يأتي: (مثال 5)

26) $f(x) = \frac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$
27) $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$
28) $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$
29) $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$
30) $f(a) = \frac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$
31) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 1}$

32) **فيزياء:** يعطى زمن الدورة T لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ طول البندول، فهل تمثّل T دالة في ℓ؟ إذا كانت كذلك فحدِّد مجالها، وإذا لم تكن دالة فبيِّن السبب. (مثال 5)



أوجد $f(-5)$ وَ $f(12)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين: (مثال 6)

(33
$$f(x)=\begin{cases}-4x+3 & , \quad x<3\\ -x^3 & , \quad 3\le x\le 8\\ 3x^2+1 & , \quad x>8\end{cases}$$

(34
$$f(x)=\begin{cases}-15 & , \quad x<-5\\ \sqrt{x+6} & , \quad -5\le x\le 10\\ \frac{2}{x}+8 & , \quad x>10\end{cases}$$

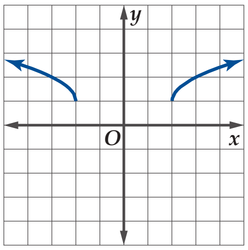
(35 **عمل:** تمثل الدالة $T(x)$ أدناه الربح (بالريال) الذي تكسبه شركة توزيع لأجهزة هاتف:

$$T(x)=\begin{cases}2.1x & , \quad 0<x\le 7000\\ 500+2.4x & , \quad 7000<x\le 20000\\ 800+3x & , \quad 20000<x\le 80000\end{cases}$$

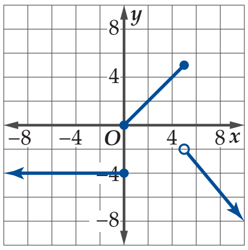
حيث x تمثّل عدد الأجهزة الموزَّعة، فأوجد: $T(7000)$, $T(10000)$, $T(50000)$.

معتمدًا على اختبار الخط الرأسي ، حدِّد ما إذا كان كل من التمثيلين الآتيين يمثّل دالة أم لا، وبرِّر إجابتك.

(36



(37



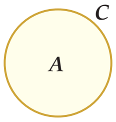
(38 **رياضة:** تتكون مسابقة رياضية من ثلاث مراحل: سباحة مسافة 0.4 mi، وقيادة دراجة هوائية مسافة 5 mi، وجري مسافة 2.6 mi . فإذا كان معدل سرعة عزام في كل مرحلة من المراحل الثلاث كما في الجدول أدناه:

المرحلة	معدل السرعة
السباحة	4 mi/ h
قيادة الدراجة	20 mi/ h
الجري	6 mi/ h

a) اكتب دالة متعددة التعريف تمثّل المسافة D التي قطعها عزام بدلالة الزمن t.

b) حدِّد مجال الدالة.

(39 **هندسة:** يمثّل الشكل أدناه دائرة مساحتها A ومحيطها C.



a) اكتب المساحة كدالة في المحيط.

b) أوجد $A(4), A(0.5)$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة.

c) ما تأثير زيادة المحيط في المساحة؟

(40 **حسابات:** تتناقص قيمة أجهزة الحاسوب بعد شرائها مع مرور الزمن. وتُستعملُ الدوال الخطية لتمثيل هذا التناقص. فإذا كانت $v(t)=1800-30t$ تمثّل قيمة حاسوب بالريال، بعد t شهر من شراءه. فحدِّد مجال هذه الدالة.

أوجد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f(a+h)$, $f(a)$ ، حيث $h\neq 0$ لكلٍّ مما يأتي:

(41 $f(x)=-5$

(42 $f(x)=\sqrt{x}$

(43 $f(x)=\frac{1}{x+4}$

(44 $f(x)=x^2-6x+8$

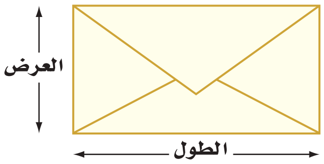
(45 $f(x)=-14x+6$

(46 $f(x)=x^3+9$

(47 $f(x)=5x^2$

(48 $f(x)=x^3$

(49 **صناعة:** في أحد المعامل الوطنية يتم صنع أغلفة بريدية متفاوتة الأبعاد، بحيث تكون نسبة طول الغلاف إلى عرضه من 1.3 إلى 2.5، فإذا كانت أصغر قيمة لطول الأغلفة المنتجة 5 in ، وأكبر قيمة $11\frac{1}{2}$ in ، فأجب عما يأتي:



a) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في طوله ℓ ، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 1.8 ، ثم اكتب مجال الدالة.

b) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في عرضه h، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 2.1 ، ثم اكتب مجال الدالة.

c) أوجد مساحة الغلاف عند أكبر طول ممكن له ، وأكبر نسبة بين طوله وعرضه.

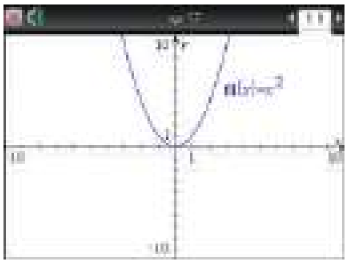
في كلٍّ من العلاقتين الآتيتين، حدّد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا. برِّر إجابتك.

(50 $x=|y|$

(51 $x=y^3$

52) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى الدالة $f(x) = x^n$، حيث $n \in N$.

a) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة $f(x) = x^n$ بيانيًّا لقيم n الصحيحة من 1 إلى 6.



b) **جدوليًّا:** تنبأ بمدى كل دالة من الدوال التي مثَّلتها في الفرع **a**، واعرضه في جدول يتضمن قيم n، والمدى المرتبط بكل منها.

c) **لفظيًّا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n زوجيًّا.

d) **لفظيًّا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n فرديًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **اكتشف الخطأ:** أراد كلّ من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. فقال عبد الله: إن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. في حين قال سلمان: أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

54) اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x + 3)(x + 1)(x - 5)}$ باستعمال كل من رمز الفترة والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟

55) **تحدٍّ:** إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(1) = 1, G(2) = 2, G(3) = 3$ و $G(x+1) = \frac{G(x-2)\,G(x-1)+1}{G(x)}$ لكل $x \geq 3$، فأوجد $G(6)$.

تبرير: أيُّ الجمل الآتية تصف الدالة المعرَّفة من المجموعة X إلى المجموعة Y بشكل صحيح، وأيها خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فأعد كتابتها لتصبح صحيحة.

56) يرتبط كل عنصر من Y بعنصر واحد من X.

57) لا يرتبط عنصران أو أكثر من X بالعنصر نفسه من Y.

58) لا يرتبط عنصران أو أكثر من Y بالعنصر نفسه من X.

اكتب: وضّح كيف يمكنك تحديد الدالة من خلال:

59) جملة لفظية تبيّن العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى.

60) مجموعة أزواج مرتبة.

61) جدول قيم.

62) تمثيل بياني.

63) معادلة.

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

64) $\frac{2r - 4}{r - 2}$

65) $\frac{r^2 - 7r - 30}{r^2 - 5r - 24}$

66) $\frac{y}{4} - \frac{4y}{3x} + \frac{3y}{4x}$

67) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{16}}$

68) $\frac{12x^2 + 11x + 2}{8x^2 + 14x + 3} \cdot \frac{6x^2 - 11x + 4}{6x^2 + x - 2}$

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

69) $\frac{8}{x} = 1 + \frac{2}{x - 2}$

70) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

حل كلًّا من المتباينتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

71) $\frac{x + 1}{x - 3} - 1 \leq 2$

72) $\frac{6}{x} + 2 \geq 0$

تدريب على اختبار

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا:

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

74) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة:

$$h(x) = \frac{\sqrt{2x - 3}}{x - 5}$$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-2

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

Analyzing Graphs of Functions and Relations

فيما سبق:

درست الدوال وكيفية إيجاد قيمها. (الدرس 1–1)

والآن:

- أستعملُ التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة ، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطعها y ، وأصفارها.
- أستكشف تماثل منحنيات الدوال، وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

المفردات:

الأصفار	zeros
الجذور	roots
التماثل حول مستقيم	line symmetry
التماثل حول نقطة	point symmetry
الدالة الزوجية	even function
الدالة الفردية	odd function

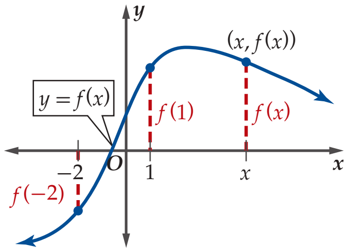
لماذا؟

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلًا يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1433 – 1440) هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07 \text{ , } 1 \leq x \leq 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1433هـ . ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

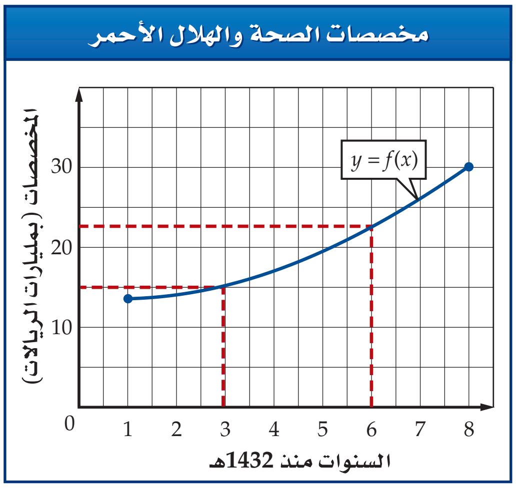
تحليل التمثيل البياني للدالة: التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ ، حيث x أحد عناصر مجال f . وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. ومن ثم تكون القيمة المطلقة لقيمة الدالة مساوية طول العمود الواصل من نقطة على المحور x إلى منحنى الدالة، كما هو موضح في الشكل المجاور.



يُستعملُ التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

مثال 1 من واقع الحياة تقدير قيم الدوال

مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:



a) قدّر قيمة المخصصات سنة 1438 هـ ، ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا.

السنة 1438 هـ هي السنة السادسة بعد 1432 هـ ، لذا تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1438هـ هي 23 مليار ريال تقريبًا.

وللتحقُّق من ذلك جبريًّا، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

لذا يُعدُّ التقريب 23 مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولًا.

b) قدّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا.

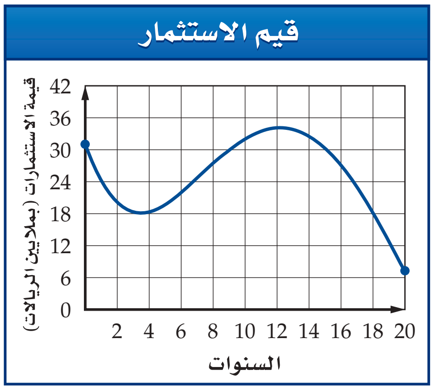
يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3 ، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1435 هـ . وللتحقق جبريًّا أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.5654(3) + 14.07 \approx 15.4149$$

لذا تعد السنة التقريبية 1435هـ معقولة.

✓ تحقق من فهمك

1) **استثمار:** تمثل الدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$ تقديرًا لاستثمارات أحد رجال الأعمال في السوق المحلية؛ حيث $v(d)$ قيمة الاستثمارات بملايين الريالات في السنة d.



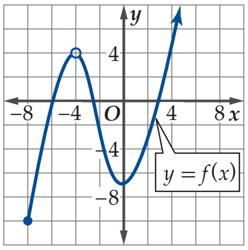
1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة الاستثمارات في السنة العاشرة. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد السنوات التي بلغت فيها قيمة الاستثمارات 30 مليون ريال. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

لا يقتصر استعمال منحنى الدالة على تقدير قيمها، إذ من الممكن استعماله لإيجاد مجال الدالة ومداها. حيث يُعدُّ منحنى الدالة ممتدًّا من طرفيه إلا إذا حُدِّد بنقطة أو دائرة.

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور .



المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f.
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

مما سبق يكون مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid x \ge -8, x \ne -4, x \in R\}$.

المدى:

إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10 ، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

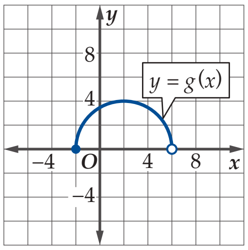
إرشادات للدراسة

اختيار التدريج المناسب:

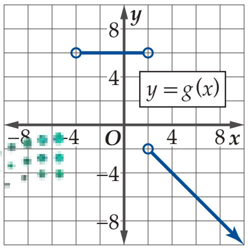
اختر تدريجًا مناسبًا لكلٍّ من المحورين x, y للتمكن من رؤية منحنى الدالة بوضوح. لاحظ اختلاف التمثيل الظاهر للدالة $f(x) = x^4 - 20x^3$ أدناه.

✓ تحقق من فهمك

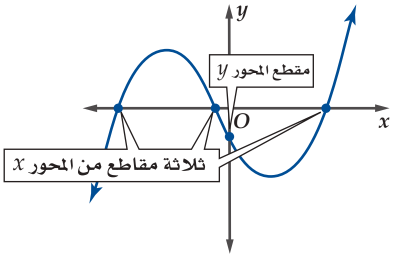
2A)



2B)



النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ في معادلة الدالة، كما يمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.

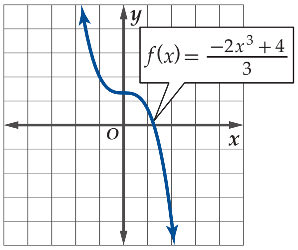


ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًّا، فإننا نوجد $f(0)$.

مـثال 3 إيجاد المقطع y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:

a)



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريبًا، وعليه فإن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

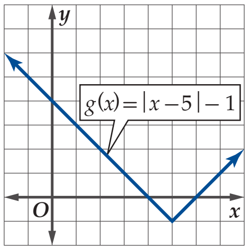
الحل جبريًّا:

أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(\textcolor{red}{0}) = \frac{-2(\textcolor{red}{0})^3 + 4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

أي أن المقطع y هو $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$.

b)



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$، وعليه فإن المقطع y هو 4.

الحل جبريًّا:

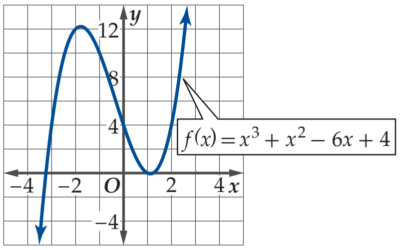
أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(\textcolor{red}{0}) = |\textcolor{red}{0} - 5| - 1 = 4$$

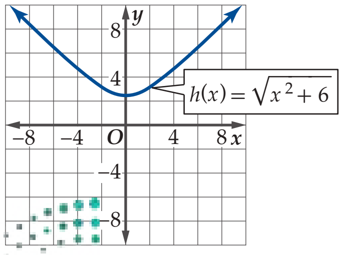
أي أن المقطع y هو 4.

☑ تحقق من فهمك

3A)



3B)

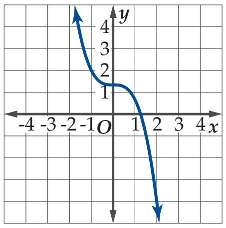


تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار** الدالة، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور** المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة f، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

إرشادات للدراسة

تدريج المحورين x , y:

إذا لم يظهر التدريج على المحورين x , y في التمثيل البياني، فذلك يعني أن التدريج بالوحدات. انظر المثال 3a:

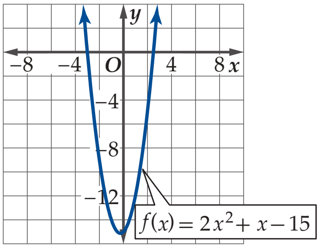


إرشادات للدراسة

تسمية المحورين في التمثيل البياني:

عندما تُسمى المحورين في التمثيل البياني، فإن المتغير الذي يدل على المجال يكون على المحور x، والمتغير الذي يدل على المدى يكون على المحور y. ويمكن أن تستعمل متغيرات كثيرة لكل من المجال والمدى. ولكن للتسهيل نسمي عادةً المحور الأفقي x والرأسي y.

مثال 4 إيجاد الأصفار



استعمل التمثيل البياني المجاور، الذي يمثل الدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.

التقدير من المنحنى:
يتضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 وَ 2.5 تقريبًا.
لذا فإن صفري الدالة f هما -3 وَ 2.5

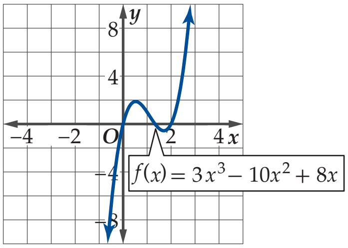
الحل جبريًّا:

$2x^2 + x - 15 = 0$			ضع $f(x) = 0$
$(2x - 5)(x + 3) = 0$			حلّل
$2x - 5 = 0$	أو	$x + 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 2.5$	أو	$x = -3$	حل كل معادلة

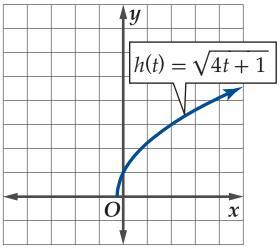
أي أن جذري المعادلة $2x^2 + x - 15 = 0$ هما -3 وَ 2.5 وهما صفرا الدالة f .

تحقق من فهمك

(4A

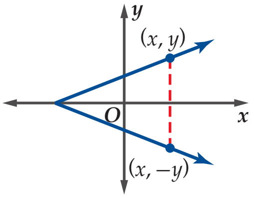
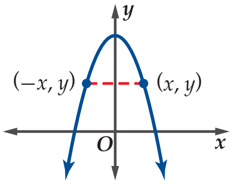
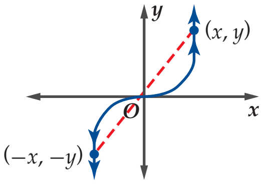


(4B



التماثل: يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** أي إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها 180° حول النقطة فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأهم أنواع التماثل:

مفهوم أساسي اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور x، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور y، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

إرشادات للدراسة

تماثل العلاقات والدوال:
يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

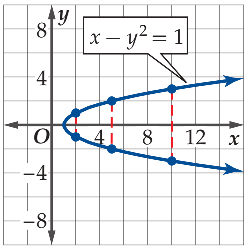
إرشادات للدراسة

التماثل: من الممكن أن يكون للتمثيل البياني الواحد أكثر من نوع تماثل.

مثال 5 اختبار التماثل

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقق منها جبريًا.

a) $x - y^2 = 1$



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًّا:

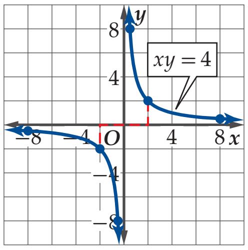
يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x:

x	2	2	5	5	10	10
y	1	−1	2	−2	3	−3
(x, y)	(2, 1)	(2, −1)	(5, 2)	(5, −2)	(10, 3)	(10, −3)

التحقق جبريًّا:

بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

b) $xy = 4$



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًّا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

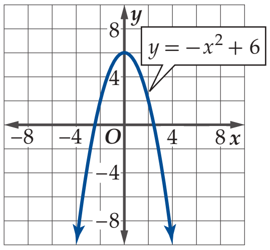
x	−8	−2	−0.5	0.5	2	8
y	−0.5	−2	−8	8	2	0.5
(x, y)	(−8, −0.5)	(−2, −2)	(−0.5, −8)	(0.5, 8)	(2, 2)	(8, 0.5)

التحقق جبريًّا:

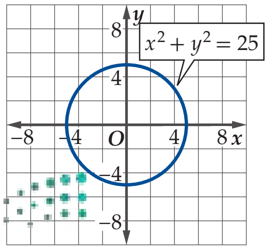
بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

✓ تحقق من فهمك

5A)



5B)



يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان.

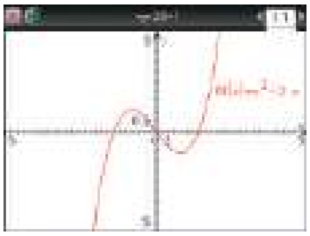
مفهوم أساسي الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

a) $f(x) = x^3 - 2x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، لذا فهي دالة فردية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

$= -x^3 + 2x$ بسّط

$= -(x^3 - 2x)$ خاصية التوزيع

$= -f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

b) $f(x) = x^4 + 2$

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y، لذا فهي دالة زوجية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

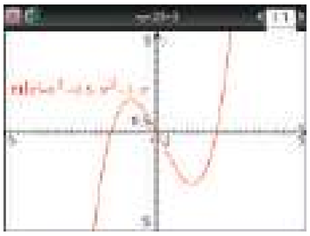
$f(-x) = (-x)^4 + 2$ عوّض $-x$ مكان x

$= x^4 + 2$ بسّط

$= f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^4 + 2$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.

c) $f(x) = x^3 - 0.5\,x^2 - 3x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة ليست متماثلة حول المحور y وليست متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$ بسّط

وبما أن $-f(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$، فإن $f(-x) \neq f(x)$، وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$؛ لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

إرشادات للدراسة

الدوال الزوجية والدوال الفردية:
قد تُظهر لك بعض التمثيلات البيانية تماثلًا والحقيقة غير ذلك؛ لذا عليك التأكد من التماثل جبريًّا في كل مرة.

تحقق من فهمك

6A) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

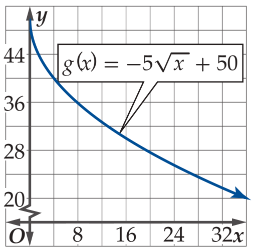
6B) $g(x) = 4\sqrt{x}$

6C) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

تدرب وحل المسائل

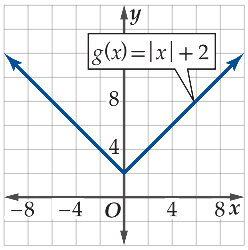
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك: (مثال 1)

1)



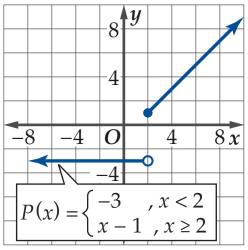
a) $g(6)$ b) $g(12)$ c) $g(19)$

2)



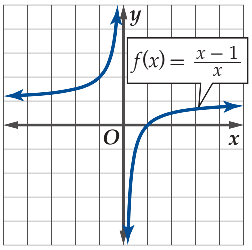
a) $g(-8)$ b) $g(-3)$ c) $g(0)$

3)



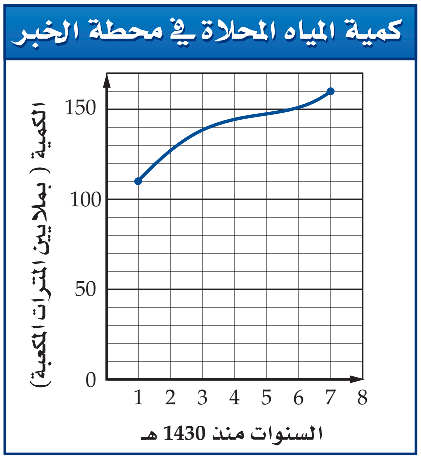
a) $P(-6)$ b) $P(2)$ c) $P(9)$

4)



a) $f(-3)$ b) $f(0.5)$ c) $f(1)$

5) **مياه:** إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (1431هـ إلى 1437هـ) معطاة بالدالة $f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$ حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1430 هـ. (مثال 1)


كمية المياه المحلاة في محطة الخبر

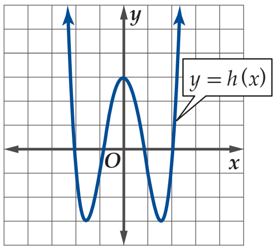
a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 1435 هـ باستعمال التمثيل البياني.

b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 1435 هـ جبريًّا مقرِّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

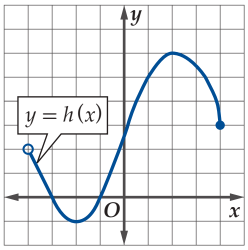
c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني، وتحقق من إجابتك جبريًّا.

استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها. (مثال 2)

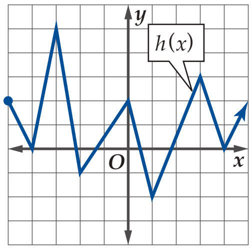
6)



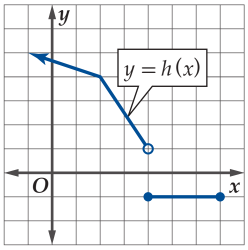
7)



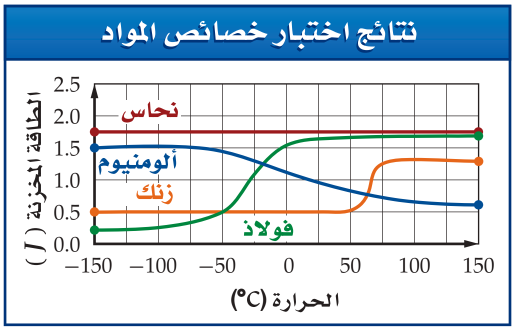
8)



9)



10) **هندسة:** أُجريت اختبارات على الخصائص الفيزيائية لعينات من أربع قطع معدنية، حيث أُخضعت لدرجات حرارة سيليزية مختلفة. فإذا كانت الطاقة المخزَّنة أو الممتصة في العينة خلال الاختبار مقاسة بالجول (J) كما هو موضّح في الشكل أدناه، فأجب عما يأتي: (مثال 2)

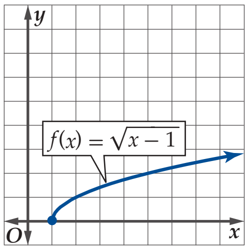

نتائج اختبار خصائص المواد

a) أوجد المجال والمدى لكل دالة.

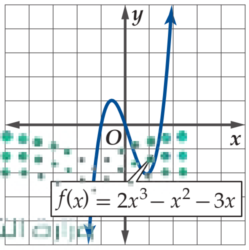
b) استعمل التمثيل البياني لتقدير الطاقة المخزنة في كل معدن عند الصفر السيليزي.

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لإيجاد مقطع المحور y، وأصفار الدالة، ثم أوجد أصفار الدالة جبريًّا: (المثالان 3, 4)

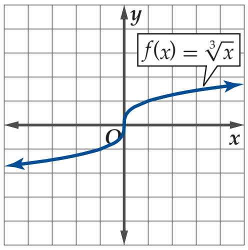
11)



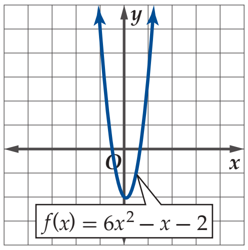
12)



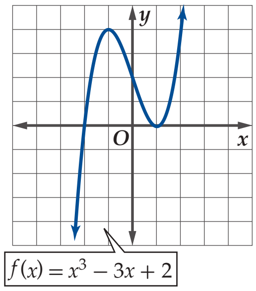
13)



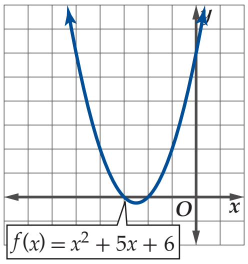
14)



15)

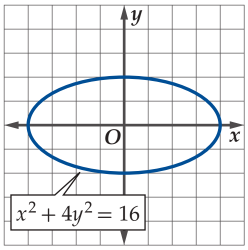


16)

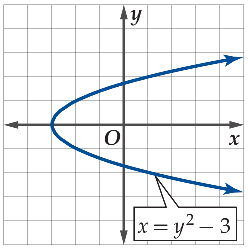


استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا: **(مثال 5)**

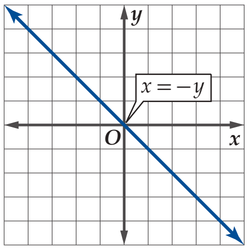
17)



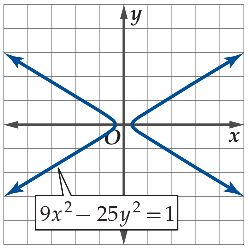
18)



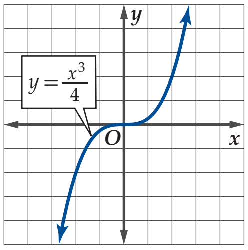
19)



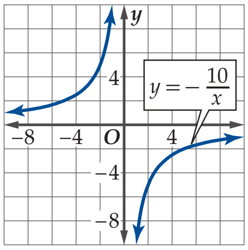
20)



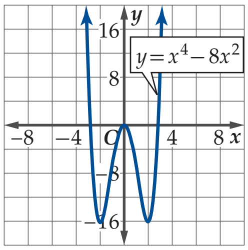
21)



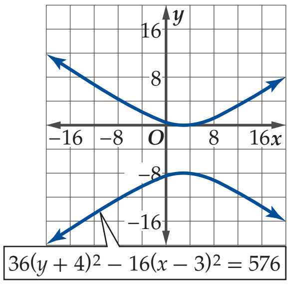
22)



23)



24)



الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حلّل منحناها لتحدِّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. واذا كانت الدالة زوجيّة أو فردية فصف تماثل منحناها: **(مثال 6)**

25) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

26) $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$

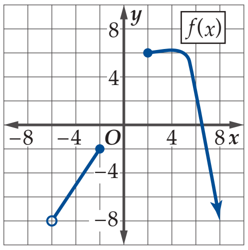
27) $g(x) = \sqrt{x + 6}$

28) $h(x) = |8 - 2x|$

29) $f(x) = |x^3|$

30) $g(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

31) استعمل التمثيل البياني للدالة f لتقدير قيمها المطلوبة:



a) $f(-2)$

b) $f(-4)$

c) $f(2)$

32) **مبيعات:** إذا كان عدد أجهزة التبريد التي باعها محل للأجهزة الكهربائية مقدرًا بالآلاف خلال الفترة من 1432هـ إلى 1436هـ يُعطى بالدالة $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$ ، حيث x رقم السنة منذ 1432 هـ .

a) اكتب مجال الدالة، ثم قرّب مداها .

b) استعمل المنحنى لتقدير عدد الأجهزة المبيعة سنة 1434هـ . ثم أوجد ذلك جبريًّا.

c) استعمل المنحنى لتقدير قيمة المقطع y للدالة ثم أوجده جبريًّا. ماذا يمثّل المقطع y؟

d) هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد قيمة تقريبية لهذه الأصفار، وفسِّر معناها. وإذا كانت الإجابة لا، فوضّح السبب.

33) **دوال:** إذا كانت $f(x) = x^n$، حيث $n \in N$ فأجب عن الأسئلة الآتية:

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل $f(x)$ بيانيًّا لكل قيمة من قيم n في الفترة $1 \leq n \leq 6$.

b) اكتب المجال والمدى لكل دالة.

c) صف التماثل لكل دالة.

d) تنبَّأ بمجال الدالة $f(x) = x^{35}$، ومداها، وتماثلها، ثم برِّر إجابتك.

34) **صيدلة:** إذا كان عدد ملجرامات الدواء في دم مريض بعد x ساعة من تناوله الدواء يعطى بالدالة :

$$f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$$

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة بيانيًّا .

b) اكتب المجال المناسب للدالة، وفسِّر إجابتك.

c) ما أكبر عدد من ملجرامات الدواء يكون موجودًا في دم المريض وفق هذه الدالة؟

الحاسبة البيانيّة: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، وحدّد أصفارها، ثم تحقّق من أصفار الدالة جبريًّا:

35) $f(x) = \frac{4x - 1}{x}$

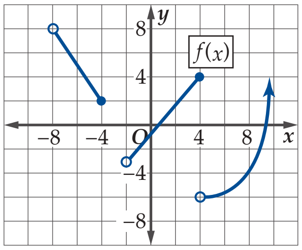
36) $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x + 3}$

37) $h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8$

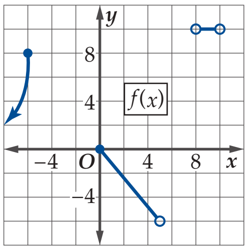
38) $g(x) = -12 + \frac{4}{x}$

استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحدد مجالها ومداها في كل مما يأتي:

39)



40)



41) **فيزياء:** إذا كان مسار أحد المذنبات حول الشمس يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{10} = 1$$

a) صف تماثل منحنى مسار المذنب.

b) استعمل التماثل لتمثيل منحنى العلاقة.

c) إذا مر المذنب بالنقطة $(2, \sqrt{5})$، فعيِّن ثلاث نقاط أخرى يجب أن يمر بها المذنب.

42) **أسهم:** افترض أن النسبة المئوية للتغير في سعر سهم خلال سنة واحدة تعطى بالدالة :

$$p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$$

حيث x رقم الشهر بدءًا من شهر يناير.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد مجال الدالة، ثم قدّر مداها.

c) استعمل المنحنى لتقريب قيمة المقطع y، وماذا يمثّل؟

d) أوجد أصفار الدالة، ووضّح معناها.

43) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى قيم الدالة $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ عندما تقترب x من العدد 2.

a) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي إلى دفترك. وأضف قيمًا أخرى للمتغير x إلى يمين العدد 2 وإلى يساره. ثم أكمل الجدول.

2.01	2.001	2	1.999	1.99	x
					$f(x)$

b) **تحليليًّا:** معتمدًا على جدولك، ما القيمة أو القيم التي تقترب منها الدالة عندما تقترب x من العدد 2؟

c) **بيانيًّا:** مثّل الدالة بيانيًّا. وهل يؤكد التمثيل البياني تخمينك في الفرع **b** ؟ وضح إجابتك.

d) **لفظيًّا:** خمّن القيمة التي تقترب منها الدالة من خلال التمثيل البياني في الفرع **c** ووضح إجابتك .

الحاسبة البيانيّة: مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، ثم حلل منحناها لتحدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

44) $h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$

45) $f(x) = x^2 - x - 6$

46) $h(x) = x^6 + 4$

47) $f(g) = g^9$

48) $g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$

49) $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$

مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مَثِّل بيانيًّا منحنًى يحقق الشروط في كل حالة مما يأتي:

50) منحنى يمر بالنقاط $(-3, 8), (-4, 4), (-5, 2), (-8, 1)$ ، ومتماثل حول المحور y .

51) منحنى يمر بالنقاط $(0, 0), (2, 6), (3, 12), (4, 24)$ ، ومتماثل حول المحور x .

52) منحنى يمر بالنقاط $(-3, -18), (-2, -9), (-1, -3)$ ، ومتماثل حول نقطة الأصل.

53) منحنى يمر بالنقاط $(4, -16), (6, -12), (8, -8)$ ويمثِّل دالة زوجية.

54) **اكتب:** وضّح لماذا يمكن أن يكون للدالة 0 أو 1 أو أكثر من مقاطع x ، بينما يوجد لها مقطع y واحد على الأكثر.

55) **تحدٍّ:** أوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^3 - 4x^2 - 12x}$، ومداها. برّر إجابتك، ثم تحقّق منها بيانيًّا.

تبرير: أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خاطئة. برِّر إجابتك.

56) مدى الدالة $f(x) = nx^2$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

57) مدى الدالة $f(x) = \sqrt{nx}$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

58) جميع الدوال الفردية متماثلة حول المستقيم $y = -x$.

59) إذا دارت دالة زوجية $180°n$ حول نقطة الأصل، حيث n عدد صحيح، فإنها تبقى زوجية.

تبرير: إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدّد ما إذا كانت الدالة $b(x)$ فردية، أم زوجية، أم غير ذلك في كل مما يأتي، وبرِّر إجابتك:

60) $b(x) = a(-x)$

61) $b(x) = -a(x)$

62) $b(x) = [a(x)]^2$

63) $b(x) = a(|x|)$

64) $b(x) = [a(x)]^3$

تبرير: هل يمثّل المنحنى المعطى تماثله في كل مما يأتي دالة دائمًا أم أحيانًا أم لا يمثّل دالة؟ وبرِّر إجابتك.

65) متماثل حول المستقيم $x = 4$.

66) متماثل حول المستقيم $y = 2$.

67) متماثل حول كل من المحورين x, y .

68) **اكتب:** وضّح لماذا لا تكون العلاقة المتماثلة حول المحور x دالة.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم المطلوبة لكل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

69) $g(x) = x^2 - 10x + 3$

a) $g(2)$

b) $g(-4x)$

c) $g(1 + 3n)$

70) $p(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^2 - 2}$

a) $p(3)$

b) $p(x^2)$

c) $p(x + 1)$

71) $h(x) = 2x^2 + 4x - 7$

a) $h(-9)$

b) $h(3x)$

c) $h(2 + m)$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية (الدرس 1-1)

72) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$

73) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$

74) $f(x) = \sqrt{3x + 18}$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

75) $27^{\frac{1}{3}}$

76) $64^{\frac{5}{6}}$

77) $49^{-\frac{1}{2}}$

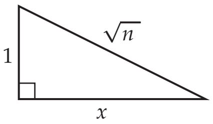
78) $16^{-\frac{3}{4}}$

79) $25^{\frac{3}{2}}$

80) $36^{-\frac{3}{2}}$

تدريب على اختبار معياري

81) إذا كان n عددًا حقيقيًّا أكبر من 1، فأوجد قيمة x بدلالة n في الشكل أدناه.



A $\sqrt{n^2 - 1}$

B $\sqrt{n - 1}$

C $\sqrt{n + 1}$

D $n - 1$

82) ما مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$، إذا كان مجالها $-2 < x < 3$ ؟

A $5 < f(x) < 9$

B $5 < f(x) < 10$

C $1 < f(x) < 9$

D $1 \leq f(x) < 10$

الاتصال والنهايات

Continuity and Limits

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

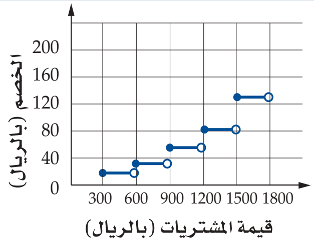
المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

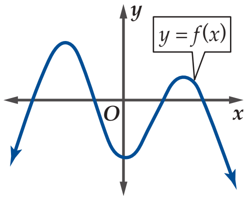
لماذا؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.

الخصم في مركز التموينات



الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.



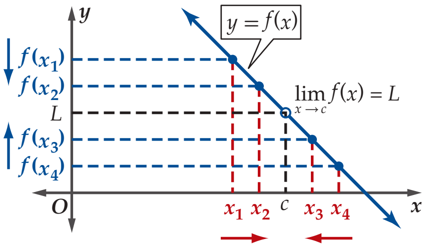
$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

مفهوم أساسي النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

الرموز: نقول: إن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

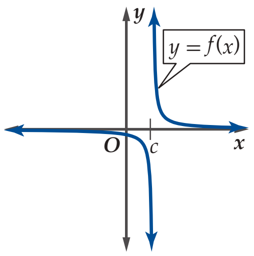


إن التمثيل البياني **للدالة غير المتصلة** يساعدك على فهم المعنى الجبري للاتصال. وفيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

مفهوم أساسي أنواع عدم الاتصال

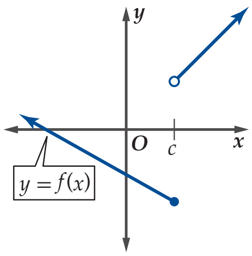
للدالة **عدم اتصال لانهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



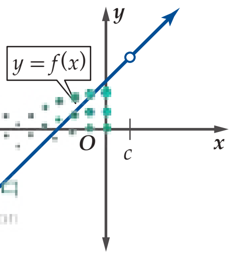
للدالة **عدم اتصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



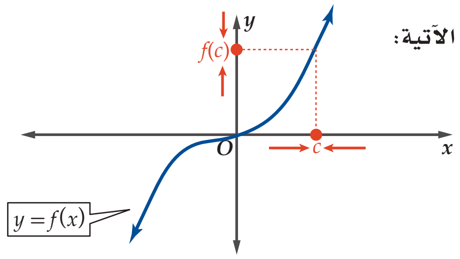
للدالة **عدم اتصال قابل لإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

ملخص المفهوم اختبار الاتصال



يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

إرشادات للدراسة

النهايات:
إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c.

مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 1$ ، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

2) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

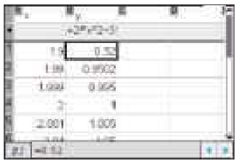
كوّن جدولًا يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

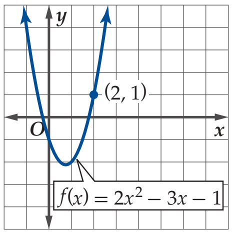
إرشاد تقني

جداول:
لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية **TI-nspire**، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة ، ثم اختر تطبيق القوائم وجداول البيانات بالضغط على . ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة .



3) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟

بما أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.



الشكل 1.3.1

✓ تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A) $f(x) = x^3$

1B) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

إذا لم يتحقّق أيّ من شروط الاتصال عند نقطة معينة تكون الدالة غير متصلة عند تلك النقطة، فاختبار اتصال الدالة يساعدك على تحديد نوع عدم الاتصال عند تلك نقطة.

مثـال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

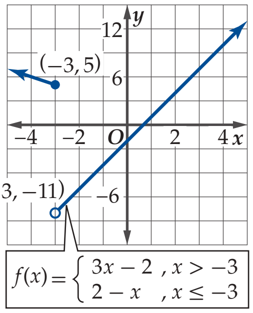
a) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \quad x>-3\\ 2-x & , \quad x\le -3\end{cases}$ عند $x=-3$.

1) $f(-3)$ موجودة؛ لأن $f(-3)=5$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

−2.9	−2.99	−2.999	−3.0	−3.001	−3.01	−3.1	x
−10.7	−10.97	−10.997		5.001	5.01	5.1	$f(x)$

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، في حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x=-3$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x=-3$.



الشكل 1.3.2

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x=-3$, $x=3$.

عند $x=3$

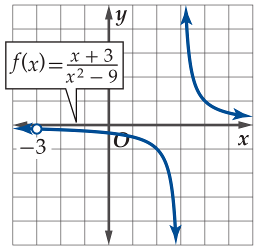
1) $f(3)=\frac{6}{0}$ ، وهي غير معرفة، أي أن $f(3)$ غير موجودة، وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x=3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

3.1	3.01	3.001	3.0	2.999	2.99	2.9	x
10	100	1000		−1000	−100	−10	$f(x)$

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة.

3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x=3$ ؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.



الشكل 1.3.3

عند $x=-3$

1) $f(-3)=\frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x=-3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3.

−2.9	−2.99	−2.999	−3.0	−3.001	−3.01	−3.1	x
−0.169	−0.167	−0.167		−0.167	−0.166	−0.164	$f(x)$

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)\approx -0.167$.

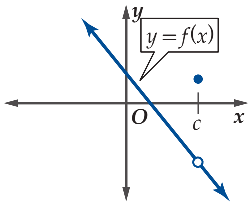
3) $f(x)$ غير متصلة عند $x=-3$ ؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=-3$. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

✓ تحقق من فهمك

2A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ، عند $x=0$.

2B) $f(x)=\begin{cases}5x+4 & , \quad x>2\\ 2-x & , \quad x\le 2\end{cases}$ ، عند $x=2$.

لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.



يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

مثال 3 إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

(1 $f(4) = \frac{0}{0}$، أي أن $f(4)$ غير موجودة.

(2 ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 4.

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين، أي أن $\lim_{x \to 4} f(x) = 8$.

(3 $f(x)$ غير متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x \to 4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$

(4 بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$، لذا أعد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} , & x \neq 4 \\ 8 , & x = 4 \end{cases}$$

لاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ موجودة وتساوي 8

✓ تحقق من فهمك

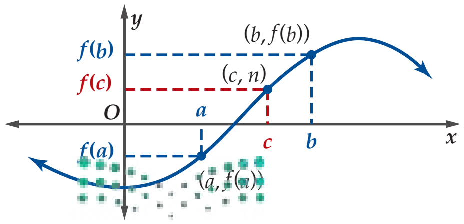
(3 أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a $(\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a))$ ، ومتصلة من اليسار عند b $(\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b))$. ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

نـظـريـة نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b، بحيث $f(c) = n$.

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b ، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b .

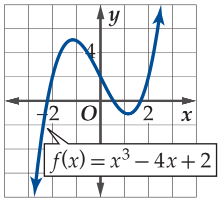


مثال 4 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-4, 4]$؛ لأنها كثيرة حدود، وبما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -2 ، -3 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على أن الأصفار الحقيقية للدالة تنحصر بين العددين -3 وَ -2 ، والعددين 0 وَ 1 والعددين 1 وَ 2. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.



الشكل 1.3.4

تحقق من فهمك

4A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

4B) $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

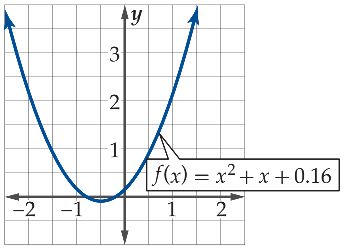
إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًّا لصفر الدالة الحقيقي. أمّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

مثال 5 تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-3, 3]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0. مثِّل الدالة بيانيًّا للتحقق من ذلك.



يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

إرشاد تقني

قد يُظهر التمثيل البياني للدالة صفرًا واحدًا؛ لذا اختر التدريج المناسب لترى جميع أصفار الدالة بوضوح.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

5B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

إرشاد: استعمل الآلة الحاسبة البيانية (إذا لزم الأمر)

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

قراءة الرياضيات

النهايات:

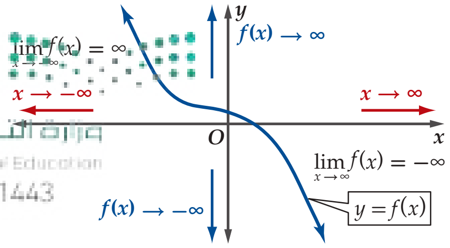
تقرأ العبارة $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

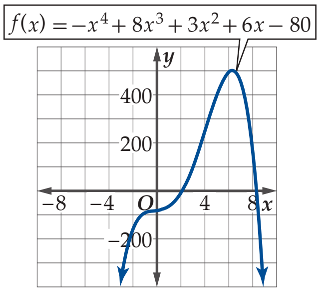
$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$



أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.

مثال 6 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، وأن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	−10000	−1000	−100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	−80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

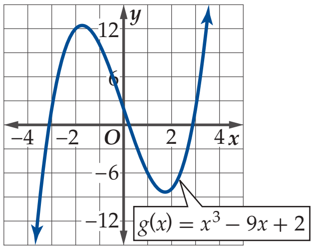
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

إرشادات للدراسة

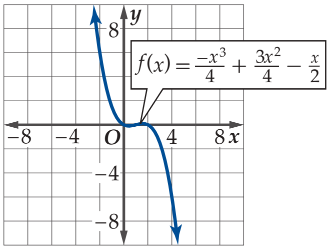
في المثال 6، أوجدت قيم تقريبيّة لـ $f(x)$ لأن ما يهمنا هو استقصاء نهاية الدالة f(x) عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، وليس حساب القيم الدقيقة لـ $f(x)$. وكذلك في المثال 7.

✓ تحقق من فهمك

6A)



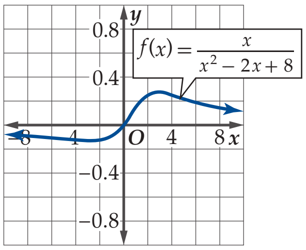
6B)



لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ أو ∞− عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، في حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

مثال 7 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

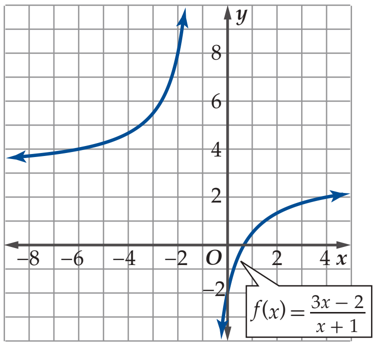
التعزيز عدديًا:

x	−10000	−1000	−100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	−0.001	−0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

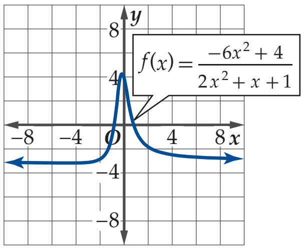
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to 0$ و عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

☑ تحقق من فهمك

7A)



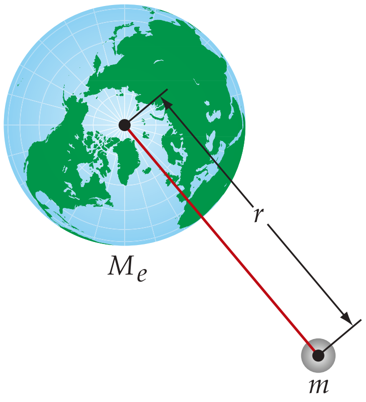
7B)



إن معرفة سلوك طرفي التمثيل البياني يساعد على حل بعض المسائل الحياتية.

مثال 8 من واقع الحياة تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني

فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟



المطلوب من المسألة وصف سلوك طرف التمثيل البياني لِـ $U(r)$ عندما تزداد قيم r كثيرًا، أي إيجاد $\lim_{r\to\infty} U(r)$.

وبما أن كلًا من G , m , M_e ثوابت، فإن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضًا. وعندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر؛ لذا فإن $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$ ، ومن ثم إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

الربط مع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h .

☑ تحقق من فهمك

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$ ، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. **(المثالان 1, 2)**

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، عند $x = -5$.

2) $f(x) = \sqrt{x + 5}$ ، عند $x = 8$.

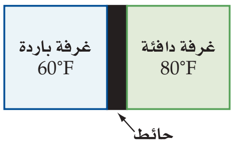
3) $h(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$ ، عند $x = -6 , x = 6$.

4) $g(x) = \frac{x}{x - 1}$ ، عند $x = 1$.

5) $h(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$ ، عند $x = 1 , x = 4$.

6) $h(x) = \frac{x^2 - 6x}{x^3}$ ، عند $x = 0 , x = 6$.

7) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & , \quad x \leq -6 \\ -x + 2 & , \quad x > -6 \end{cases}$ ، عند $x = -6$.



8) **فيزياء:** غرفتان درجتا حرارتهما مختلفتان يفصل بينهما حائط. تنتقل الحرارة بين الغرفتين عبر الحائط بحسب العلاقة $f(w) = \frac{7.4}{w}$ ، حيث تمثل $f(w)$ المعدل الزمني لانتقال الحرارة بالواط، و w سمك الحائط بالمتر. **(المثالان 1,2)**

a) حدِّد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w = 0.4$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

b) حدِّد نقاط عدم الاتصال للدالة (إن وجدت)، وما نوعه؟

c) مثِّل الدالة بيانيًّا للتحقق مما توصلت إليه في الفرع **b** .

أعد تعريف كل دالة مما يأتي عند قيمة x المعطاة؛ لتصبح الدالة متصلة عندها: **(المثال 3)**

9) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ ، $x = -3$

10) $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ ، $x = 5$

11) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$ ، $x = \sqrt{2}$

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: **(المثالان 4, 5)**

12) $f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$

13) $g(x) = -x^3 + 6x + 2, [-4, 4]$

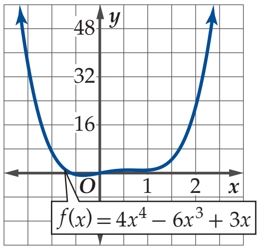
14) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3, [-3, 3]$

15) $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 5}, [-2, 4]$

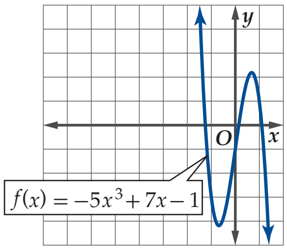
16) $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5, [0, 5]$

استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًّا. **(المثالان 6, 7)**

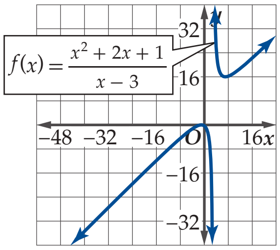
17)



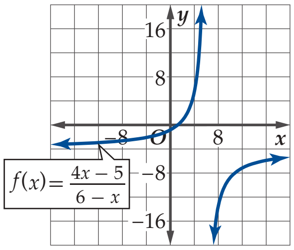
18)



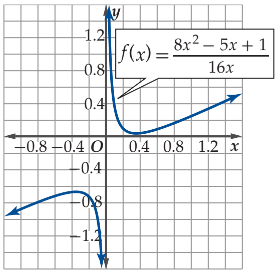
19)



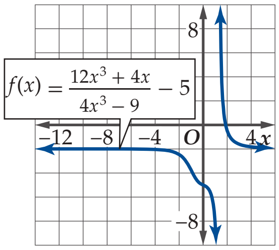
20)



21)



22)



23) **كيمياء:** يعطى معدل التفاعل R في تجربة كيميائية بالدالة $R(x) = \frac{0.5x}{x + 12}$ ، حيث x تركيز المحلول بالملجرام لكل لتر. **(مثال 7)**

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة.

b) صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وماذا يعني في التجربة؟ عزِّز إجابتك عدديًّا.

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرف التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، عندما يقترب المتغير من ∞ . برِّر إجابتك. **(مثال 8)**

24) $f(u) = \frac{12}{u}$

25) $q(x) = -\frac{24}{x}$

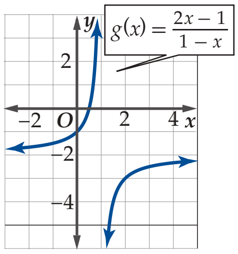
26) $f(x) = \frac{0.8}{x^2}$

27) $h(r) = \frac{-1}{r^2 + 1}$

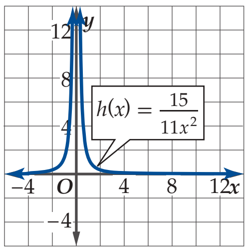
28) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$، حيث p الزخم (حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته المتجهة)، m كتلة الجسم. إذا وضع رمل في شاحنة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟ **(مثال 8)**

استعمل كلًّا من التمثيلين البيانيين الآتيين لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. برِّر إجابتك.

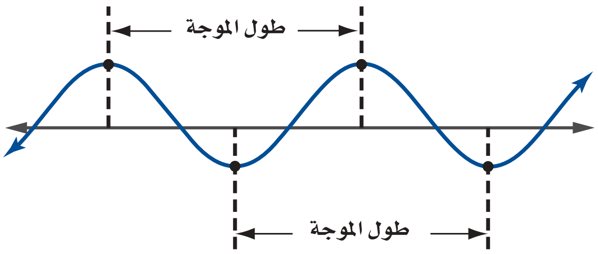
(29



(30



(31 **فيزياء:** تُسمّى المسافة بين نقطتين متناظرتين على موجتي ضوء متتاليتين بطول الموجه λ (ويقرأ لامدا)، و يُسمى عدد الموجات الكاملة التي تمر بنقطة خلال مدة زمنية محددة بالتردد f.



وتصف الدالة $f(\lambda)=\frac{c}{\lambda}$ العلاقة بين طول الموجة والتردد، حيث c سرعة الضوء ومقدارها $2.99 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. وعزز إجابتك عدديًّا.

c) هل الدالة متصلة؟ إذا كان الجواب لا، فعيّن نقاط عدم الاتصال.

الحاسبة البيانية: **مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، ثم حدد ما إذا كانت متصلة أم لا. وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال، وحدد نقاطه. ثمّ صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعيّن أصفار الدالة إن وجدت.**

(32 $f(x)=\frac{x^2}{x^3-4x^2+x+6}$

(33 $h(x)=\frac{4x^2+11x-3}{x^2+3x-18}$

(34 $h(x)=\frac{x^3-5x^2-26x+120}{x^2+x-12}$

الحاسبة البيانية: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية وَ صِف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعزز إجابتك عدديًّا.

(35 $g(x)=x^5-20x^4+2x^3-5$

(36 $f(x)=\frac{16x^2}{x^2+15x}$

(37 **أعمال:** بدأ حمد مشروعًا تجاريًّا صغيرًا بالطباعة على القمصان وبيعها. إذا كانت تكلفة الطباعة على القميص الواحد 9 ريالات وتكلفة المعدات اللازمة 12000 ريال. فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تبيّن معدّل تكلفة الطباعة على القميص الواحد على صورة دالة في عدد القمصان المنتجة n.

b) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة.

c) إذا استمر ازدياد عدد القمصان المنتجة بشكل كبير، فكم سيصبح معدل تكلفة الطباعة على القميص الواحد؟

(38 **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة النهايات.

افترض أن $f(x)=\frac{ax^3+b}{cx^3+d}$، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر، و b و d عددان صحيحان.

a) **جدوليًّا:** افترض أن $c=1$ و اختر ثلاث مجموعات مختلفة لقيم a, b, d . ثم اكتب الدالة في كل حالة وأكمل الجدول أدناه:

$c=1$				
a	b	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) **جدوليًّا:** اختر ثلاث مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير، مجموعة فيها $a>c$ ، ومجموعة فيها $a<c$ ، ومجموعة فيها $a=c$. ثم اكتب كل دالة، وكوِّن جدولًا كما في الفرع **a**.

c) **تحليليًّا:** خمّن قيمة نهاية الدالة $f(x)=\frac{ax^3+b}{cx^3+d}$ عندما تقترب x من $-\infty$ ومن $+\infty$.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

39) $f(x) = \frac{x^5 + x^6}{x^5}$

40) $f(x) = \frac{x^4}{x^5}$

41) **تحدّ:** أوجد قيمة كلٍّ من a, b التي تجعل الدالة f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , \quad x \geq 3 \\ bx + a & , \quad -3 < x < 3 \\ -b - x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$$

تبرير: أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ في كلٍّ من الحالات الآتية، وبرِّر إجابتك.

42) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة زوجية.

43) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة فردية.

44) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول نقطة الأصل.

45) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول المحور y .

46) **اكتب:** أعطِ مثالًا على دالة لها عدم اتصال قابل للإزالة، ثم بيّن كيف يمكن إزالته. وكيف تؤثر إزالة عدم الاتصال في الدالة؟

مراجعة تراكمية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلٍّ من الدوال الآتية بيانيًّا، وتحديد أصفارها. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا: (الدرس 1-2)

47) $f(x) = \frac{2x + 1}{x}$

48) $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

49) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

حدد مجال كل من الدوال الآتية: (الدرس 1–1)

50) $f(x) = \frac{4x + 6}{x^2 + 3x + 2}$

51) $g(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 10}$

52) $g(a) = \sqrt{2 - a^2}$

إذا كانت $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 1}$ فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

53) $f(9)$

54) $f(3b)$

55) $f(2a - 3)$

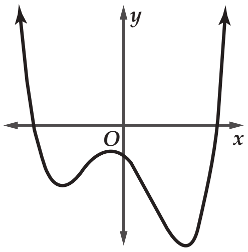
مثل بيانيًّا كل من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، ثم حلل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا. وإن كانت زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها. (الدرس 1-2)

56) $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

57) $f(x) = \frac{x + 4}{x - 2}$

تدريب على اختبار

58) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟



A 1

B 2

C 3

D 4

59) في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$؟

A $[6, 7]$

B $[7, 8]$

C $[8, 9]$

D $[9, 10]$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

Extrema and Average Rates of Change

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

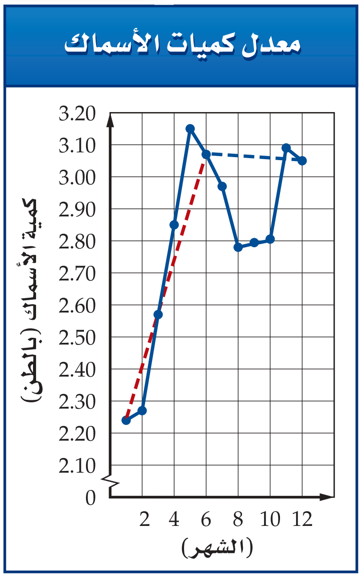
والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجِدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات:

المتزايدة	increasing
المتناقصة	decreasing
الثابتة	constant
النقطة الحرجة	critical point
العظمى	maximum
الصغرى	minimum
القصوى	extrema
متوسط معدل التغير	average rate of change
القاطع	secant line

لماذا؟

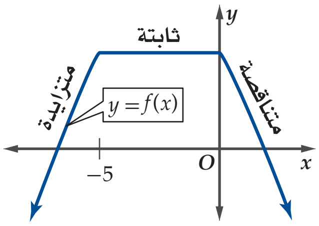


يبيِّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .

يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.

التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.



ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

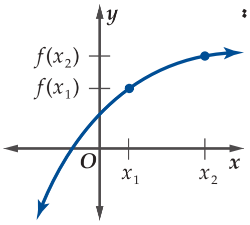
يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة جبريًّا على النحو الذي يلخصه المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي **الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة**

التعبير اللفظي: تكون الدالة f **متزايدة** على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

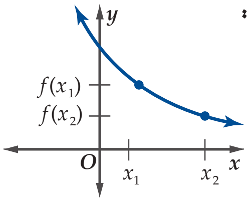
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f **متناقصة** على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

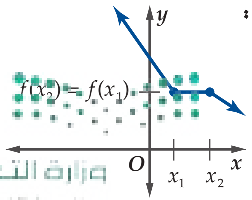
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f **ثابتة** على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

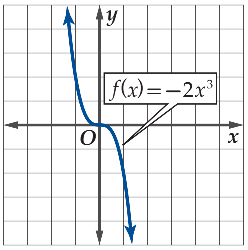
الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



مثال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًا.



a) $f(x) = -2x^3$

التحليل بيانيًا:

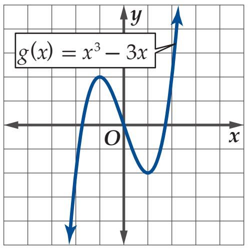
يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x ؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	−16	−128	−432	−1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x ، تتناقص قيم $f(x)$ ؛ وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.



b) $g(x) = x^3 - 3x$

التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$:

x	−11	−9	−7	−5	−3	−1
$g(x)$	−1298	−702	−322	−110	−18	2

$(-1, 1)$:

x	−1	−0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	−1.375	−2

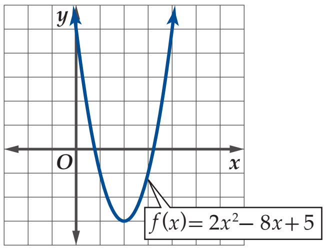
$(1, \infty)$:

x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	−2	18	110	322	702	1298

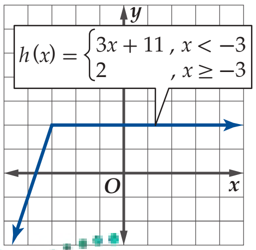
توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1 ، فإن $g(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1 ، فإن $g(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1 ، فإن $g(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

✓ تحقق من فهمك

1A)



1B)



بينما يستعمل التمثيل البياني لإيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة ويمكن تعزيز ذلك عدديًا، إلا أننا نحتاج إلى حساب التفاضل لإثبات صحة هذه الخصائص.

تنبيه!

فترات:

لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة؛ لذلك يستعمل القوسين (,) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

إرشادات للدراسة

الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة:

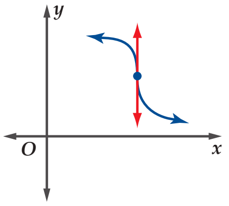
إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة لكل قيم x في مجالها تسمَى دالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة على الترتيب. فالدالة في المثال 1a متناقصة، بينما الدالة في المثال 1b لا يمكن تصنيفها على أنها متزايدة أو متناقصة؛ لأنها متزايدة على فترة ومتناقصة على أخرى.

إرشادات للدراسة

القيم القصوى:
ليس من الضروري أن توجد قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.

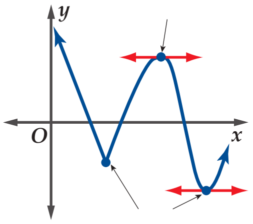
إرشادات للدراسة

القيم القصوى:
إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة الحرجة غير معرف كما في الشكل أدناه؛ فإنه لا توجد للدالة عند هذه النقطة قيمة عظمى أو صغرى.



إرشادات للدراسة

قيمة قصوى محلية:
يُستعمَل مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.



لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًّا أو عموديًّا (أي أن ميله صفر أو غير معرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

مفهوم أساسي القيم القصوى المحلية والمطلقة

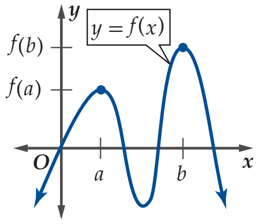
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمِّيَت قيمةً عظمى محلية.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي على a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمِّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

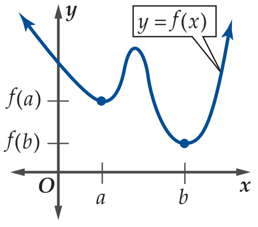
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمِّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \leq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمِّيَت قيمةً صغرى مطلقة.

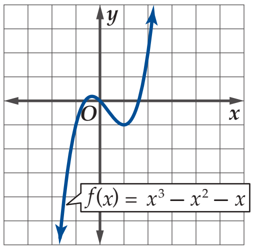
الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

مثال 2 تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا:

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها صفر تقريبًّا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -1 . لاحظ كذلك أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًا:

اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

x	−100	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	−1.00	0.13	0	−0.63	−1	−0.38	$9.9 \cdot 10^5$

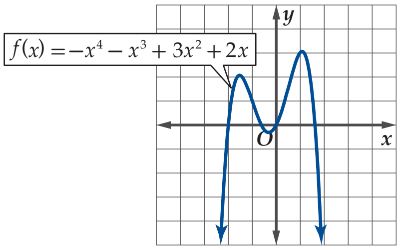
بما أن $f(-0.5) > f(-1)$ و $f(-0.5) > f(0)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا.

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(0.5)$, $f(1) < f(1.5)$، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولًا.

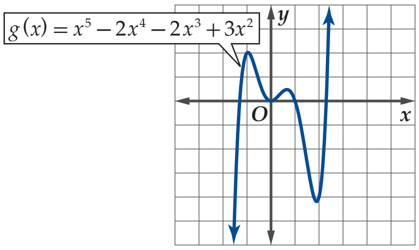
وبما أن $f(1) > f(-100)$, $f(-0.5) > f(100)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

✓ تحقق من فهمك

(2A



(2B



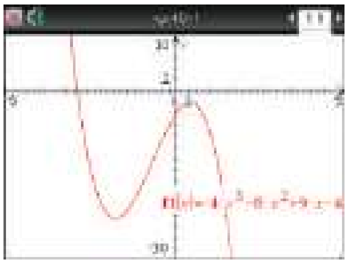
نحتاج إلى حساب التفاضل لاختبار تزايد الدالة وتناقصها، ونحتاج إليه أيضًا لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة والذي ستتم دراستها في الفصل الثامن (النهايات والاشتقاق). كما يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتحديد مواقع القيم القصوى، وإيجاد قيمها.

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

الحاسبة البيانية: **استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.**

مثّل الدالة بيانيًّا، واختر التدريج المناسب بحسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.

بالضغط على المفاتيح: ، ثم اكتب الدالة واضغط enter

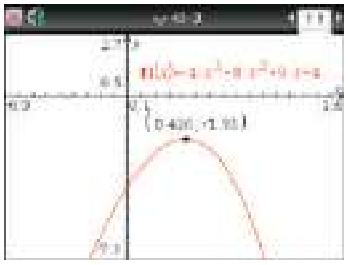


يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة $(-2, -1)$، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدلّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

إرشاد تقني

ضبط: عند البحث عن القيم العظمى والصغرى تأكد من اختيار التدريج المناسب، لتتمكن من رؤية منحنى الدالة كاملًا.

اضغط على مفتاح ، ثم على 6: تحليل الرسم البياني ، واختر منها 3: القيمة العظمى أو 2: القيمة الصغرى ، ثم مرّر المؤشر أفقيًّا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ -22.81 وتكون عند $x=-1.76$ ، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 وتكون عند $x = 0.43$



✓ تحقق من فهمك

(3A $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

(3B $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

إن البحث عن الحل الأمثل هو أحد التطبيقات الحياتية على القيم القصوى في الرياضيات، حيث يتم التعبير عن المسائل الحياتية بدوال توضع عليها بعض الشروط الخاصة ثم تُحسب القيمة الأمثل.

الربط مع الحياة

تشير بعض الدراسات الحديثة إلى أن شرب عصير البرتقال يساعد في الوقاية من أمراض القلب.

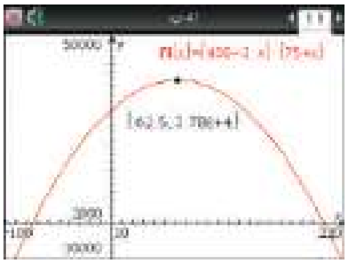
مثال 4 من واقع الحياة تطبيقات القيم القصوى

زراعة: **يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟**

اكتب الدالة $f(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الإنتاج الكلي للبستان	=	عدد الأشجار في البستان	×	إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال
$f(x)$	=	$(75 + x)$	×	$(400 - 2x)$

المطلوب هو إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة $f(x)$. لذا مثِّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط على مفتاح ، ثم 6: تحليل الرسم البياني ، واختر منها 3: القيمة العظمى ، ثم مرّر المؤشر أفقيًّا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة العظمى، تقدر بـ 37812.5 وتكون عند $x \approx 62.5$.



لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريبًا.

✓ تحقق من فهمك

4) **صناعة:** يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

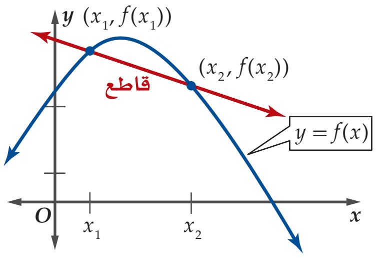
مفهوم أساسي متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمَى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة **قاطعًا**، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} .

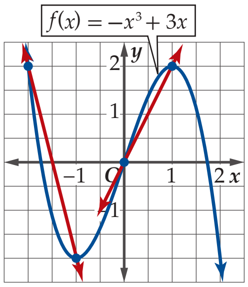
الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:



الشكل 1.4.1

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)}$$ عوّض -1 مكان x_2 ، -2 مكان x_1

$$= \frac{[-(-1)^3+3(-1)]-[-(-2)^3+3(-2)]}{-1-(-2)}$$ عوّض $f(-1)$ ، $f(-2)$

$$= \frac{-2-2}{-1-(-2)} = -4$$ بسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4 .

b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$ عوّض 1 مكان x_2 ، 0 مكان x_1

$$= \frac{2-0}{1-0} = 2$$ عوّض $f(1)$ ، $f(0)$ وبسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.

✓ تحقق من فهمك

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

يُستعملُ متوسط معدل التغير في تطبيقات حياتية كثيرة، ومنها السرعة المتوسطة r لجسم يقطع مسافة d في زمن مقداره t.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{d(2)-d(0)}{2-0}$$ عوّض 2 مكان t_2 ، 0 مكان t_1

$$= \frac{64-0}{2} = 32$$ عوّض $d(2)$ ، $d(0)$ ، وبسّط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

$$\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{d(4)-d(2)}{4-2}$$ عوّض 4 مكان t_2 ، 2 مكان t_1

$$= \frac{256-64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ عوّض $d(4)$ ، $d(2)$ ، وبسّط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s ، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

الربط مع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمَّى السرعة الحديَّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديَّة (120 - 150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.

تنبيه!

السرعة المتوسطة: يوجد فرق بين مفهومي السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة المتجهة؛ فالسرعة المتوسطة تعني المقدار فقط (كمية قياسية)، بينما السرعة المتوسطة المتجهة تعني المقدار والاتجاه (كمية متجهة).

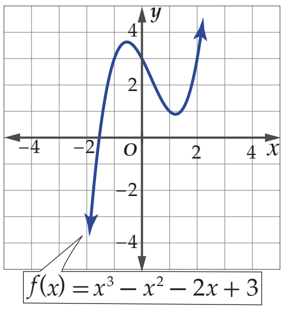
✓ تحقق من فهمك

6) **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

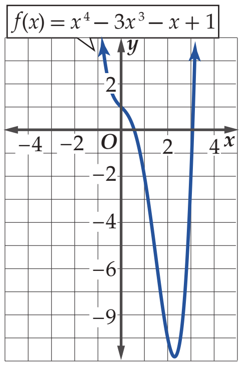
تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزّز إجابتك عدديًّا: (مثال 1)

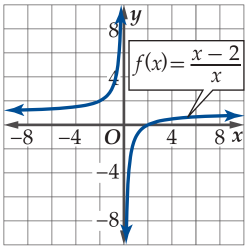
(1



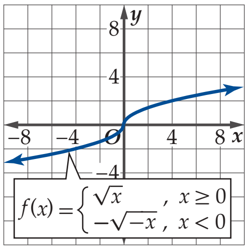
(2



(3



(4



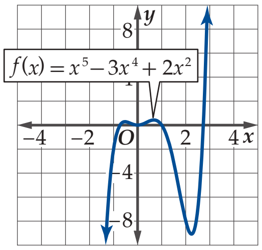
5) **كرة سلة :** يعطى ارتفاع كرة سلة $f(t)$ عن سطح الأرض في الرمية الحرة بالدالة $f(t) = -64.4t^2 + 48.3t + 5$، حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ الارتفاع بالأقدام. (مثال 2)

a) مَثِّل الدالة بيانيًّا.

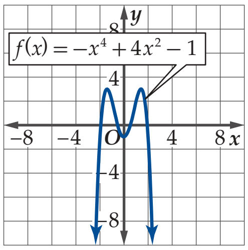
b) أوجد قيمة تقريبية لأعلى ارتفاع تصل إليه الكرة. ثم عزز إجابتك عدديًّا.

قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًّا. (مثال 2)

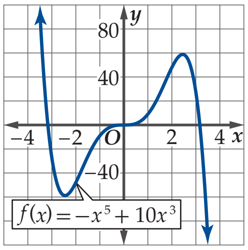
(6



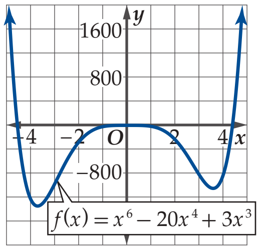
(7



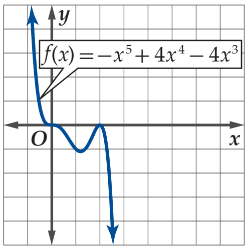
(8



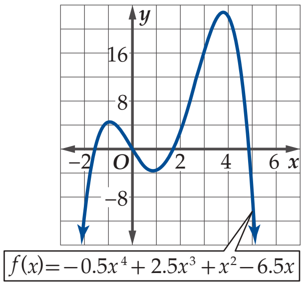
(9



(10



(11



الحاسبة البيانية : أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم: (مثال 3)

12) $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

13) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

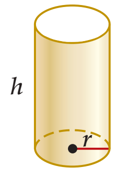
14) $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

15) $g(x) = x^6 - 4x^4 + x$

16) $f(x) = 0.008x^5 - 0.05x^4 - 0.2x^3 + 1.2x^2 - 0.7x$

17) $f(x) = 0.025x^5 - 0.1x^4 + 0.57x^3 + 1.2x^2 - 3.5x - 2$

18) **هندسة :** أوجد كلًّا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرب إلى أقرب جزء من عشرة) . (مثال 4)



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة تساوي 20.5π بوصة مربعة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة. (مثال 5)

19) $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$

20) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1, [5, 9]$

21) $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6, [-1, 5]$

22) $h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9, [3, 6]$

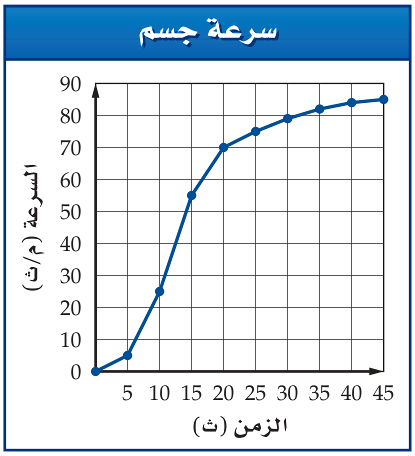
23) $f(x) = \frac{x-3}{x}, [5, 12]$

24) $f(x) = \sqrt{x+8}, [-4, 4]$

25) **طقس:** إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة: $f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$ حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلًا $x = 1$ تمثّل شهر محرم، فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين: وبرر إجابتك. (مثال 6)

a) من ربيع الثاني إلى جمادي الأول . b) من رجب إلى شوال.

26) استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:



a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات $[5, 15]$، $[15, 20]$، $[25, 45]$.

b) قارن بين سرعات الجسم في هذه الفترات الزمنية.

27) **تكنولوجيا:** تبين لفريق بحث في إحدى شركات الحاسوب أن الربح الذي تكسبه الشركة من بيع منتج جديد من الشرائح الإلكترونية يعطى بالدالة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$ ، حيث x ثمن بيع الشريحة الواحدة بمئات الريالات، $0 \leq x \leq 6$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد أفضل سعر للشريحة الواحدة والذي يعطي أكبر ربح.

c) أوجد ربح الشريحة الواحدة عند بيعها بالسعر الأفضل.

28) **دخل:** افترض أن الدخل السنوي (بالريال) لشخص منذ عام 1430هـ وحتى عام 1440 هـ يعطى بالدالة:

$$I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362, 0 \leq x \leq 10$$

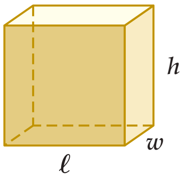
حيث x رقم السنة.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد متوسط معدل تغير الدخل من عام 1433 إلى عام 1440 هـ. وماذا تعني قيمة متوسط معدل التغير في هذه الفترة؟

c) حدّد السنوات الأربع التي يكون فيها متوسط معدل التغير أكبر ما يمكن، والسنوات الأربع التي يكون فيها أقل ما يمكن.

29) **صندوق:** يرغب سالم في عمل صندوق مغلق من الكرتون حجمه 3024 قدمًا مكعبة. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، فأوجد أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن. وضِّح إجابتك.



مثِّل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

30) $f(x)$ متصلة ومتزايدة.

31) $f(x)$ متصلة ومتناقصة.

32) $f(x)$ متصلة ومتزايدة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

33) $f(x)$ متصلة ومتناقصة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

34) $f(x)$ متصلة، ومتزايدة لجميع قيم $x < -2$ ، و متناقصة لجميع قيم $x > -2$.

35) $f(x)$ متصلة، ومتناقصة لجميع قيم $x < 0$، و متزايدة لجميع قيم $x > 0$.

الحاسبة البيانية: **حدّد إحداثيي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت، وبيِّن نوعها:**

36) $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$

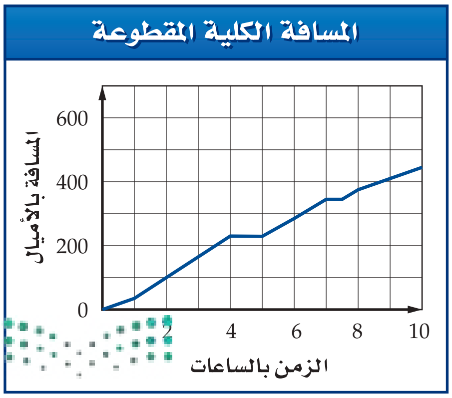
37) $f(x) = -0.5(x+5)^2 - 1$

38) $f(x) = -4|x-22| + 65$

39) $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$

40) $f(x) = x^3 + x$

41) **سفر:** قام عبد الله بتسجيل المسافة الكلية التي قطعها في إحدى الرحلات ومثّلها بيانيًّا. أعطِ أسبابًا توضح اختلاف متوسط معدل التغير، ولماذا يكون ثابتًا في فترتين؟



مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة : مثل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

42) متصلة
متزايدة على $(-\infty, 4)$
ثابتة على $[4, 8]$
متناقصة على $(8, \infty)$
$f(5) = 3$

43) لها نقطة عدم اتصال لانهائي عند $x = -2$
متزايدة على $(-\infty, -2)$
متزايدة على $(-2, \infty)$
$f(-6) = -6$

44) **تبرير:** f دالة متصلة لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$ ومتزايدة عندما $x > c$. صِف سلوك الدالة عندما تزداد x لتقترب من c . وضّح إجابتك.

45) **تحدّ:** إذا كانت g دالة متصلة، وكان $g(a) = 8$ و $g(b) = -4$، فأعطِ وصفًا لقيمة $g(c)$ حيث $a < c < b$. وبرِّر إجابتك.

46) **تحدّ:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = \sin x$ بيانيًّا، ثم صف القيم القصوى المحلية للدالة.

47) **تبرير:** أوجد ميل القاطع المار بالنقطتين $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ إذا كانت $f(x)$ ثابتة في الفترة (a, b). وضّح إجابتك.

48) **اكتب:** صف متوسط معدل تغير الدالة إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة في فترة معينة.

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة أو قيم x المعطاة معتمدًا على اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيِّن نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (الدرس 3-1)

49) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}\ , x = -3$

50) $f(x) = \sqrt{x + 1}\ , x = 3$

51) $h(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}\ ; x = -5\ , x = 5$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم حدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. وتحقّق من إجابتك جبريًّا، و إذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحنى الدالة. (الدرس 2-1)

52) $f(x) = |x^5|$

53) $f(x) = \dfrac{x + 8}{x - 4}$

54) $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$

أوجد مجال كل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

55) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 5}$

56) $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

57) $h(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 7}}$

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: (الدرس 3-1)

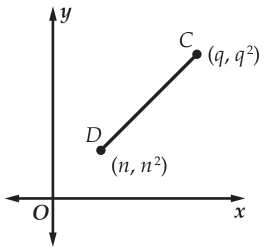
58) $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$

59) $g(x) = \dfrac{x^2 + 5}{7 - 2x^2}$

60) $h(x) = \left|(x - 3)^2 - 1\right|$

تدريب على اختبار

61) في الشكل أدناه، إذا كان $q \neq n$، فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD .



A $q + n$
B $q - n$
C $\dfrac{q^2 + q}{n^2 - n}$
D $\dfrac{1}{q + n}$

62) يوجد للدالة $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ قيمة عظمى محلية ، وقيمة صغرى محلية. أوجد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

A عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx 2$

B عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx -2$

C عظمى محلية عند $x \approx -2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D عظمى محلية عند $x \approx 2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

الفصل

1

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–1 إلى 1–4

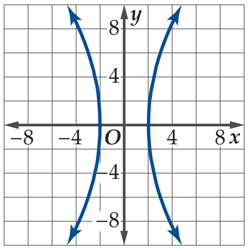
في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x: (الدرس 1-1)

1) $3x + 7y = 21$

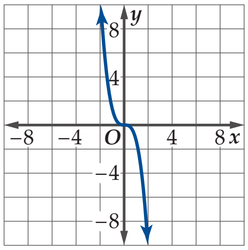
2)

y	x
−1	−1
3	1
7	3
11	5
15	7

3)



4)



5) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \; x < 2 \\ x & , \; x \geq 2 \end{cases}$، فأوجد $f(2)$. (الدرس 1-1)

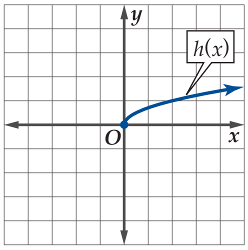
6) **كرة قدم:** يعطى ارتفاع كرة قدم عن سطح الأرض عند ضربها من قبل حارس مرمى بالدالة $h(t) = -8t^2 + 50t + 5$، حيث h ارتفاع الكرة بالأقدام، و t الزمن بالثواني. (الدرس 1-1)

a) أوجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثوانٍ.

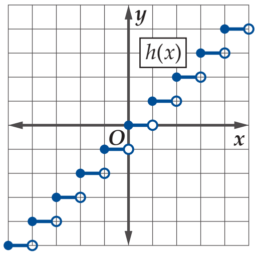
b) ما مجال هذه الدالة؟ برِّر إجابتك.

استعمل التمثيل البياني للدالة h أدناه لإيجاد مجالها ومداها في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-2)

7)



8)



أوجد المقطع y والأصفار لكلٍّ من الدالتين الآتيتين: (الدرس 1-2)

9) $f(x) = x^3 - 16x$

10) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$

اختبر تماثل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين حول المحور x، والمحور y، و نقطة الأصل. (الدرس 1-2)

11) $x^2 + y^2 = 9$

12) $xy = 4$

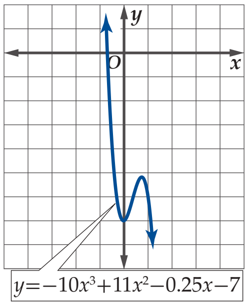
حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 5$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. (الدرس 1–3)

13) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

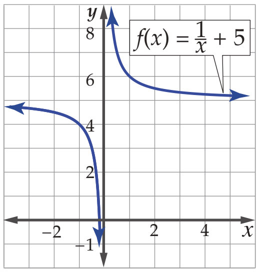
14) $f(x) = \frac{x^2}{x + 5}$

صف سلوك طرفي كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين. ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 1–3)

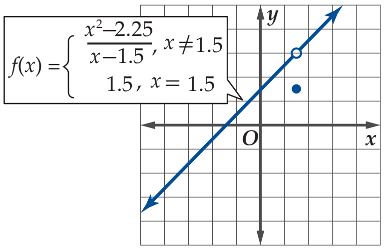
15)



16)



17) **اختيار من متعدد:** ما نوع نقطة عدم الاتصال للدالة الممثلة في الشكل أدناه عند $x = 1.5$؟ (الدرس 1-3)



A غير معرف

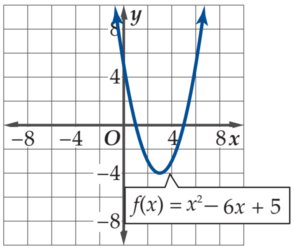
B لانهائي

C قفزي

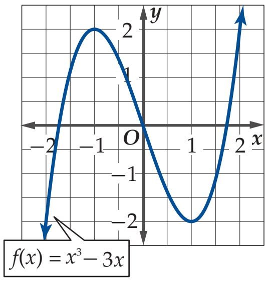
D قابل للإزالة

استعمل التمثيل البياني لكل دالة أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. وعزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 1-4)

18)



19)



20) استعمل التمثيل البياني للدالة في السؤال 18 أعلاه، وقدِّر قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيمة الدالة عندها، وبيِّن نوعها، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 1-4)

21) **فيزياء:** إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني، و $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء فأوجد متوسط السرعة في الفترة $[0, 3]$. (الدرس 1-4)

1-5

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

Parent Functions and Transformations

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها. (الدرس 4–1)

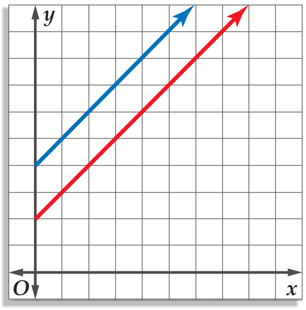
والآن:

- أقومُ بتعيين الدوال الرئيسة (الأم)، وأصفها، وأمثلها بيانيًا.
- أقومُ بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة، وأمثلها بيانيًا.

المفردات:

الدالة الرئيسة (الأم)	parent function
الدالة الثابتة	constant function
الدالة المحايدة	identity function
الدالة التربيعية	quadratic function
الدالة التكعيبية	cubic function
دالة الجذر التربيعي	square root function
دالة المقلوب	reciprocal function
دالة القيمة المطلقة	absolute value function
الدالة الدرجية	step function
دالة أكبر عدد صحيح	greatest integer function
التحويل الهندسي	transformation
الإزاحة (الانسحاب)	translation
الانعكاس	reflection
التمدد	dilation

لماذا؟



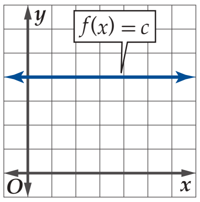
استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

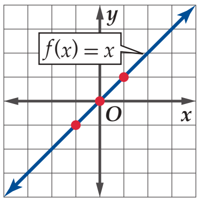
ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

مفهوم أساسي الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

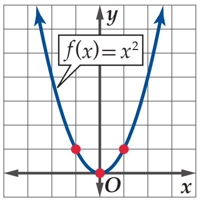
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّلُ بمستقيم أفقي.



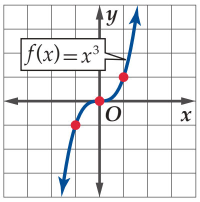
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



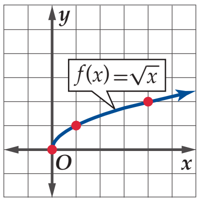
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



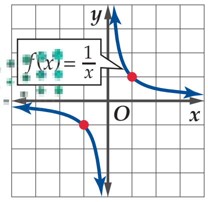
كما ستدرسُ أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي ودوال المقلوب.

مفهوم أساسي الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}\ , x \geq 0$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}\ , x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



كما تُعَدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم).

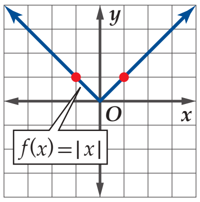
مفهوم أساسي دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x \ , & x < 0 \\ x \ , & x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, |0| = 0, |4| = 4$

النموذج



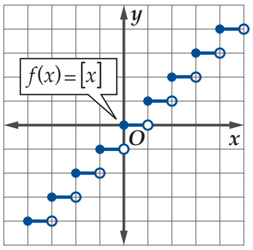
أما **الدالة الدرجية**، فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم أساسي دالة أكبر عدد صحيح

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = \llbracket x \rrbracket$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

أمثلة: $\llbracket -4 \rrbracket = -4, \llbracket -1.5 \rrbracket = -2, \llbracket \frac{1}{3} \rrbracket = 0$

النموذج



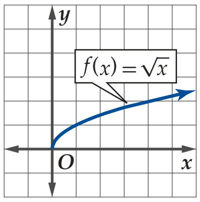
باستعمال ما تعلمته في الدروس السابقة، فإنه يمكنك وصف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم). ممّا يساعدك على تعرف منحنيات دوال أكثر تعقيدًا من العائلة نفسها وتحليلها.

مثال 1 وصف خصائص الدالة الرئيسة (الأم)

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

☑ تحقق من فهمك

ارسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

1) $f(x) = |x|$

التحويلات الهندسية: تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

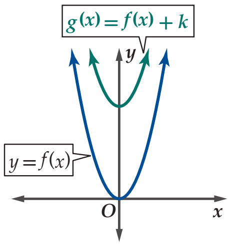
الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

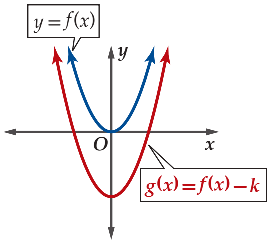
مفهوم أساسي الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

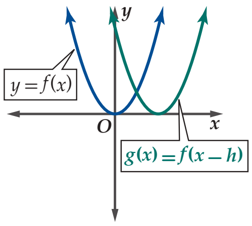


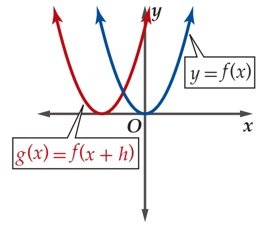


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





مثال 2 انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

a) $g(x) = |x| + 4$

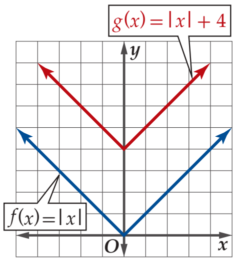
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

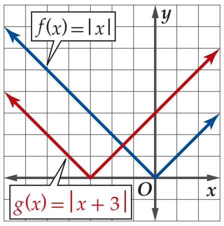
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

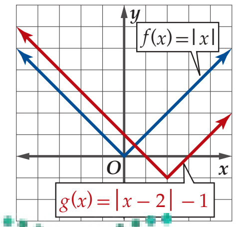
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

تحقق من فهمك استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

2A) $h(x) = x^3 - 5$

2B) $h(x) = 8 + x^3$

2C) $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

إرشاد تقني

الانسحاب:

يمكنك إجراء انسحاب لمنحنى دالة باستعمال الحاسبة البيانية. TI–nspire ، بعد تمثيل الدالة الرئيسة (الأم) f1(x):

- لإجراء انسحاب مقداره k وحدة لأعلى أو لأسفل اضغط على المفاتيح:

f1(x) ± k

- لإجراء انسحاب مقداره h وحدة لليمين أو اليسار اضغط على المفاتيح :

f1(x ± h)

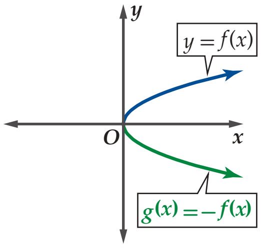
ستقوم الحاسبة برسم كلا الدالتين الرئيسة (الأم) والدالة المزاحة على الشاشة نفسها.

من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس**، والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي **الانعكاس حول المحورين الإحداثيين**

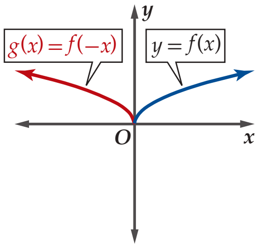
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x.

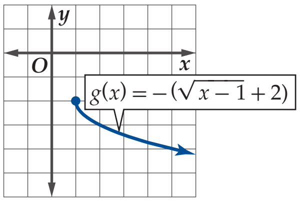


الانعكاس حول المحور y

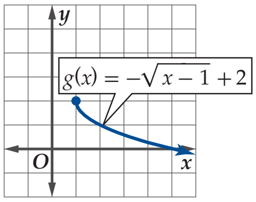
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -\left(\sqrt{x-1} + 2\right)$.



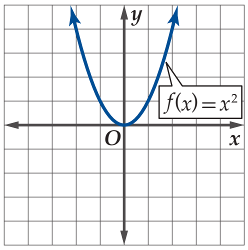
انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

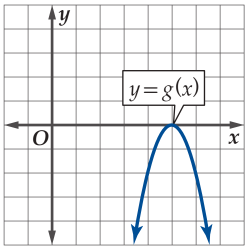
مثال 3 كتابة معادلات التحويل

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:



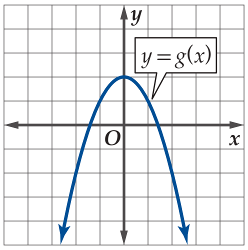
الشكل 1.5.5

a)



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x، أي أن $g(x) = -(x-5)^2$.

b)

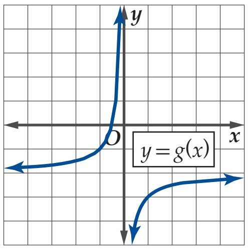


منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

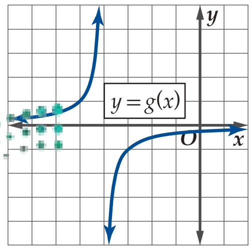
☑ تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

3A)



3B)



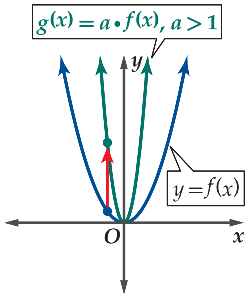
التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

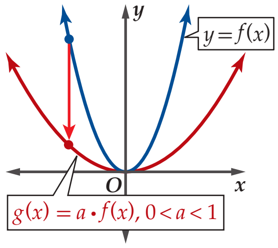
مفهوم أساسي التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

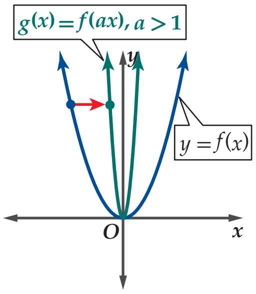


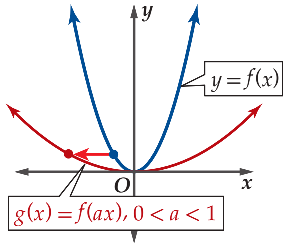


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



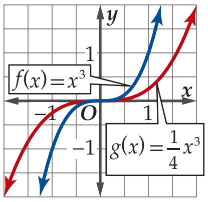


مثال 4 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

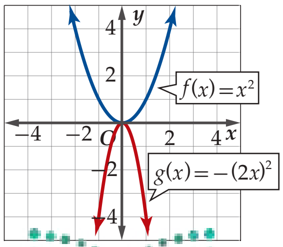
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$ ؛ لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.



b) $g(x) = -(2x)^2$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق أفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ أولًا؛ لأن $f(x) = x^2, f(2x) = (2x)^2$ وَ $1 < 2$، ثم انعكاس حول المحور x؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$



☑ تحقق من فهمك

4A) $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

4B) $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

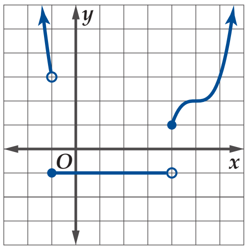
إرشادات للدراسة

التمدد:
يظهر التمددان متشابهين أحيانًا مثل التوسع الرأسي والتضيق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طبِّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًّا باستعمال التحويلات الهندسية التي درستها .

مثال 5 تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانيًا

مثّل الدالة بيانيًا: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \ x < -1 \\ -1 & , \ -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \ x \ge 4 \end{cases}$.



في الفترة $(-\infty, -1)$، أمثّل الدالة $y = 3x^2$.

في الفترة $[-1, 4)$، أمثّل الدالة الثابتة $y = -1$.

في الفترة $[4, \infty)$ أمثّل الدالة $y = (x-5)^3 + 2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1, 3)$ و $(4, -1)$ ونقطة عند كل من $(-1, -1)$ و $(4, 1)$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(4) = 1$.

✓ تحقق من فهمك

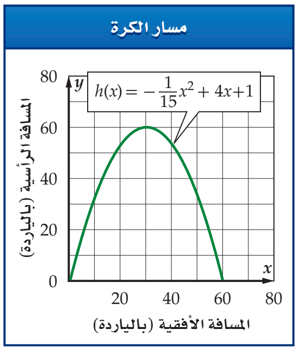
(5A $g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \ x \le 0 \\ x^3 & , \ 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , \ x > 2 \end{cases}$

(5B $h(x) = \begin{cases} (x+6)^2 & , \ x < -5 \\ 7 & , \ -5 \le x \le 2 \\ |4 - x| & , \ x > 2 \end{cases}$

يمكنك استعمال التحويلات الهندسية التي تعلمتها على الدوال التي تمثّل مواقف من واقع الحياة.

مثال 6 من واقع الحياة التحويلات الهندسية على الدوال

كرة قدم: **ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة باليارد عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية باليارد التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.**


مسار الكرة

أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x - h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

$h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$	الدالة الأصلية
$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1$	حلّل $-\frac{1}{15}x^2 + 4x$
$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900)$	أكمل المربع
$= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61$	اكتب $x^2 - 60x + 900$ على صورة مربع كامل ثم بسّط

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

✓ تحقق من فهمك

6) **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

الربط مع الحياة

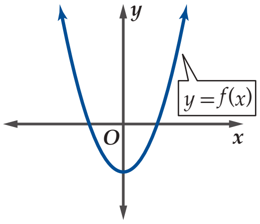
تأسس الاتحاد العربي السعودي لكرة القدم عام 1956 م، وقد انضم إلى الفيفا والاتحاد الآسيوي في العام نفسه.

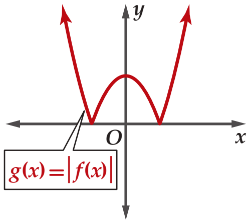
تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

مفهوم أساسي التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

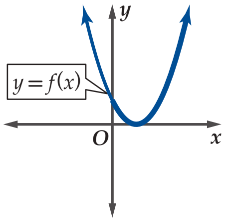
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

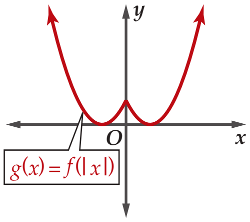




$g(x) = f(|x|)$

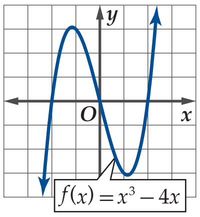
يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





إرشاد تقني

تحويلات القيمة المطلقة
يمكنك التحقق من أثر التحويل الهندسي على منحنى القيمة المطلقة باستعمال الحاسبة البيانيّة. ويمكنك أيضًا تمثيل كلا الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه .



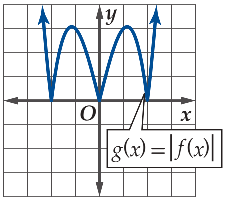
الشكل 1.5.6

مـثال 7 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

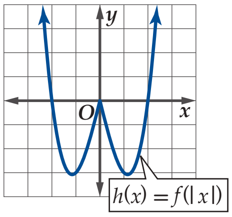
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

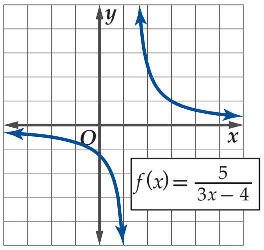
ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.



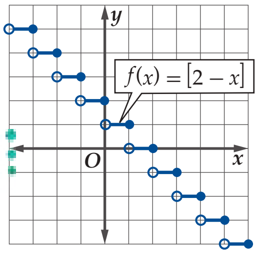
✓ تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

7A)



7B)



تدرب وحل المسائل

صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: (مثال 1)

1) $f(x) = [x]$
2) $f(x) = \frac{1}{x}$
3) $f(x) = x^3$
4) $f(x) = x^2$
5) $f(x) = c$
6) $f(x) = x$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

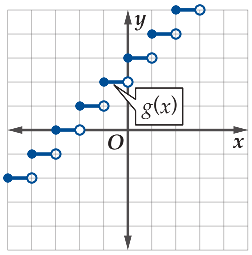
7) $g(x) = \sqrt{x-4}$
8) $g(x) = \sqrt{x-7} + 3$

استعمل الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \frac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

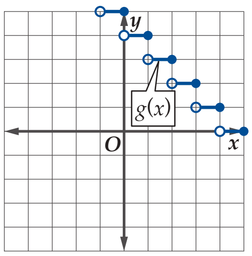
9) $g(x) = \frac{1}{x} + 4$
10) $g(x) = \frac{1}{x+7} - 4$

صف العلاقة بين منحني $f(x) = [x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3)

11)

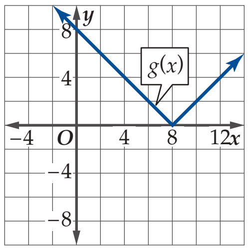


12)

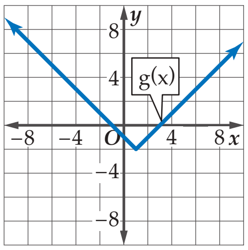


صف العلاقة بين منحني $f(x) = |x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$: (مثال 3)

13)



14)



اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما في مستوى إحداثي واحد. (مثال 4)

15) $g(x) = 3|x| - 4$
16) $g(x) = 3\sqrt{x+8}$
17) $g(x) = \frac{4}{x+1}$
18) $g(x) = 2[x-6]$
19) $g(x) = \frac{1}{6x} + 7$
20) $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{4}$

مثّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانيًّا: (مثال 5)

21) $$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < -2 \\ 3 & , \quad -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$$

22) $$g(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < -6 \\ \frac{1}{x} & , \quad -6 \le x < 4 \\ 6 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$

23) $$h(x) = \begin{cases} |x-5| & , \quad x < -3 \\ 4x - 3 & , \quad -1 \le x < 3 \\ \sqrt{x} & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$

24) $$g(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x < -4 \\ x^4 - 3x^3 + 5 & , \quad -1 \le x < 1 \\ [x] + 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

25) **أسعار:** يبين الجدول أدناه سعر سلعة منذ عام 1411هـ حتى 1431هـ . استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية. (مثال 5)

العام	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55

26) **أعمال:** قدمت إحدى شركات الهواتف المحمولة عرضًا لمشتركي شبكتها بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًّا مقداره 20 ريالًا، ويدفع 0.2 ريال مقابل كل دقيقة اتصال. إن تكلفة هذا العرض على المشترك تعطى بالدالة $c(x) = 20 + 0.2\,[x]$، حيث x عدد دقائق الاتصال. (مثال 6)

a) صف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = [x]$ لتمثيل الدالة $c(x)$.

b) إذا قدمت الشركة عرضًا آخر بحيث يدفع المشترك فيه 30 ريالًا شهريًّا، ويدفع 0.1 ريال عن كل دقيقة اتصال. فاكتب الدالة التي تصف تكلفة هذا العرض.

c) هل يمكن أن تتساوى التكلفة في العرضين؟ وكم يكون عدد دقائق الاتصال في هذه الحالة؟

27) **فيزياء:** إذا علمت أن الطاقة المختزنة في نابض ما، تعطى بالدالة $E(x) = 4x^2$ حيث تقاس الطاقة E بالجول، وتقاس المسافة x بالمتر. (مثال 6)

a) صف التحويل الهندسي الذي تم على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على الدالة $E(x)$.

b) إذا كانت الطاقة المختزنة في نابض ما، آخر تعطى بالدالة $E(x) = 2x^2$، فمثِّل بيانيًّا كلًّا من الدالتين على الشاشة نفسها باستعمال الحاسبة البيانية.

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين $g(x) = |f(x)|, h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (مثال 7)

28) $f(x) = \frac{2}{x}$

29) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$

30) $f(x) = \frac{1}{x-3} + 5$

31) $f(x) = \sqrt{x+2} - 6$

اكتب الدالة الناتجة عن إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسة (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

32) $f(x) = \frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى أعلى، و7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معامله 2

33) $f(x) = [x]$: انعكاس في المحور x و انسحاب 4 وحدات إلى أسفل، وتوسع رأسي معامله 3

فيزياء: **إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم تعطى بالدالة $g(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$، حيث x_0 المسافة الابتدائية، و v_0 السرعة الابتدائية و a تسارع الجسم. صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(t) = t^2$ للحصول على $g(t)$ في كل مما يأتي:**

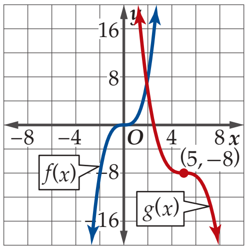
34) $x_0 = 0, v_0 = 2, a = 2$

35) $x_0 = 10, v_0 = 0, a = 2$

36) $x_0 = 1, v_0 = 8, a = 4$

37) $x_0 = 3, v_0 = 5, a = 3$

38) اكتب معادلة الدالة $g(x)$ إذا علمت أن منحناها ناتج عن عدة تحويلات هندسية لمنحنى الدالة $f(x)$، وأحد هذه التحويلات هو تضييق رأسي معامله 0.5.



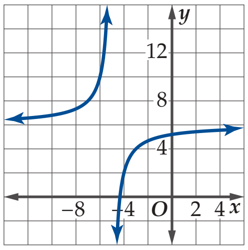
39) **تسوق:** توقعت إدارة أحد المجمعات التجارية الجديدة أن يعطى عدد المتسوقين بالآلاف بالدالة $f(x) = \sqrt{7x}$ خلال أول ستين يومًا من الافتتاح، حيث x رقم اليوم بعد الافتتاح، $x = 1$ يرتبط بيوم الافتتاح. اكتب دالة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ لكل حالة من الحالات الآتية:

a) زاد عدد الحضور 12% على المتوقع.

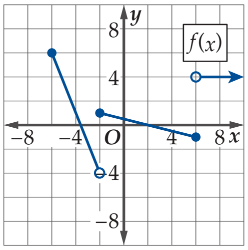
b) تأخر موعد الافتتاح 30 يومًا بسبب تأخر أعمال البناء.

c) نقص عدد المتسوقين 450 عن المتوقع.

40) اكتب دالة تمثّل المنحنى المرسوم:



استعمل منحنى $f(x)$ لتمثيل منحنى $g(x)$ لكل مما يأتي:



41) $g(x) = 0.25f(x) + 4$

42) $g(x) = 3f(x) - 6$

43) $g(x) = f(x - 5) + 3$

44) $g(x) = -2f(x) + 1$

استعمل $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة مما يأتي:

45) $g(x) = 2f(x) + 5$

46) $g(x) = -3f(x) + 6$

47) $g(x) = f(4x) - 5$

48) $g(x) = f(2x + 1) + 8$

49) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة بعض العمليات على الدوال معتمدًا على الدوال الآتية:

- $f(x) = x^2 + 2x + 7$
- $g(x) = 4x + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10$

a) **جدوليًّا:** اختر ثلاث قيم لـ a، وأكمل الجدول الآتي:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$

b) **لفظيًّا:** ما العلاقة بين $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$؟

c) **جبريًّا:** أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها في الفرع b جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

50) **اكتشف الخطأ:** وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [x + 4]$. فقال محمد: أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار. وقال عبد الملك: إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى أعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

51) **تبرير:** إذا كانت $f(x)$ دالة فردية وكانت $g(x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور x و $h(x)$ انعكاسًا للدالة $g(x)$ حول المحور y، فما العلاقة بين $h(x)$, $f(x)$؟ برِّر إجابتك.

تبرير: **تحقّق ما إذا كانت كل من الجملتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة. وبرِّر إجابتك.**

52) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(x) = |f(x)|$

53) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(-x) = -|f(x)|$

54) **تحدّ:** صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للوصول إلى دالة يمر منحناها بالنقطة $(-2, -6)$.

55) **تبرير:** وضِّح الفرق بين التوسع الرأسي بمعامل مقداره 4، والتوسع الأفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$. ما النتيجة النهائية بعد إجراء كلٍّ من التحويلين الهندسيين على الدالة نفسها؟

56) **اكتب:** وضح أهمية الترتيب في تحويلات الانعكاس والانسحاب.

مراجعة تراكمية

أوجد متوسط معدل التغير لكلٍّ من الدوال الآتية في الفترة المعطاة: **(الدرس 1-4)**

57) $g(x) = -2x^2 + x - 3, [-1, 3]$

58) $g(x) = x^2 - 6x + 1, [4, 8]$

59) $f(x) = -2x^3 - x^2 + x - 4, [-2, 3]$

حدِّد سلوك طرف التمثيل البياني لكلٍّ من الدوال الآتية عندما تقترب x من ما لانهاية، مستعملًا التبرير المنطقي، وبرِّر إجابتك. **(الدرس 1–3)**

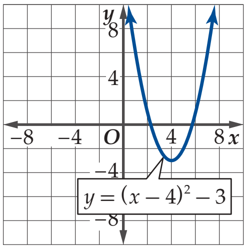
60) $q(x) = -\frac{12}{x}$

61) $f(x) = \frac{0.5}{x^2}$

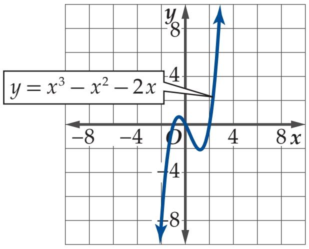
62) $p(x) = \frac{x+2}{x-3}$

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير قيمة كلٍّ من: المقطع y، والأصفار، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة: **(الدرس 1-2)**

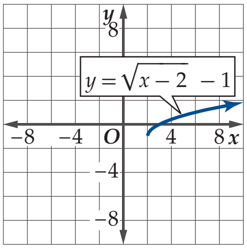
63)



64)

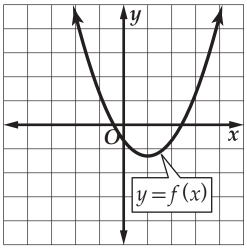


65)



تدريب على اختبار

66) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟



A $(0,\infty)$

B $(-\infty,1)$

C $(-1,\infty)$

D $(1,\infty)$

67) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2+8}{2}$ ؟

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

B $\{y \mid y \geq 4\}$

C $\{y \mid y \geq 0\}$

D $\{y \mid y \leq 0\}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-6

العمليات على الدوال وتركيب دالتين
Function Operations and Composition of Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

- أُجري العمليات على الدوال.
- أجِدُ تركيب الدوال.

المفردات:

تركيب الدالتين
composition of functions

لماذا؟

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

العمليات على الدوال: ستتعلمُ في هذا الدرس إجراءَ العمليات الأربع على الدوال.

مفهوم أساسي **العمليات على الدوال**

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

مثال 1 **العمليات على الدوال**

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = \sqrt{x + 2}, h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتيةِ، ثم حدد مجالها:

a) $(f + g)(x)$

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^2 + 4x) + \left(\sqrt{x + 2}\,\right)\\ &= x^2 + 4x + \sqrt{x + 2}\end{aligned}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$؛ لذا فإن مجال الدالة $(f + g)$ هو تقاطع مجالي f, g، وهو $[-2, \infty)$.

b) $(f - h)(x)$

$$\begin{aligned}(f - h)(x) &= f(x) - h(x)\\ &= (x^2 + 4x) - (3x - 5)\\ &= x^2 + 4x - 3x + 5\\ &= x^2 + x + 5\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$، لذا فإن مجال $(f - h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c) $(f \cdot h)(x)$

$$\begin{aligned}(f \cdot h)(x) &= f(x) \cdot h(x)\\ &= (x^2 + 4x)(3x - 5)\\ &= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x\\ &= 3x^3 + 7x^2 - 20x\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$؛ لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x - 5}{x^2 + 4x}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$ ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $\{x \mid x \neq 0 , x \neq -4, x \in R\}$.

☑ تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A) $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B) $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$ ، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

إرشادات للدراسة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين:

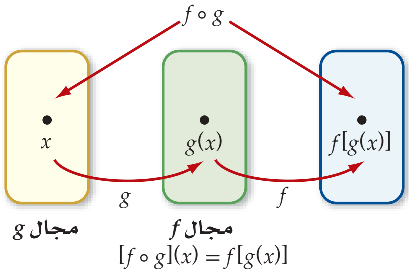
يختلف تركيب الدوال عن العمليات عليها، حيث يتم دمج الدالتين معًا، وليس مجرد إجراء عمليات مثل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

مفهوم أساسي — تركيب دالتين

يعرف **تركيب الدالتين** f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيث تُطبَّق الدالة g أولًا ثم الدالة f.

مثال 2 — تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ — تعريف $f \circ g$

$= f(x - 4)$ — $g(x) = x - 4$

$= (x-4)^2 + 1$ — عوِّض $(x-4)$ بدلًا من x في $f(x)$

$= x^2 - 8x + 16 + 1$ — بسِّط

$= x^2 - 8x + 17$

b) $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ — تعريف $g \circ f$

$= g(x^2 + 1)$ — $f(x) = x^2 + 1$

$= (x^2 + 1) - 4$ — عوِّض (x^2+1) بدلًا من x في $g(x)$

$= x^2 - 3$ — بسِّط

c) $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع **a** عندما $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ — عوِّض 2 مكان x في $x^2 - 8x + 17$

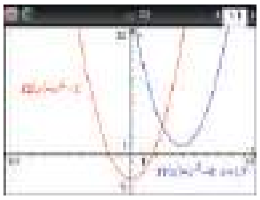
تنبيه!

ترتيب الدوال عند التركيب

في معظم الأحيان $g \circ f, f \circ g$ دالتان مختلفتان. بمعنى آخر إن تركيب الدوال ليس إبداليًا. ففي المثال 2

$[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$

لكن $[g \circ f](x) = x^2 - 3$ وهما دالتان مختلفتان. والتمثيل البياني أدناه يبيِّن ذلك.



☑ تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](3)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

بما أن مجال كل من f, g في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين:
من المهم تعرف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x^2 - 9)$ $g(x) = x^2 - 9$

$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$ عوِّض $(x^2 - 9)$ بدلًا من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2} , x \in R\}$.

b) $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x - 3}$

لإيجاد $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x)$، لجميع قيم x حيث $x \geq 3$. ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$، ونطرح منها 2.
لذا فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

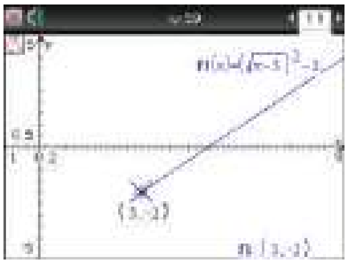
$= f(\sqrt{x - 3})$ $g(x) = \sqrt{x - 3}$

$= (\sqrt{x - 3})^2 - 2$ عوِّض $\sqrt{x - 3}$ بدلًا من x في $f(x)$

$= x - 3 - 2 = x - 5$ بسِّط

لاحظ أن مجال الدالة $x - 5$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بالشرط $x \geq 3$؛ لذا فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$ ومجالها $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

التحقق: استعمل الحاسبة البيانية لاختبار الإجابة. أدخل الدالة $f1(x) = (\sqrt{x-3})^2 - 2$. فيظهر التمثيل جزءًا من المستقيم $y = x - 5$. استعمل الإمكانات المتاحة في الحاسبة البيانيّة بالضغط على مفتاح menu، ثم على **5: تتبع المسار**، واختر منها **1: تتبع مسار التمثيل**؛ لمساعدتك على تحديد مجال $f \circ g$ والذي يبدأ عند $x = 3$ ويمتد إلى ∞ .



✓ تحقق من فهمك

(3A $f(x) = \sqrt{x+1}\,, g(x) = x^2 - 1$

(3B $f(x) = \frac{5}{x}\,, g(x) = x^2 + x$

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل h، فإنك تجد دالتين (f, g مثلًا) بحيث يكون تركيبهما هو h .

مثال 4 كتابة الدالة كتركيب دالتين

أوجد دالتين $f\,, g$ بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

(a $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x+5)^2$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $f(x) = 2x^2\,, g(x) = x + 5$، وعندئذٍ:

$$h(x) = 2(x+5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

(b $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

لاحظ أن الدالة h يمكن أن تكتب كتركيب دالتين $f,\ g$ حيث يمكن اختيار $g(x) = -7x$، وكتابة: $h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9\ (-7x)}{7}$، وعندئذ: $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9}{7}$

$$h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9\ (-7x)}{7} = \sqrt{g(x)} - \frac{9\ (g(x))}{7} = f(g(x)) = [f\ o\ g](x)$$

✓ تحقق من فهمك

(4A $h(x) = x^2 - 2x + 1$

(4B $h(x) = \frac{1}{x+7}$

إرشادات للدراسة

كتابة الدالة كتركيب دالتين:

في المثال $4a$، يمكنك إيجاد دالتين أخريين غير $g(h) = x + 5, f(x) = 2x^2$ بحيث إن: $h(x) = [f\ o\ g](x)$، وكذلك الأمر بالنسبة للفرع 4b

يمكنك استعمال تركيب دالتين لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 5 من واقع الحياة على شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية: تُصمِّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

(a أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $L + 40$.

أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L\,(L + 40) = L^2 + 40L$، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $L(t) = 20 + 15t$، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

(b أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$	تعريف $A \circ L$
$= A(20 + 15t)$	$L(t) = 20 + 15t$
$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$	عوِّض $(20 + 15t)$ بدلًا من L في $A(L)$
$= 225t^2 + 1200t + 1200$	بسِّط

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن.

الربط مع الحياة

مؤثرات حركية

يعمل المصممون في العديد من الأعمال لتصميم مؤثرات حركية تستعمل في التلفاز وألعاب الفيديو؛ لذا يجب أن يكون مصممو الألعاب فنانين، ويتلقى أغلبهم تدريبًا في كليات متخصصة.

c) **كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟**

مساحة المستطيل الأصلي 60×20 وتساوي 1200 بكسل. وتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية عندما $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$. وبحل المعادلة بالنسبة إلى t تجد أن $t \approx 1.55$ أو $t = -6.88$. وبما أن الزمن السالب ليس جزءًا من مجال $L(t)$، وكذلك ليس جزءًا من مجال دالة التركيب، فإن مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 ثانية تقريبًا.

☑ تحقق من فهمك

5) **أعمال:** أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$. في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: **(مثال 1)**

1) $f(x) = x^2 + 4$
$g(x) = \sqrt{x}$

2) $f(x) = 8 - x^3$
$g(x) = x - 3$

3) $f(x) = x^2 + 5x + 6$
$g(x) = x + 2$

4) $f(x) = x^2 + x$
$g(x) = 9x$

5) $f(x) = x - 7$
$g(x) = x + 7$

6) $f(x) = \frac{6}{x}$
$g(x) = x^3 + x$

7) $f(x) = \frac{x}{4}$
$g(x) = \frac{3}{x}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$g(x) = 4\sqrt{x}$

9) $f(x) = \sqrt{x+8}$
$g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

10) $f(x) = \sqrt{x+6}$
$g(x) = \sqrt{x-4}$

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](6)$ لكل زوج من الدوال الآتية. **(مثال 2)**

11) $f(x) = 2x - 3$
$g(x) = 4x - 8$

12) $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$
$g(x) = -5x + 6$

13) $f(x) = x^2 - 16$
$g(x) = x^2 + 7x + 11$

14) $f(x) = 2 + x^4$
$g(x) = -x^2$

حدِّد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية: **(مثال 3)**

15) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 4$

16) $f(x) = \frac{2}{x-3}$
$g(x) = x^2 + 6$

17) $f(x) = \sqrt{x+4}$
$g(x) = x^2 - 4$

18) $f(x) = \frac{5}{x}$
$g(x) = \sqrt{6-x}$

19) $f(x) = -\frac{4}{x}$
$g(x) = \sqrt{x+8}$

20) $f(x) = \sqrt{x+5}$
$g(x) = x^2 + 4x - 1$

21) **النظرية النسبية:** في النظرية النسبية $m(v) = \frac{100}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ، حيث c سرعة الضوء وتساوي 300 مليون متر في الثانية، و m كتلة جسم يسير بسرعة v متر في الثانية، وكتلته الأصلية 100 kg. **(مثال 4)**

a) هل توجد قيود على مجال الدالة m؟ برِّر إجابتك.

b) أوجد $m(10)$, $m(10000)$, $m(1000000)$.

c) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $m(v)$ عندما تقترب v من c من اليسار.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

أوجد دالتين f, g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أيّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$. (مثال 4)

22) $h(x) = \sqrt{4x + 2} + 7$

23) $h(x) = \frac{6}{x + 5} - 8$

24) $h(x) = |4x + 8| - 9$

25) $h(x) = [-3(x - 9)]$

26) $h(x) = \sqrt{\frac{5 - x}{x + 2}}$

27) $h(x) = (\sqrt{x} + 4)^3$

28) $h(x) = \frac{8}{(x - 5)^2}$

29) $h(x) = \frac{\sqrt{4 + x}}{x - 2}$

30) **ميكانيكا الكم:** يُعطى طول الموجة λ لجسم كتلته m kg، ويتحرك بسرعة v متر في الثانية بالدالة $\lambda = \frac{h}{mv}$ ، حيث h ثابت يساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$.

a) أوجد دالة تمثّل طول الموجة لجسم كتلته 25 kg بدلالة سرعته.

b) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ برر إجابتك.

c) إذا تحرك الجسم بسرعة 8 أمتار في الثانية، فأوجد طول الموجة بدلالة h.

d) اكتب الدالة في الفقرة a على صورة تركيب دالتين.

31) **وظائف:** يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال. افترض أن $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$. (مثال 5)

a) إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال، فهل تُمثّل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$؟ برِّر إجابتك.

b) أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة.

أوجد دالتين f, g لكلٍّ مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أيّ من الدالتين الدالة المحايدة $I(x) = x$.

32) $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

33) $h(x) = \sqrt{x - 1} - \frac{4}{x}$

34) $h(x) = \frac{x}{2x - 1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

أوجد $f(x + 1)$, $f(-6)$, $f(0.5)$ في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك:

35) $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6, g(x) = x + 4$

36) $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}, g(x) = 2x$

37) $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x}, g(x) = \sqrt{1 - x}$

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ في كل مما يأتي:

38) $f(x) = x + 8$
$g(x) = x^2 - 6$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

39) $f(x) = \sqrt{x + 5}$
$g(x) = x^2 - 3$
$h(x) = \frac{1}{x}$

40) إذا كانت $f(x) = x + 2$ ، فأوجد $g(x)$ في كل حالة مما يأتي:

a) $(f + g)(x) = x^2 + x + 6$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$

41) إذا كانت $f(x) = \sqrt{4x}$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \circ g](x) = |6x|$

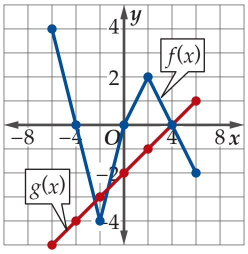
b) $[g \circ f](x) = 200x + 25$

42) إذا كانت $f(x) = 4x^2$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \cdot g](x) = x$

b) $[f \cdot g](x) = 4x$

باستعمال منحنيي الدالتين $g(x)$, $f(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:



43) $(f + g)(2)$

44) $(f - g)(-6)$

45) $(f \cdot g)(4)$

46) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

47) $(f \circ g)(-4)$

48) $(g \circ f)(6)$

49) **كيمياء:** إذا كان $v(m)$ معدل سرعة جزيئات غاز عند درجة $30°C$ بالمتر لكل ثانية تُعطى بالدالة $v(m) = \sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$ ، حيث m الكتلة المولية للغاز مقاسة بالكيلوجرام لكل مول.

a) هل توجد قيود على مجال الدالة؟فسِّر معناها.

b) أوجد معدل سرعة جزيئات الغاز إذا كانت كتلته المولية 145 كيلوجرامًا لكل مول عند درجة $30°C$.

c) كيف يتغير معدل سرعة جزيئات غاز عندما تزداد كتلة الغاز المولية؟

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

أوجد ثلاث دوال f, g, h ، بحيث يكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$ في كلٍّ مما يأتي:

50) $a(x) = (\sqrt{x-7} + 4)^2$

51) $a(x) = \sqrt{(x-5)^2 + 8}$

52) $a(x) = \frac{3}{(x-3)^2 + 4}$

53) $a(x) = \frac{4}{(\sqrt{x} + 3)^2 + 1}$

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، وحدّد أية قيود على مجال دالة التركيب في كل حالة:

54) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
$g(x) = \sqrt{x+4} + 3$

55) $f(x) = \sqrt{x+6}$
$g(x) = \sqrt{16 + x^2}$

56) $f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

57) $f(x) = \frac{6}{2x+1}$
$g(x) = \frac{4}{4-x}$

58) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي الدالة العكسية.

$g(x)$	$f(x)$
$x - 3$	$x + 3$
$\frac{x}{4}$	$4x$
$\sqrt[3]{x}$	x^3

a) **جبريًا:** أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في الجدول المجاور.

b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

c) **بيانيًا:** مثّل كل زوج من الدوال في المستوى الإحداثي نفسه، ثم ارسم محور الانعكاس بإيجاد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.

d) **لفظيًا:** خمّن معادلة محور الانعكاس.

e) **تحليليًا:** ما الدالة الرئيسة (الأم) التي تساوي كل من $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$؟

f) **تحليليًا:** أوجد $g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ في كلٍّ مما يأتي.

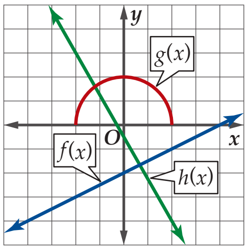
a) $f(x) = x - 6$

c) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = \frac{x}{3}$

d) $f(x) = 2x - 3$

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الشكل المجاور. ففي السؤال 59 مثِّل الدوال $f, h, f+h$ في المستوى الإحداثي نفسه، وهكذا في الأسئلة 62-60:



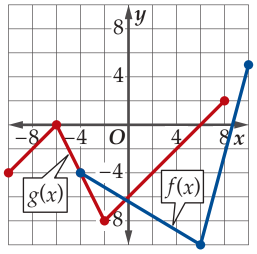
59) $(f + h)(x)$

60) $(h - f)(x)$

61) $(f + g)(x)$

62) $(h + g)(x)$

حدّد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، باستعمال الشكل الآتي:



63) $(f \circ g)(x)$

64) $(g \circ f)(x)$

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: **في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كانت الدالة $(f \circ g)(x)$ زوجية، أم فردية أم غير ذلك.**

65) f, g دالتان فرديتان.

66) f, g دالتان زوجيتان.

67) f زوجية، g فردية.

68) f فردية، g زوجية.

تحدّ: في كلٍّ مما يأتي، أوجد دالة f لا تساوي الدالة $I(x) = x$ بحيث تحقق الشرط المعطى.

69) $(f \cdot f)(x) = x$

70) $(f + f)(x) = x$

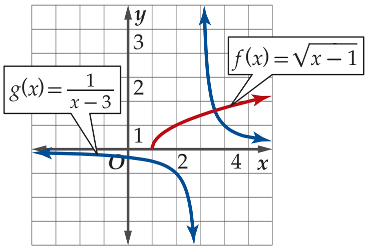
71) $[f \circ f](x) = x$

72) $[f \circ f \circ f](x) = x$

73) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرِّر إجابتك.

"إذا كانت f دالة جذر تربيعي و g دالة تربيعية ، فإن $f \circ g$ هي دائمًا دالة خطية".

74) **اكتب:** كيف تحدد مجال الدالة $[f \circ g](x)$ باستعمال الشكل الآتي:



مراجعة تراكمية

أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكلٍّ من الدوال الآتية مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة، ثم حدّد قيم x التي تقع عندها هذه القيم: (الدرس 1-4)

75) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

76) $g(x) = -x^3 + 5x - 3$

77) $f(x) = x^4 + x^3 - 2$

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 1–3)

78) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 4}, [-3, 3]$

79) $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 3x}, [1, 5]$

80) **علاقة:** في إحصائية أجريت لعدد الموظفين من الجنسين في أحد المستشفيات لعدة سنوات متتالية، كانت نتائجها كما في الجدول الآتي: (الدرس 1-1)

السنة	1427	1428	1429	1430	1431
عدد الإناث (x)	43	48	54	54	48
عدد الذكور (y)	150	148	137	156	146

a) مثّل البيانات التي تربط عدد الإناث بعدد الذكور والموجودة في الجدول بيانيًّا.

b) اكتب مجال العلاقة ومداها.

c) هل تمثّل هذه العلاقة دالة؟ برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

81) إذا كانت $h(x) = 2(x - 5)^2$ ، $g(x) = x^2 + 9x + 21$ ، فإن $[h \circ g](x)$ تساوي:

A $x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$

B $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$

C $3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$

D $4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$

82) إذا كان $f(2)=3, g(3)=2, f(3)=4, g(2)=5$ ، فما قيمة $[f \circ g](3)$؟

A 2

B 3

C 4

D 5

العلاقات والدوال العكسية
Inverse Relations and Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد تركيب دالتين. (الدرس 6–1)

والآن:

- أستعملُ اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا.
- أجِدُ الدالة العكسية جبريًّا وبيانيًّا.

المفردات:

العلاقة العكسية	inverse relation
الدالة العكسية	inverse function
الدالة المتباينة	one-to-one function

لماذا؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

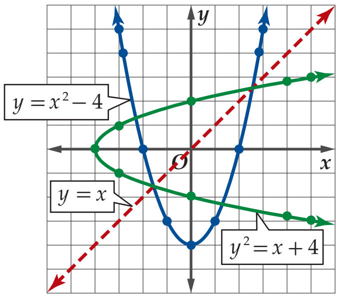
السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

الدالة العكسية: العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن كلًّا من العلاقتين A, B **علاقة عكسية** للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة

$y = x^2 - 4$

y	x
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

y	x
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالّ. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لِـ f، ويرمز لها بالرمز f^{-1}. لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقّق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

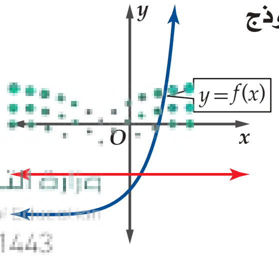
يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

مفهوم أساسي اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

نموذج

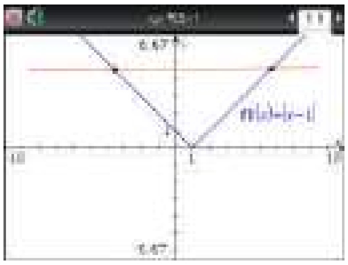


قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية: يجب ألّا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.

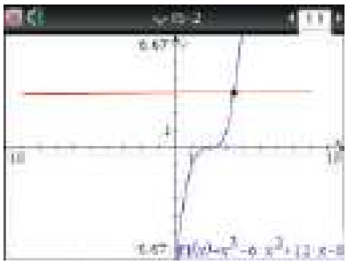
مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.



a) $f(x) = |x - 1|$

يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.



b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.

☑ تحقق من فهمك

1A) $h(x) = \frac{4}{x}$

1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$

تنبيه!

اختبار الخط الأفقي

عند استعمال الحاسبة البيانية، اختبر بدقة المواقع التي يفشل فيها اختبار الخط الأفقي باستعمال 4: تكبير/تصغير النافذة

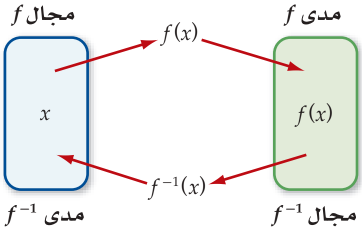
واختر منها 3: تكبير

أو 4: تصغير

أو اضبط الشاشة للتأكد.

إيجاد الدالة العكسية: إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y. ولا توجد قيمة لِـ y ترتبط بأكثر من قيمة لِـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًّا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًّا لمجال f^{-1}.



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y .

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1} . وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1} .

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1}.

قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس:
يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.

مثال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
والآن أوجد f^{-1}.

$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ الدالة الأصلية

$y = \frac{x-1}{x+2}$ عوّض y بدلًا من $f(x)$

$x = \frac{y-1}{y+2}$ بدّل بين x, y

$xy + 2x = y - 1$ اضرب الطرفين في $(y+2)$، ثم طبق خاصية التوزيع

$xy - y = -2x - 1$ ضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد

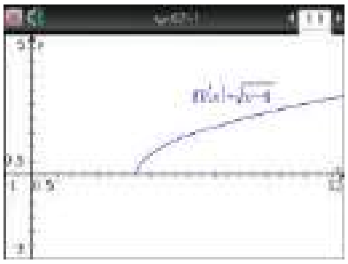
$y(x-1) = -2x - 1$ خاصية التوزيع

$y = \frac{-2x-1}{x-1}$ حل بالنسبة لـ y

$f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$ عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y، لاحظ أن $x \neq 1$

يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. أي أن مجال ومدى f يساويان مدى ومجال f^{-1} على الترتيب.
لذا لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1}.

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$



يوضّح الشكل المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن الدالة f متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $[4, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$. أوجد f^{-1}.

$f(x) = \sqrt{x-4}$ الدالة الأصلية

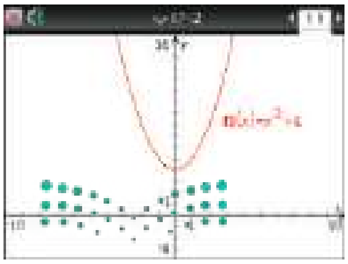
$y = \sqrt{x-4}$ عوّض y بدلًا من $f(x)$

$x = \sqrt{y-4}$ بدّل بين x و y

$x^2 = y - 4$ ربّع الطرفين

$y = x^2 + 4$ حل بالنسبة إلى y

$f^{-1}(x) = x^2 + 4$ عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y



يظهر من التمثيل البياني المجاور أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$، ومداها $[4, \infty)$. ومن ثم فإننا نفرض قيودًا على مجالها بحيث يكون مساويًا لمدى f وهو $[0, \infty)$، ويبقى مداها $[4, \infty)$. والآن يصبح مجال f ومداها مساويان لمدى f^{-1} ومجالها على الترتيب؛ لذا فإن $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$.

✓ تحقق من فهمك

2A) $f(x) = -16 + x^3$

2B) $f(x) = \frac{x+7}{x}$

2C) $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ **لجميع قيم** x **في مجال** $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ **لجميع قيم** x **في مجال** $f(x)$.

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

مثال 3 إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ وَ $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right)$$

$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4}$$

$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right)$$

$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4$$

$$= x - 4 + 4 = x$$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، فإن كلًّا من الدالتين $f(x), g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

☑ تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

(3A $f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

(3B $f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10}$

من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبريًّا لمعظم الدوال المتباينة، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$.

إرشادات للدراسة

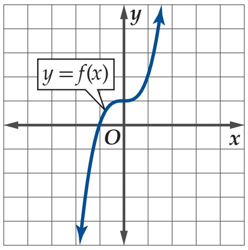
الدالة العكسية والقيم القصوى

يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي، ومن ثم لا تكون دالة متباينة.

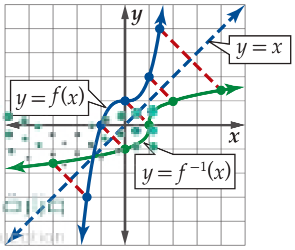
مثال 4 إيجاد الدالة العكسية بيانيًّا

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3

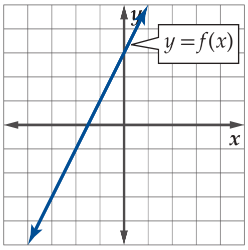


الشكل 1.7.4

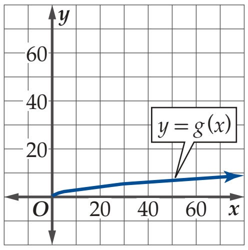
☑ تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًّا:

4A)

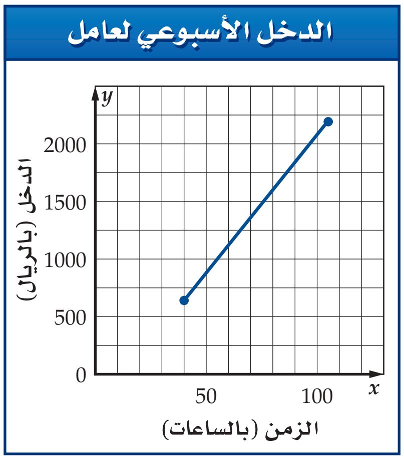


4B)



مثال 5 من واقع الحياة استعمال الدالة العكسية

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًّا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ 40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.



a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$

أو $f(x) = 24x - 320$.

يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

$f(x) = 24x - 320$	الدالة الأصلية
$y = 24x - 320$	عوِّض y بدلًا من $f(x)$
$x = 24y - 320$	بدِّل بين x و y
$x + 320 = 24y$	أضف 320 إلى الطرفين
$y = \frac{x + 320}{24}$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = \frac{x + 320}{24}$	عوِّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

b) ماذا تمثِّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثِّل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثِّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

c) حدِّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضِّح إجابتك.

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 ساعة. والحد الأعلى 105 ساعات؛ لذا فإن مجال $f(x)$ هو $[40, 105]$. و بما أن $f(40) = 640$, $f(105) = 2200$ ، فإن مدى $f(x)$ هو $[640, 2200]$ ، وهو مجال الدالة $f^{-1}(x)$.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

$f^{-1}(760) = \frac{760 + 320}{24} = 45$ أي أن الشخص عمل 45 ساعة في هذا الأسبوع.

☑ تحقق من فهمك

5) **توفير:** يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$ ، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثِّل كل من x , $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f^{-1}(x)$, $f(x)$ إن وجدت. وبرِّر إجابتك.

5D) إذا وفَّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

الربط مع الحياة

ينص نظام العمل في المملكة على أنه "لا يجوز تشغيل العامل تشغيلًا فعليًّا أكثر من 8 ساعات في اليوم الواحد إذا اعتمد صاحب العمل المعيار اليومي، أو أكثر من 48 ساعة إذا اعتمد المعيار الأسبوعي".

إرشادات للدراسة

الدالة الخطية: يمكنك الحكم بأن منحنى الدالة الخطية يحقق اختبار الخط الأفقي دون الحاجة إلى رسمه.

تدرب وحل المسائل

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$

2) $y = x^2 - 16x + 64$

3) $y = 3x - 8$

4) $y = 4$

5) $y = \sqrt{x + 4}$

6) $y = -4x^2 + 8$

7) $y = \dfrac{8}{x + 2}$

8) $y = \dfrac{1}{4}x^3$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9) $f(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$

10) $f(x) = 4x^5 - 8x^4$

11) $f(x) = \sqrt{x + 8}$

12) $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$

13) $f(x) = |x - 6|$

14) $f(x) = \dfrac{x - 6}{x}$

15) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{8 - x}}$

16) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x + 3}}$

17) $f(x) = \dfrac{x + 4}{3x - 5}$

18) $f(x) = |x + 1| + |x - 4|$

19) **سرعة:** تُعطى سرعة جسم y بالكيلومتر لكل ساعة بالدالة $y = 1.6x$ حيث x سرعة الجسم بالميل لكل ساعة. (مثال 2)

a) أوجد الدالة العكسية لِـ y، وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

b) مَثّل كلًّا من الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه.

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

20) $f(x) = 4x + 9$

$g(x) = \dfrac{x - 9}{4}$

21) $f(x) = -3x^2 + 5,\ x \ge 0$

$g(x) = \sqrt{\dfrac{5 - x}{3}}$

22) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + 8,\ x \ge 0$

$g(x) = \sqrt{4x - 32}$

23) $f(x) = (x + 8)^{\frac{3}{2}}$

$g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8,\ x \ge 0$

24) $f(x) = 2x^3 - 6$

$g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x + 6}{2}}$

25) $f(x) = \dfrac{x - 6}{x + 2}$

$g(x) = \dfrac{2x + 6}{1 - x}$

26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x) = 0.5mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلوجرام و x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية. (مثال 3)

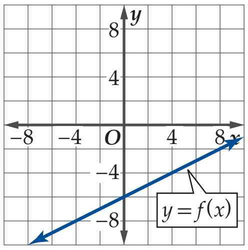
a) أوجد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$. وماذا يعني كل متغير فيها؟

b) أثبت أن كلًّا من الدالتين $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ التي حصلت عليها تمثل دالة عكسية للأخرى.

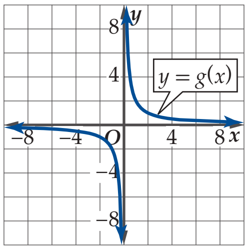
c) مَثِّل كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ على الشاشة نفسها من الحاسبة البيانية عندما تكون كتلة الجسم كيلو جرام واحد.

استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثل الدالة العكسية لها: (مثال 4)

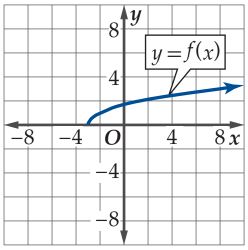
27)



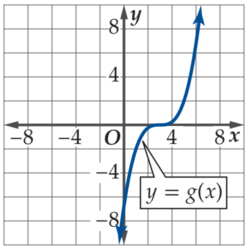
28)



29)



30)



31) **وظائف:** يعمل فالح في أحد محلات بيع الأحذية خارج أوقات دوامه الرسمي مقابل راتب مقداره 420 ريالًا في الأسبوع، ويتقاضى أيضًا عمولة مقدارها 5% من قيمة المبيعات. أي أن ما يتقاضاه أسبوعيًّا يُعطى بالدالة $f(x) = 420 + 0.05x$ حيث تمثل x قيمة المبيعات. (مثال 5)

a) أثبت أن الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

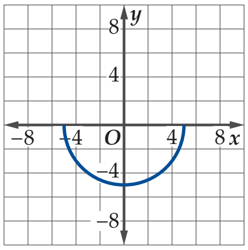
b) ماذا تمثّل كل من $x, f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

c) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x), f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

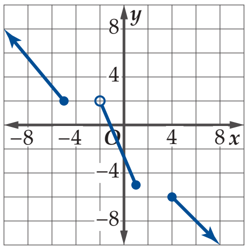
d) أوجد قيمة مبيعات فالح في الأسبوع الذي يتقاضى فيه 720 ريالًا.

حدّد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

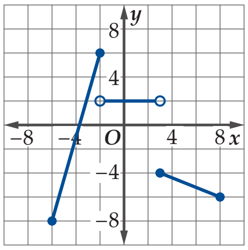
32)



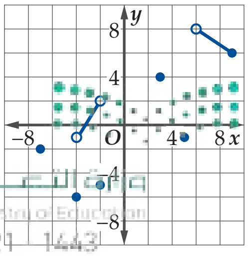
33)



34)



35)



كون جدولًا للدالة f^{-1} في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، وإذا لم تكن موجودة، فاذكر السبب.

36)

x	-6	-4	-1	3	6	10
$f(x)$	-4	0	3	5	9	13

37)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

38) **درجات حرارة:** تُستعمل الدالة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجات الحرارة السيليزية إلى درجات الحرارة الفهرنهايتية، وتُستعمل الدالة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$ للتحويل من درجات الحرارة الفهرنهايتية إلى درجات الحرارة المطلقة (كلفن).

a) أوجد f^{-1}، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

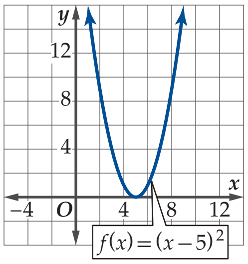
b) أثبت أن كلاًّ من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، ومثّل منحناهما على الشاشة نفسها في الحاسبة البيانية.

c) أوجد $(k \circ f)(x)$، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

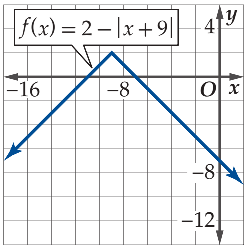
d) إذا كانت درجة الحرارة $60°C$، فأوجد درجة الحرارة المطلقة المقابلة لها.

ضع قيودًا على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة. ثم أوجد الدالة العكسية لها:

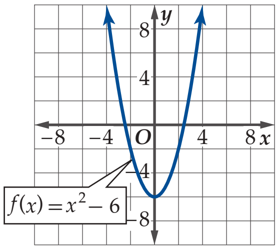
39)



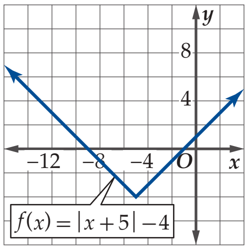
40)



41)



42)



43) **أزهار:** تحتاج فاطمة إلى 75 زهرة لتزيين قاعة في إحدى المناسبات، فإذا كان بإمكانها شراء قرنفل بسعر 3 ريالات للزهرة الواحدة وشراء جوري بسعر 5 ريالات للزهرة الواحدة، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تمثّل التكلفة الكلية لشراء الأزهار.

b) أوجد الدالة العكسية لدالة التكلفة. وماذا يمثّل كل متغير فيها ؟

c) حدّد مجال دالة التكلفة، ومجال الدالة العكسية لها.

d) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء الأزهار 305 ريالات، فكم زهرة من القرنفل اشترت؟

إذا كانت الدالة f^{-1} موجودة، فاكتب المجال والمدى لكل من f, f^{-1}:

44) $f(x) = \sqrt{x-6}$

45) $f(x) = x^2 + 9$

46) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}$

47) $f(x) = \dfrac{8x+3}{2x-6}$

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد. و اذكر أية قيود على المجال:

48)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad -4 \geq x \\ -2x+5 & , \quad -4 < x \end{cases}$$

49)
$$f(x) = \begin{cases} -4x+6 & , \quad -5 \geq x \\ 2x-8 & , \quad -5 < x \end{cases}$$

50) **اتصالات:** أعلنت شركة لبيع أجهزة الهاتف المحمول عن عرض مبين في الشكل أدناه. فكانت الشركة تخصم 50 ريالًا وتمنح تخفيضًا مقداره 10% من سعر الجهاز الأصلي.

a) اكتب دالة r لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم خصم 50 ريالًا فقط.

b) اكتب دالة d لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم منح التخفيض (10%) فقط.

c) اكتب قاعدة تمثّل $T = r \circ d$ إذا تم التخفيض ثم الخصم.

d) أوجد T^{-1} ، وماذا تمثّل؟

e) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء جهاز بعد التخفيض ثم الخصم 760 ريالًا، فكم يكون سعره الأصلي؟

إذا كانت $f(x) = 8x - 4, g(x) = 2x + 6$ فأوجد:

51) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

52) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

53) $(f \circ g)^{-1}(x)$

54) $(g \circ f)^{-1}(x)$

55) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة وجود أو عدم وجود دالة عكسية لكلٍّ من الدالة الزوجية والدالة الفردية.

a) **بيانيًّا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

b) **تحليليًّا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الزوجية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.

c) **بيانيًّا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال فردية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

d) **تحليليًّا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الفردية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.

مسائل مهارات التفكير العليا

56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفرًا عند 6، ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟

57) **اكتب:** وضح القيود التي يجب وضعها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية. وضّح بمثال.

58) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برِّر إجابتك.

"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية"

59) **تحدٍّ:** إذا كانت $f(x) = x^3 - a, f^{-1}(23) = 3$، فأوجد قيمة a.

60) **تبرير:** هل توجد دالة $f(x)$ تحقق اختبار الخط الأفقي، وتحقق المعادلتين $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 , \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ في الوقت نفسه؟

مراجعة تراكمية

لكل زوج من الدوال الآتية، أوجد $f \circ g, g \circ f$، ثم أوجد مجال دالة التركيب: (الدرس 1-6)

61) $f(x) = x^2 - 9$
$g(x) = x + 4$

62) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$
$g(x) = x + 6$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) المعطاة لوصف منحنى كل دالة مرتبطة بها لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-5)

63) $f(x) = x^2$

a) $y = (0.2x)^2$

b) $y = (x - 5)^2 - 2$

c) $y = 3x^2 + 6$

64) $f(x) = x^3$

a) $y = \left|x^3 + 3\right|$

b) $y = -(2x)^3$

c) $y = 0.75(x + 1)^3$

65) $f(x) = |x|$

a) $y = |2x|$

b) $y = |x - 5|$

c) $y = |3x + 1| - 4$

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 1-4)

66) $f(x) = x^3 - x, [0, 3]$

67) $f(x) = x^4 - 2x + 1, [-5, 1]$

تدريب على اختبار

68) أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$؟

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

69) إذا كان كل من m و n عددًا صحيحًا فرديًّا، فأي العبارات الآتية صحيحة؟

I) $m^2 + n^2$ عدد زوجي

II) $m^2 + n^2$ يقبل القسمة على 4

III) $(m + n)^2$ يقبل القسمة على 4

A كلها غير صحيحة

B I فقط

C I و II فقط صحيحتان

D I و III فقط صحيحتان

الفصل
1

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الدوال (الدرس 1–1)

- المجموعات الجزئية الشائعة من مجموعة الأعداد الحقيقية هي: الأعداد النسبية، الأعداد غير النسبية، الأعداد الصحيحة، الأعداد الكلية، الأعداد الطبيعية.
- الدالة هي علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.
- يحقق منحنى أي دالة اختبار الخط الرأسي.

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الدرس 2–1)

- قد تكون المنحنيات متماثلةً حول المحور y، أو المحور x، أو نقطة الأصل.
- الدالة الزوجية متماثلة حول المحور y، والدالة الفردية متماثلة حول نقطة الأصل.

الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات (الدرس 3–1)

- إذا كانت قيم الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فنقول: إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c تساوي L. وتكتب $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.
- قد تكون الدالة غير متصلة، ونوع عدم الاتصال هو لانهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الدرس 4–1)

- تكون الدالة إما متزايدةً أو متناقصةً أو ثابتةً على فترات معينة.
- تتضمن القيم القصوى القيمة العظمى المحلية، والصغرى المحلية، والعظمى المطلقة، والصغرى المطلقة.
- يعطى متوسط معدل التغير بين نقطتين بالقاعدة

$$m_{\sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

الدالة الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الدرس 5–1)

تتضمن التحويلات الهندسية على الدالة الرئيسة (الأم): الانسحاب، الانعكاس، التمدد.

العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الدرس 6–1)

إن حاصل جمع، وطرح، وضرب، وقسمة، وتركيب أي دالتين ينتج دوال جديدة.

العلاقات والدوال العكسية (الدرس 7–1)

- تكون كلٌّ من العلاقتين A, B عكسية للأخرى إذا وفقط إذا وجد (b, a) في إحداهما فإنه يوجد (a, b) في الأخرى.
- تكون كلٌّ من الدالتين f, f^{-1} عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x, f^{-1}[f(x)] = x$.

المفردات

- **الصفة المميزة للمجموعة** (ص. 10)
- **رمز الفترة** (ص. 11)
- **الدالة** (ص. 11)
- **رمز الدالة** (ص. 13)
- **المتغير المستقل** (ص. 13)
- **المتغير التابع** (ص. 13)
- **الدالة متعددة التعريف** (ص. 14)
- **الأصفار** (ص. 20)
- **الجذور** (ص. 20)
- **التماثل حول مستقيم** (ص. 21)
- **التماثل حول نقطة** (ص. 21)
- **الدالة الزوجية** (ص. 23)
- **الدالة الفردية** (ص. 23)
- **الدالة المتصلة** (ص. 28)
- **النهاية** (ص. 28)
- **الدالة غير المتصلة** (ص. 28)
- **عدم الاتصال اللانهائي** (ص. 28)
- **عدم الاتصال القفزي** (ص. 28)
- **عدم الاتصال القابل للإزالة** (ص. 28)
- **عدم الاتصال غير قابل للإزالة** (ص. 31)
- **سلوك طرفي التمثيل البياني** (ص. 32)
- **المتزايدة** (ص. 38)
- **المتناقصة** (ص. 38)
- **الثابتة** (ص. 38)
- **النقطة الحرجة** (ص. 40)
- **العظمى** (ص. 40)
- **الصغرى** (ص. 40)
- **القصوى** (ص. 40)
- **متوسط معدل التغير** (ص. 42)
- **القاطع** (ص. 42)
- **الدالة الرئيسة (الأم)** (ص. 48)
- **الدالة الثابتة** (ص. 48)
- **الدالة المحايدة** (ص. 48)
- **الدالة التربيعية** (ص. 48)
- **الدالة التكعيبية** (ص. 48)
- **دالة الجذر التربيعي** (ص. 48)
- **دالة المقلوب** (ص. 48)
- **دالة القيمة المطلقة** (ص. 49)
- **الدالة الدرجية** (ص. 49)
- **دالة أكبر عدد صحيح** (ص. 49)
- **التحويل الهندسي** (ص. 49)
- **الانسحاب** (ص. 50)
- **الانعكاس** (ص. 51)
- **التمدد** (ص. 52)
- **تركيب دالتين** (ص. 59)
- **العلاقة العكسية** (ص. 66)
- **الدالة العكسية** (ص. 66)
- **الدالة المتباينة** (ص. 67)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو غير صحيحة، وإذا كانت غير صحيحة، فاستبدل المفردة التي تحتها خط حتى تصبح صحيحة.

1) تعين الدالة لكل عنصر في مجالها عنصرًا واحدًا فقط في مداها.
2) المنحنيات المتماثلة حول نقطة يمكن تدويرها 180° حول النقطة، فتبدو كأنها لم تتغير.
3) للدالة الفردية نقطة تماثل.
4) لا يتضمن منحنى الدالة المتصلة فجوةً أو انقطاعًا.
5) الدالة الفردية متماثلة حول المحور y.
6) الدالة $f(x)$ التي تتناقص قيمها مع تزايد قيم x تسمى دالةً متناقصةً.
7) تتضمن القيم القصوى لدالة قيمًا عظمى محليةً أو صغرى محليةً.
8) انسحاب المنحنى عبارة عن صورة مرآة للمنحنى الأصلي حول مستقيم.
9) تحقق الدالة المتباينة اختبار الخط الأفقي.
10) الدالة المتباينة لها محور تماثل.

ملخص الدروس

1-1 الدوال (الصفحات 17 - 10)

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y دالة في x أم لا:

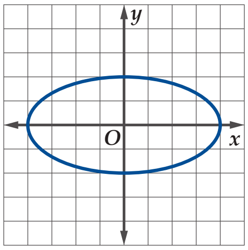
11) $3x - 2y = 18$

12) $y^3 - x = 4$

13)

y	x
7	5
9	7
11	9
13	11

14)



إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x + 4$، فأوجد كلًّا من القيمتين الآتيتين:

15) $f(5)$

16) $f(-3x)$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية:

17) $f(x) = 5x^2 - 17x + 1$

18) $g(x) = \sqrt{6x - 3}$

19) $h(a) = \dfrac{5}{a + 5}$

20) $v(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

مثال 1

في العلاقة $x = y^2 - 8$ حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

حل بالنسبة إلى y.

$y^2 - 8 = x$ الدالة الأصلية

$y^2 = x + 8$ أضف 8 للطرفين

$y = \pm\sqrt{x + 8}$ خذ الجذر التربيعي للطرفين

في هذه العلاقة، y لا تمثّل دالة في المتغير x؛ لأن كل قيمة لـ x أكبر من -8 ترتبط بقيمتين من قيم y.

مثال 2

إذا كانت $g(x) = -3x^2 + x - 6$، فأوجد $g(2)$.

عوض 2 مكان x في العبارة: $-3x^2 + x - 6$.

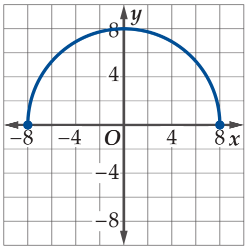
$g(2) = -3(2)^2 + 2 - 6$ $x = 2$

$= -12 + 2 - 6 = -16$ بسّط

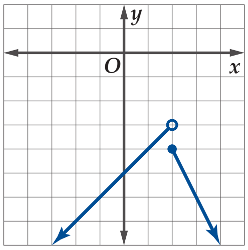
1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الصفحات 27 - 18)

استعمل التمثيل البياني لإيجاد مجال كل دالة ومداها في كل مما يأتي:

21)



22)



أوجد المقطع y، والأصفار لكل دالة مما يأتي:

23) $f(x) = 4x - 9$

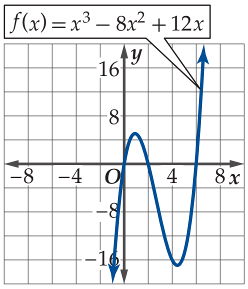
24) $f(x) = x^2 - 6x - 27$

25) $f(x) = x^3 - 16x$

26) $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$

مثال 3

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ لإيجاد مقطعها y وأصفارها. ثم أوجد هذه القيم جبريًّا.



التقدير بيانيًا:

يتضح من الشكل أن منحنى $f(x)$ يقطع المحور y عند $(0, 0)$؛ لذا فإن المقطع y هو 0 .

المقاطع x (أصفار الدالة) تبدو قريبةً من $0, 2, 6$.

الحل جبريًّا:

لإيجاد المقطع y، أوجد $f(0)$.

$f(0) = 0^3 - 8 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0$

حلل المعادلة المرتبطة بالدالة إلى العوامل لإيجاد أصفار الدالة.

$0 = x(x^2 - 8x + 12)$

$= x(x - 2)(x - 6)$

أصفار الدالة f هي $0, 2, 6$.

الفصل 1 دليل الدراسة و المراجعة

1-3 الاتصال والنهايات (الصفحات 37 - 28)

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيم x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فبيّن نوع عدم الاتصال لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

27) $f(x) = x^2 - 3x\ ,\ x = 4$

28) $f(x) = \sqrt{2x - 4}\ ,\ x = 10$

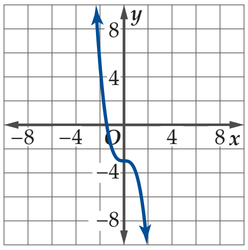
29) $f(x) = \frac{x}{x + 7}\ ,\ x = 0\ ,\ x = 7$

30) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}\ ,\ x = 2\ ,\ x = 4$

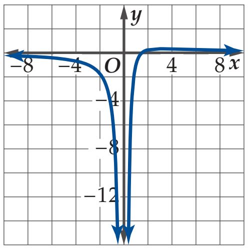
31) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & ,\ x < 1 \\ 2x & ,\ x \geq 1 \end{cases}\ ,\ x = 1$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل منهما:

32)



33)



مثال 4

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{x - 4}$ متصلة عند $x = 0\ ,\ x = 4$. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$f(0) = -0.25$ ، لذلك f معرفة عند 0 . وتقترب قيم الدالة من -0.25 عندما تقترب x من 0 .

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$f(x)$	-0.244	-0.249	-0.25	-0.251	-0.256

بما أن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -0.25\ ,\ f(0) = -0.25$ فإن $f(x)$ متصلة عند $x = 0$.

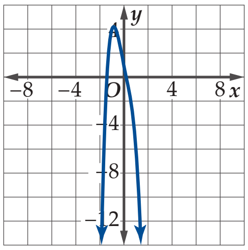
بما أن f غير معرفة عند $x = 4$ فإن f غير متصلة عند 4 وهو عدم اتصال لا نهائي.

مثال 5

استعمل التمثيل البياني للدالة:

$f(x) = -2x^4 - 5x + 1$

لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني.



اختبر منحنى $f(x)$.

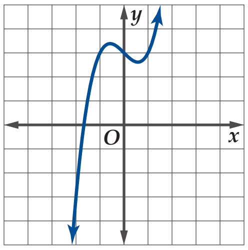
عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

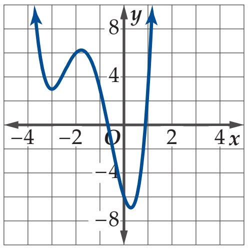
1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الصفحات 46 - 38)

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.

34)



35)



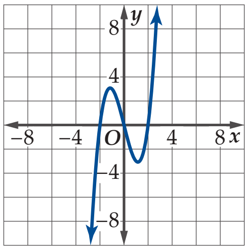
أوجد متوسط معدل التغير لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

36) $f(x) = -x^3 + 3x + 1,\ [0, 2]$

37) $f(x) = x^2 + 2x + 5,\ [-5, 3]$

مثال 6

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 4x$ لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.



الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$ ، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ، ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

للدالة قيمة عظمى محلية عند $(-1, 3)$ ، وقيمة صغرى محلية عند $(1, -3)$.

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الصفحات 57 - 48)

أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وَصِف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثّلهما في مستوى إحداثي واحد.

38) $g(x) = \sqrt{x - 3} + 2$

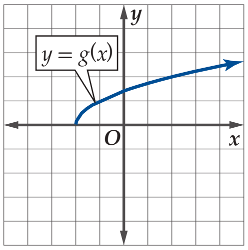
39) $g(x) = -(x - 6)^2 - 5$

40) $g(x) = \frac{1}{2(x + 7)}$

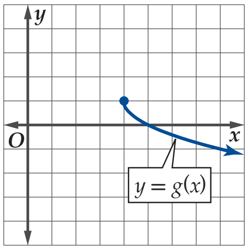
41) $g(x) = \frac{1}{4}[x] + 3$

صف العلاقة بين الدالتين $g(x)$, $f(x) = \sqrt{x}$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$.

42)



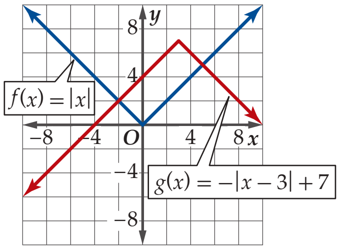
43)



مثال 7

أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -|x - 3| + 7$ ، وصف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثِّلهما في مستوى إحداثي واحد.

الدالة الرئيسة (الأم) لِـ $g(x)$ هي $f(x) = |x|$. ينتج منحنى الدالة g من منحنى الدالة f بانعكاس حول المحور x ، وانسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليمين، وانسحاب مقداره 7 وحدات إلى أعلى.



1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الصفحات 65 - 58)

أوجد $(f + g)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من الدالتين $f(x)$, $g(x)$ فيما يأتي. ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

44) $f(x) = x + 3$
$g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

45) $f(x) = 4x^2 - 1$
$g(x) = 5x - 1$

46) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
$g(x) = 4x^2 - 3$

47) $f(x) = \frac{1}{x}$
$g(x) = \frac{1}{x^2}$

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](2)$ لكل دالتين من الدوال الآتية:

48) $f(x) = 4x - 11, g(x) = 2x^2 - 8$

49) $f(x) = x^2 + 2x + 8, g(x) = x - 5$

50) $f(x) = x^2 - 3x + 4, g(x) = x^2$

اكتب مجال $f \circ g$ متضمناً أية قيود إذا لزم، ثم أوجد $f \circ g$.

51) $f(x) = \frac{1}{x - 3}$
$g(x) = 2x - 6$

52) $f(x) = \sqrt{x - 2}$
$g(x) = 6x - 7$

مثال 8

إذا كانت $f(x) = x^3 - 1, g(x) = x + 7$ ، فأوجد $(f + g)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^3 - 1) + (x + 7)\\ &= x^3 + x + 6\end{aligned}$$

مجال $(f + g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^3 - 1) - (x + 7)\\ &= x^3 - x - 8\end{aligned}$$

مجال $(f - g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (x^3 - 1)(x + 7)\\ &= x^4 + 7x^3 - x - 7\end{aligned}$$

مجال $(f \cdot g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 1}{x + 7}$$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو $\{x \mid x \neq -7, x \in R\}$.

دليل الدراسة و المراجعة

1-7 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات 73 - 66)

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد.

53) $y = 2x$

54) $y = -4x + 8$

55) $y = 2\sqrt{x+3}$

56) $y = \frac{1}{x} - 3$

مثّل كل دالة من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، واختبر ما إذا كان المعكوس يمثّل دالةً أم لا.

57) $f(x) = |x| + 6$

58) $f(x) = x^3$

59) $f(x) = -\frac{3}{x+6}$

60) $f(x) = x^3 - 4x^2$

مثال 9

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = x^3 - 9$.

بدّل مكاني x, y لتحصل على المعادلة $x = y^3 - 9$ ، ثم حل بالنسبة إلى y .

$$x = y^3 - 9$$

$$x + 9 = y^3$$

$$\sqrt[3]{x+9} = y$$

أي أن الدالة العكسية هي $y = \sqrt[3]{x+9}$.

تطبيقات ومسائل

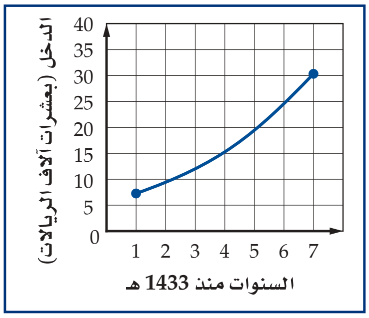
61) **الهواتف المحمولة:** قدمت إحدى شركات الاتصالات عرضًا على الهواتف المحمولة بحيث يدفع المشترك 40 ريالًا في الشهر. ويتضمن ذلك 500 دقيقة مكالمات نهارية مجانية كحد أقصى خلال الشهر، ويدفع 0.2 ريال عن كل دقيقة نهارية تزيد على 500 دقيقة. (الدرس 1-1)

a) اكتب الدالة $p(x)$ للتكلفة الشهرية لإجراء مكالمات نهارية مدتها x دقيقة.

b) كم سيدفع مشترك إذا أجرى مكالمات نهارية مدتها 450 دقيقةً، 550 دقيقةً؟

c) مثّل الدالة $p(x)$ بيانيًا.

62) **أعمال:** يبين التمثيل البياني أدناه الدخل الذي حققه متجر صغير في الفترة من عام 1434 هـ إلى 1440 هـ (الدرس 1-2)



a) قدِّر دخل المتجر سنة 1437 هـ

b) قدِّر السنة التي حقق فيها المتجر دخلًا مقداره 100000 ريال.

63) **رواتب:** بعد 5 سنوات من عمل وليد في إحدى الشركات تقاضى زيادةً على راتبه مقدارها 1500 ريال شهريًا. هل الدالة التي تمثّل راتب وليد متصلة أم غير متصلة؟ برِّر إجابتك. (الدرس 1-3)

64) **كرة قدم:** يبين الجدول أدناه عدد الأهداف التي سجلها لاعب في خمسة مواسم كروية. (الدرس 1-4)

السنة	1433	1434	1435	1436	1437
عدد الأهداف	5	36	23	42	42

a) وضح لماذا يمثّل عدد الأهداف عام 1435 هـ قيمةً صغرى محليةً.

b) إذا كان متوسط معدل التغير لعدد الأهداف بين عامي 1437 و1440هـ يساوي 5 أهداف لكل عام. فكم هدفًا سجل اللاعب عام 1440 هـ ؟

65) **فيزياء:** رُمي حجر أفقيًا من على حافة جرف، وكان مقدار سرعته معطى بالدالة: $v(t) = \sqrt{(9.8t)^2 + 49}$. حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ السرعة بالمتر لكل ثانية. مثل بيانيًا دالة السرعة خلال أول 6 ثوانٍ من رمي الحجر. (الدرس 1-5)

66) **ثقافة مالية:** إذا كان ثمن شريحة الإنترنت 500 ريال. وقدمت إحدى الشركات العرض التالي: خصم 10% من ثمن الشريحة و20 ريالًا عند تفعيلها. كم سيكون ثمن الشريحة بعد تفعيلها. (الدرس 1-6)

67) **قياس:** تذكر أن 1 بوصة تساوي 2.54 سم تقريبًا. (الدرس 1-7)

a) اكتب دالة $A(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من البوصات المربعة إلى السنتمترات المربعة.

b) أوجد $A^{-1}(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من السنتمترات المربعة إلى البوصات المربعة.

الفصل

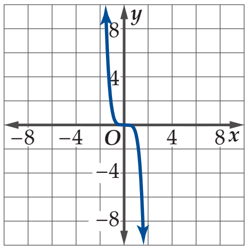
1

اختبار الفصل

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x:

1) $x = y^2 - 5$

2)



3) $y = \sqrt{x^2 + 3}$

4) **موقف سيارات:** يتقاضى موقف للسيارات مبلغ 3 ريالات مقابل كل ساعة أو جزءٍ من الساعة لأول ثلاث ساعات، فإذا زادت المدة عن الثلاث ساعات، فإنه يتقاضى 15 ريالًا عن المدة كلها.

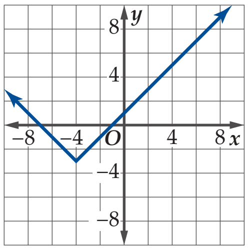
a) اكتب دالة $c(x)$ تمثّل تكلفة وقوف سيارة مدة x من الساعات.

b) أوجد $c(2.5)$.

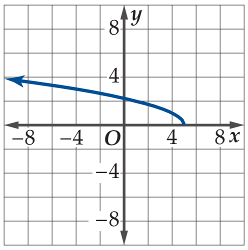
c) عيّن مجال الدالة $c(x)$، وبرر إجابتك.

حدد مجال كل دالة من الدالتين الممثلتين أدناه ومداها:

5)



6)



أوجد المقطع y والأصفار لكل دالة من الدالتين الآتيتين:

7) $f(x) = 4x^2 - 8x - 12$

8) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

9) **اختيار من متعدد:** أي العلاقات الآتية متماثلة حول المحور x؟

A $-x^2 - yx = 2$

B $x^3y = 8$

C $y = |x|$

D $-y^2 = -4x$

حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلةً عند $x = 3$، وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للإزالة.

10) $$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 3 \\ 9 - x & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

11) $$f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$$

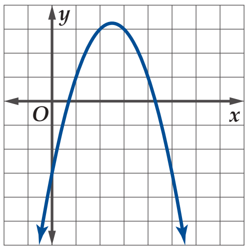
أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدالتين الآتيتين في الفترة $[-2, 6]$:

12) $f(x) = -x^4 + 3x$

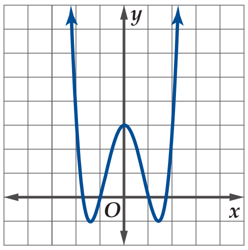
13) $f(x) = \sqrt{x+3}$

استعمل منحنى كل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة إلى أقرب 0.5 وحدة.

14)

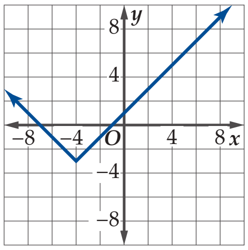


15)



16) استعمل التمثيل البياني للدالة في السؤال 14 أعلاه، وقدِّر قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وبيِّن نوعها.

17) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية يمثّلها التمثيل البياني المجاور؟



A $f(x) = |x - 4| - 3$

B $f(x) = |x - 4| + 3$

C $f(x) = |x + 4| - 3$

D $f(x) = |x + 4| + 3$

18) عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -(x + 3)^3$، ثم مثِّل الدالة $g(x)$ بيانيًّا.

إذا كانت $f(x) = x - 6$ ، $g(x) = x^2 - 36$، فأوجد كل دالة من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجالها.

19) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

20) $[g \circ f](x)$

21) **درجة الحرارة:** تستعمل معظم دول العالم الدرجات السيليزية C لقياس درجة الحرارة. والمعادلة التي تربط بين درجات الحرارة السيليزية C والفهرنهايتية F هي $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) اكتب C كدالة بالنسبة إلى F.

b) أوجد دالتين f و g بحيث يكون $C = [f \circ g](F)$.

بيِّن ما إذا كان للدالة f دالة عكسية أم لا في كل مما يأتي، أوجدها في حالة وجودها، وحدّد أية قيود على مجالها.

22) $f(x) = (x - 2)^3$

23) $f(x) = \frac{x+3}{x-8}$

24) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

25) $f(x) = x^2 - 16$

الفصل 2

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Relations and Functions

فيما سبق:

درستُ تمثيل دوال كثيرات الحدود وتحويلاتها بيانيًا.

والآن:

- أتعرّف الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أمثّل الدوال الأسّية واللوغاريتمية بيانيًا.
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

لماذا؟

علوم: ترتبط العلوم والرياضيات ارتباطًا وثيقًا. ويظهر ذلك جليًا في الفيزياء والكيمياء والأحياء، وغيرها. وتحتاج هذه الفروع إلى مهارات رياضية عالية. وستتعلم في هذا الفصل جوانب رياضية ذات صلة قوية بعلوم: الحاسوب، والفيروسات، والحشرات، ونمو البكتيريا، وانقسام الخلايا، وعلم الفلك، والأعاصير، والهزات الأرضية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

بسّط كل عبارة مما يأتي مفترضًا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $a^4a^3a^5$

2) $(2xy^3z^2)^3$

3) $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$

4) $\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$

5) **كثافة:** تُعرّف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة على الحجم. فإذا كانت كتلة جسم $7.5 \times 10^3\text{g}$، وحجمه $1.5 \times 10^3\ \text{cm}^3$، فما كثافته؟

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

6) $f(x) = 2x + 5$

7) $f(x) = x - 3$

8) $f(x) = -4x$

9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

11) $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، أم لا. وضح إجابتك:

12) $f(x) = x - 6$
$g(x) = x + 6$

13) $f(x) = 2x + 5$
$g(x) = 2x - 5$

14) **طعام:** تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات، وتكلف كل إضافة عليها 0.5 ريال. فإذا كانت الدالة $f(x) = 0.5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافًا إليها x من الإضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$، موضحًا ماذا تعني.

مراجعة المفردات

المجال (domain):
مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

المدى (range):
مجموعة الإحداثيات y للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

الدالة (function):
علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

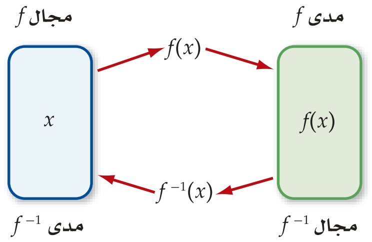
سلوك طرفي التمثيل البياني (end behaviour):
سلوك تمثيل $f(x)$ البياني عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$ أو سالب مالانهاية $(x \to -\infty)$.

خط التقارب (asymptote):
مستقيم يقترب منه تمثيل الدالة البياني.

الدالة المتباينة (one-to-one function):
هي دالة تحقق اختبار الخط الأفقي؛ أي لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة.

الدالة العكسية (inverse function):
تكون كل من الدالتين f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = x\ ,\ f^{-1}\left[f(x)\right] = x\ .$$



الدالة المتصلة (continuous function):
هي الدالة التي يخلو منحناها من الانقطاعات أو الفجوات؛ أي يمكن تمرير القلم على منحناها دون أن نضطر لرفعه.

2-1

الدوال الأسّية
Exponential Functions

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ دوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانيًّا. (الدرس 1-1)

والآن:

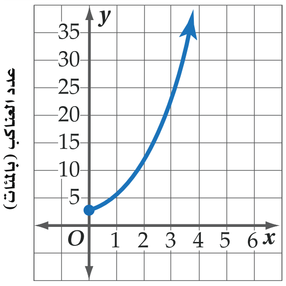
- أتعرف الدالة الأسية.
- أمثّل الدالة الأسية.
- أمثّل دوال النمو الأسي بيانيًّا.
- أمثّل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا.

المفردات:

الدالة الأسية	exponential function
النمو الأسّي	exponential growth
عامل النمو	growth factor
الاضمحلال الأسّي	exponential decay
عامل الاضمحلال	decay factor

لماذا؟

قد تبدو عناكب الرتيلاء (*Tarantulas*) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيِّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.



السنوات منذ 2010

لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًّا، وليس تربيعيًّا أيضًا، وإنما يمثِّل الدالة $y = 3(2)^x$، والتي هي مثال على الدالة الأسية.

تمثيل الدوال الأسّية: **الدالة الأسّية** هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

مفهوم أساسي — الدالة الأسية

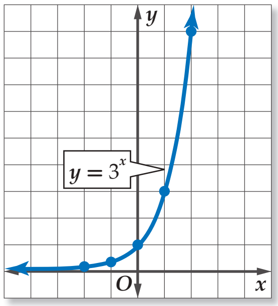
التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة $y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$

أمثلة: $y = (\frac{1}{2})^x$ $\quad y = 4^x$ $\quad y = 2(3)^x$

مثال 1 — تمثيل الدالة الأسيّة عندما $a > 0$ ، $b > 1$

a) مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدد مجال الدالة ومداها.

y	3^x	x
$\frac{1}{9}$	3^{-2}	-2
$\frac{1}{3}$	3^{-1}	-1
1	3^0	0
3	3^1	1
9	3^2	2



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

يظهر التمثيل البياني جميع القيم الحقيقية للمتغير x والقيم المرتبطة بها للمتغير y، حيث $y = 3^x$، لذا فإذا كانت $x = 0.7$ فإن $y \approx 2.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $3^{0.7} \approx 2.157669$).

☑ تحقق من فهمك

1A) مثّل الدالة $y = 7^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.

إرشادات للدراسة

الدالة $y = ab^x$:
تكون الدالة الأسية $y = ab^x$ معرفة لجميع قيم x التي تحقق الشرط:
$a \neq 0, b > 0, b \neq 1$
وذلك لأنه:

- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^2$ تكون غير معرفة عند بعض القيم، فمثلًا تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة.

يتضح من المثال (1) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 1)، فإن قيم y تزداد أيضًا بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثّل 3 أمثال القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متزايدة، كما أن المحور x هو خط تقارب أفقي لها.

إرشادات للدراسة

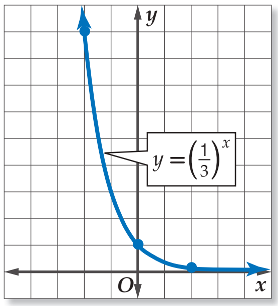
$a < 0$

إذا كانت قيمة a سالبة، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x .

مثال 2 تمثيل الدالة الأسيّة عندما $0 < b < 1$ ، $a > 0$

(a مثّل الدالة $y = (\frac{1}{3})^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

y	$(\frac{1}{3})^x$	x
9	$(\frac{1}{3})^{-2}$	-2
1	$(\frac{1}{3})^0$	0
$\frac{1}{9}$	$(\frac{1}{3})^2$	2



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$، أي أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

(b استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{3})^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

عندما $x = -1.5$، فإن قيمة $y \approx 5.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $(\frac{1}{3})^{-1.5} \approx 5.19615$).

✓ تحقق من فهمك

2A) مثّل الدالة $y = (\frac{1}{2})^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{2})^{-2.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.

يتضح من المثال (2) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 2)، فإن قيم y تتناقص بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثِّل $\frac{1}{9}$ القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متناقصة، كما أن المحور x هو خط تقاربٍ أفقي لها.

النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**، فالدالة $y = 3^x$ الواردة في المثال 1 هي دالة نمو أسي.

مفهوم أساسي الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, b > 1$

خصائص منحنى الدالة : متصل، متباين، متزايد

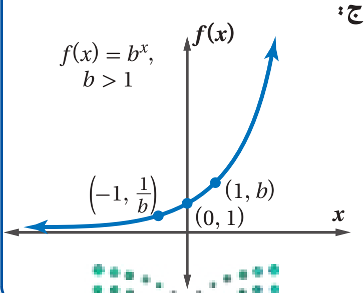
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

النموذج:



يمكنك تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل الدوال الأسية، كما يمكنك الاستفادة من النقاط: $(-1, \frac{1}{b}), (0, 1), (1, b)$

لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x. ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسي $A(t) = a(1 + r)^t$، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 + r)$ ويُسمى **عامل النمو**.

وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.

مثال 3 من واقع الحياة تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431-1425 %3.2 تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ ، فأوجد معادلة أسية تمثِّل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثِّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملًا $a = 22678262, r = 0.032$

$$y = 22678262\,(1.032)^t$$

b) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتحصل على الشكل المجاور.

الربط مع الحياة

تُعد الإحصاءات السكانية أحد أهم مصادر البيانات التي يتطلبها التخطيط التنموي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية. وقد أجري أول تعداد سكاني في المملكة عام 1394 هـ ، وكان عدد سكان المملكة حينئذ 7 ملايين نسمة تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته %8.5 سنويًّا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثِّل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ ، ثم مثِّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

تنبيه!

النسبة المئوية

تذكّر أن جميع أشكال النسب المئوية تتحول إلى كسور عشرية. فمثلًا، $12.5\% = 0.125$

الاضمحلال الأسّي: تُسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $0 < b < 1$ دالة **الاضمحلال الأسّي**، فالدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ الواردة في المثال 2 هي دالة اضمحلال أسي.

مفهوم أساسي الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, 0 < b < 1$

خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

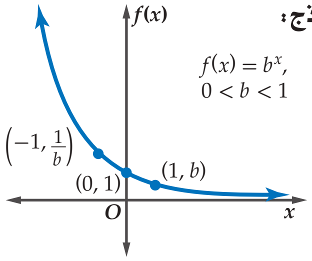
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

النموذج:



يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

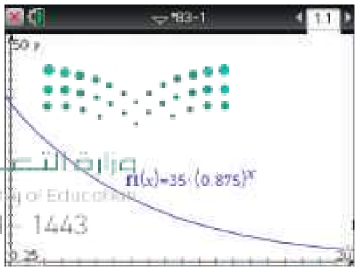
وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1 - r)^t$، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

وتستعمل دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.

مثال 4 من واقع الحياة تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافايين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من %12.5 تقريبًا من كمية الكافايين من أجسامهم في الساعة.

a) أوجد دالة أسّية تمثِّل كمية الكافايين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



الربط مع الحياة

الشاي الأخضر قليل الأكسدة بخلاف الشاي الأسود، وقد أثبتت بعض الدراسات العلمية والطبية أن الذين يشربون الشاي الأخضر أقل عُرضةً للإصابة بأمراض القلب وأنواع معينة من السرطان.

$$
\begin{aligned}
y &= a(1-r)^t \\
&= 35(1-0.125)^t \\
&= 35(0.875)^t
\end{aligned}
$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

b) قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

$y = 35(0.875)^t$ المعادلة من الفرع a

$= 35(0.875)^3$ عوّض 3 بدلًا من الزمن t

≈ 23.45 استعمل الحاسبة

سيبقى في جسم هذا الشخص $23.45mg$ من الكافايين تقريبًا بعد 3 ساعات.

☑ تحقق من فهمك

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على $68mg$ من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثِّل كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثِّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدِّر كمية الكافايين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

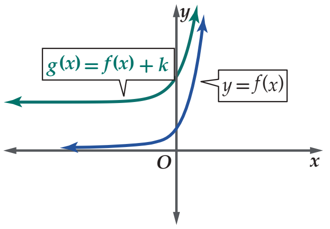
التحويلات الهندسية: تؤثِّر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من دالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي كما هو الحال في باقي الدوال، وستقتصر دراستنا على بعض التحويلات الهندسية لهاتين الدالتين.

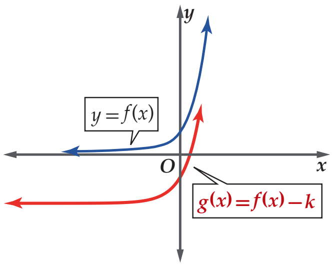
مفهوم أساسي الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

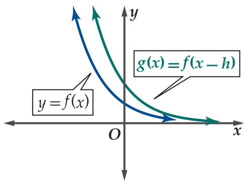


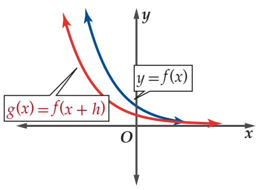


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.

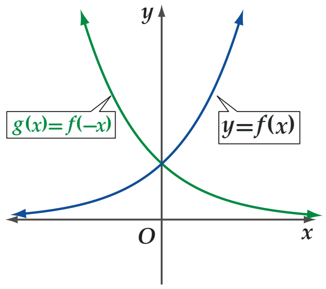




مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .

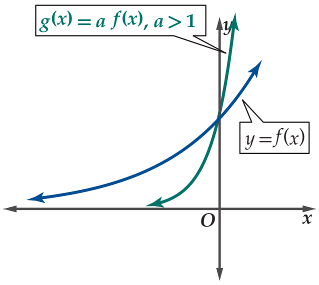


مفهوم أساسي

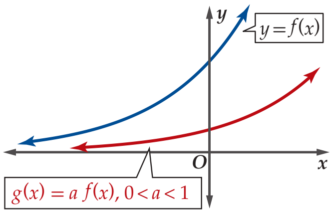
التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.



تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



إرشادات للدراسة

الاضمحلال الأسي:

تأكد من عدم الخلط بين تضييق التمثيلات البيانية، حيث $|a| < 1$. والاضمحلال الأسي، حيث $0<b<1$

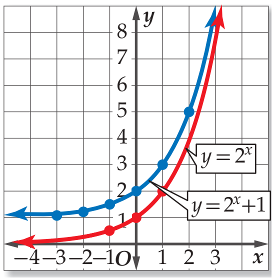
مثال 5 تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها، ومداها:

a) $y = 2^x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 2^x$. بما أن $2>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,2)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$، والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$، بما أن $k=1$ فإن المعادلة $y = 2^x+1$ تمثِّل انسحابًا لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى. وبالاستعانة بالأزواج المرتبة الواردة في الجدول أيضًا، فإن التمثيل البياني للدالة $y = 2^x+1$ يكون كما هو موضح أدناه.

y	$2^x + 1$	x
$1\frac{1}{8}$	$2^{-3}+1$	-3
$1\frac{1}{4}$	$2^{-2}+1$	-2
$1\frac{1}{2}$	$2^{-1}+1$	-1
2	$2^{0}+1$	0
3	$2^{1}+1$	1
5	$2^{2}+1$	2



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في المثال 5 هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R). تذكر أن سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني مع اقتراب x من مالانهاية أو سالب مالانهاية. نلاحظ في المثال $(5a)$ أنه مع اقتراب x من مالانهاية، تقترب y من مالانهاية أيضًا، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من 1. وفي المثال $(5b)$ عندما تقترب x من مالانهاية فإن y تقترب من سالب مالانهاية، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من الصفر.

إرشادات للدراسة

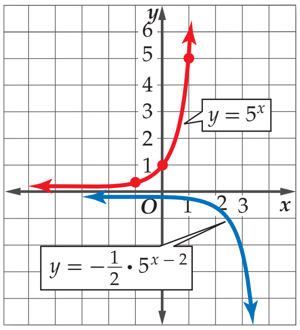
تمثيل تحويلات الدالة الأسية بيانيًا:

يمكن استعمال إحدى الطريقتين الآتيتين؛ لتمثيل تحويلات دوال النمو الأسي والاضمحلال الأسي بيانيًا:

– استعمال التحويلات الهندسية للدالة الأم، وتعزيز ذلك بجدول لقيم الدالة عندما لا تكون التحويلات الهندسية كافية وواضحة؛ لمزيد من الدقة، كما في المثال **5A**

– استعمال التحويلات الهندسية للدالة الأمّ فقط، كما في المثالين **6 , 5B**

(b $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$



حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,5)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{5}\right)$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسيًّا.
- $h = 2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي للتمثيل البياني.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$

✓ تحقق من فهمك

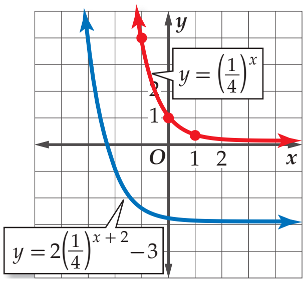
(5A $y = 2^{x+3} - 5$ **(5B** $y = 0.1(6)^x - 3$

مثال 6 تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا

مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ **بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها.**

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$؛ فالدالة دالة اضمحلال أسي، لذا

استعمل النقاط $\left(1,\frac{1}{4}\right)$، $(0,1)$، $(-1,4)$



والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

- $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = -2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى أسفل.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .

✓ تحقق من فهمك

(6 $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك:. **(مثال 1)**

(1 $y = 2^x$ ، $2^{1.5}$

(2 $y = 2(8)^x$ ، $2(8)^{-0.5}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك:. **(مثال 2)**

(3 $y = 2\left(\frac{1}{6}\right)^x$ ، $2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}$ **(4** $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$، $3\left(\frac{1}{4}\right)^{0.5}$

(5 **حاسوب:** يزداد انتشار فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد دالة أسية تمثل النمو في انتشار الفيروس منذ البداية، ثم مثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة. **(مثال 3)**

6) **سيارات:** سيارة كان سعرها 80000 ريال، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة. أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. ثم قدِّر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها. (مثال 4)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدّد مجالها، ومداها: (مثال 5)

7) $f(x) = 2(3)^x$

8) $f(x) = 4^{x+1} - 5$

9) $f(x) = 2^{x+1} + 3$

10) $f(x) = 3^{x-2} + 4$

11) $f(x) = 3(2)^x + 8$

12) $f(x) = 0.25(4)^x - 6$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها، ومداها: (مثال 6)

13) $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$

14) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$

15) $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$

16) $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

17) $f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$

18) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$

19) **علوم:** يتكاثر نحل في خلية، فيزداد العدد بمعدل 30% كل أسبوع. إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة، فأوجد دالة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد النحل بعد 10 أسابيع.

20) **كرة قدم:** تناقص عدد الحضور لمباريات فريق كرة قدم بمعدل 5% لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم. أوجد دالة أسية تمثل عدد الحضور (y) في المباراة (t)، إذا كان عددهم في المباراة الأولى 23500، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد الحضور في المباراة 15 .

21) **هواتف:** تناقص عدد الهواتف العمومية في الآونة الأخيرة نتيجة انتشار الهواتف المحمولة. فإذا كان عدد الهواتف العمومية بالآلاف في إحدى المدن يعطى بالدالة $P(x) = 2.28(0.9)^x$ في السنة x منذ عام 1420 هـ .

a) مثِّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) وضّح ماذا يمثل مقطع $P(x)$ وخط التقارب في هذه الحالة.

22) **صحة:** أخذ مريض حقنة، وفي كل يوم تلى ذلك، استهلك جسمه 10% مما تبقى من المادة المحقونة.

a) مثّل الدالة التي تعبّر عن هذا الموقف بيانيًّا.

b) متى يكون في جسم المريض أقل من 50% من المادة المحقونة؟

c) كم يبقى من المادة المحقونة في الجسم بعد 9 أيام؟

23) **نظرية الأعداد:** تتبع متتابعة عددية نمطًا معينًا، حيث يساوي كل حد فيها 125% من الحد السابق له، فإذا كان الحد الأول يساوي 18 فأجب عما يأتي:

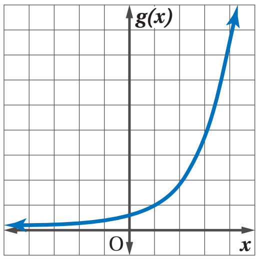
a) اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف.

b) مثّل الدالة لأول 10 حدود بيانيًّا.

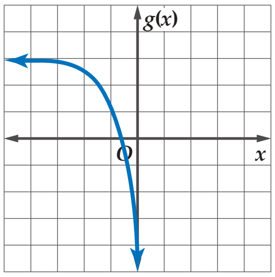
c) ما قيمة الحد العاشر؟ قرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

إذا كانت $f(x)$ هي الدالة الرئيسة (الأم) لكل دالة ممثلة بيانيًّا أدناه، والتمثيل البياني لـ $g(x)$ هو تحويل للتمثيل البياني لـ $f(x)$، فأوجد الدالة $g(x)$:

24)



25)



26) **تمثيلات متعددة:** ستستعمل لحل هذا التمرين جداول القيم أدناه للدوال الأسية $f(x), g(x), h(x)$.

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.5	2	1	−1	−5	−13	−29

x	−1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	11	23	47	95	191	383

x	−1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	2.5	2.25	2.125	2.0625	2.0313	2.0156

a) **بيانيًّا:** مثّل كل دالة بيانيًّا في الفترة $-1 \le x \le 5$ على ورقة تمثيل بياني مستقلة.

b) **لفظيًّا:** أي الدوال معاملها (a) سالب؟ وضِّح إجابتك .

c) **تحليليًّا:** أي الدوال تمثل نموًّا أسيًّا؟ وأيها تمثل اضمحلالًا أسيًّا؟

27) **مدارس:** يزداد عدد خريجي إحدى المدارس بمعدل 1.055 كل عام منذ عام 1434هـ . إذا كان عدد الخريجين عام 1434هـ 110 طلاب، فإن الدالة $N = 110\ (1.055)^t$ تمثل عدد الخريجين في العام t بعد العام 1434هـ . ما عدد الخريجين المتوقع في عام 1445هـ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **تحدٍّ:** اكتب دالة أسية يمر منحناها بكل من النقطتين $(1, 6)$ ، $(0, 3)$

29) **تبرير:** حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

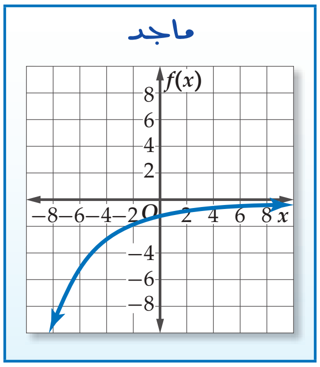
a) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور y.

b) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور x.

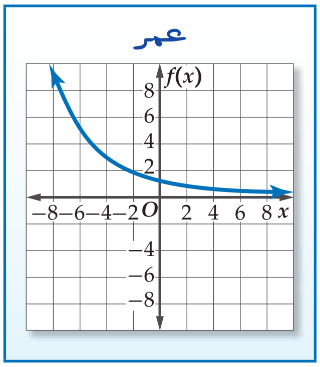
c) إذا كان b عددًا صحيحًا، فإن الدالة $f(x) = |b|^x$ هي دالة نمو أسي.

30) **اكتشف الخطأ:** طُلب إلى عمر وماجد أن يمثّلا الدالة $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$ بيانيًا. أي منهما تمثيله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

ماجد



عمر



31) **تحدٍّ:** تتناقص مادة بنسبة 35% مما تبقى كل يوم، إذا بقي منها $8\,mg$ بعد 8 أيام، فكم ملجرامًا من المادة كان موجودًا في البداية؟

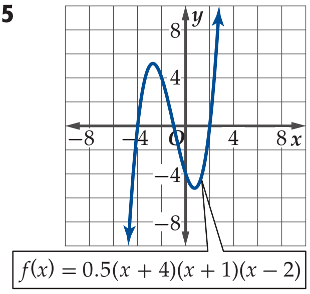
32) **مسألة مفتوحة:** أعطِ قيمة للثابت b تجعل الدالة $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$ دالة اضمحلال أسّي.

33) **اكتب:** صِف التحويل الذي ينقل الدالة $g(x) = b^x$ إلى الدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$.

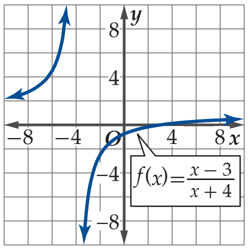
مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًا: (الدرس 1-4)

34)



35)



استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل كل من الدالتين $g(x) = |f(x)|,\ h(x) = f(|x|)$ بيانيًا: (الدرس 1-5)

36) $f(x) = -4x + 2$

37) $f(x) = \sqrt{x+3} - 6$

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (الدرس 1-6)

38) $f(x) = x^2 - 2x$

$g(x) = x + 9$

39) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$g(x) = x^2 - 1$

تدريب على اختبار

40) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$؟

A 3 C 1

B 2 D 0

41) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، $g(x) = 4x$ فما قيمة $(fog)\ (2)$؟

A $\sqrt{3}$ C 3

B $4\sqrt{3}$ D 8

استكشاف
2-2

معمل الحاسبة البيانية :

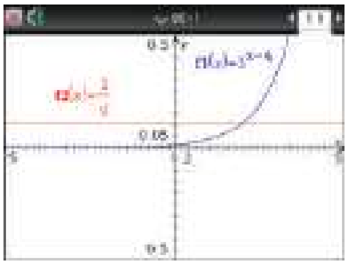
حل المعادلات والمتباينات الأسية

Solving Exponential Equations and Inequalities

يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، لحل المعادلات الأسية بيانيًّا أو باستعمال خاصية الجدول. ولعمل ذلك اكتب المعادلات الأسية على صورة نظام من المعادلات.

نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلة $3^{x-4} = \frac{1}{9}$



الخطوة 1 : تمثيل طرفَي المعادلة بيانيًّا

مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا في صورة دالتين مستقلتين، وأدخل 3^{x-4} في f1، و $\frac{1}{9}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

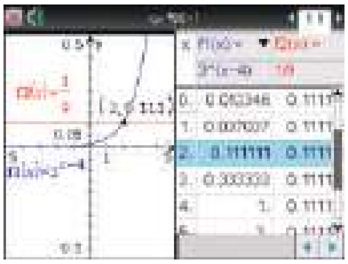
on, 3^{x-4} enter tab $\frac{1}{9}$ enter

الخطوة 2 : استعمال ميزة نقاط التقاطع.

إن ميزة **نقاط التقاطع** في قائمة **تحليل الرسم البياني** تمكنك من تقدير الزوج المرتب الذي يمثِّل نقطة التقاطع.

اضغط على مفتاح menu واختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع ، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرِّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(2, 0.111)$؛ أي أن الحل هو 2

الخطوة 3 : استعمال خاصية الجدول



x	f1(x)= 3^(x-4)	f2(x)= 1/9
0.	0.012346	0.1111
1.	0.037037	0.1111
2.	0.111111	0.1111
3.	0.333333	0.1111
4.	1.	0.1111

تستعمل هذه الخاصية عادة لإنشاء جدول لقيم الدالة؛ يسهم في تحليلها (تحديد أصفارها، وتحديد خطوط التقارب لها، وتحديد نقطة تقاطع دالتين، .. إلخ).

تحقق من صحة حلِّك باستعمال **خاصية الجدول**. اعمل جدولًا في شاشة جانبية، وذلك بالضغط على مفتاح: menu واختر منها 7: الجدول ثم اختر 1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl+T)

يبيِّن الجدول قيم x وقيم $f(x)$ أو y المناظرة لها لكل تمثيل بياني؛ فعندما $x = 2$ ، يكون للدالتين القيمة نفسها، وهي $0.111 \approx \frac{1}{9}$ ، وهذا يعني أن حل المعادلة هو 2 .

التحقق عوّض عن x بـ 2 في المعادلة الأصلية.

$3^{x-4} \overset{?}{=} \frac{1}{9}$ المعادلة الأصلية

$3^{2-4} \overset{?}{=} \frac{1}{9}$ بتعويض 2 بدلًا من x

$3^{-2} \overset{?}{=} \frac{1}{9}$ بالتبسيط

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓ الحل صحيح

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل معادلة مما يأتي :

1) $9^{x-1} = \frac{1}{81}$

2) $4^{x+3} = 2^{5x}$

3) $5^{x-1} = 2^{x}$

4) $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$

5) $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$

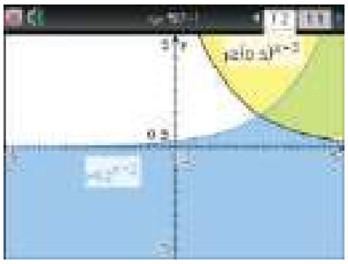
6) $6^{3x} = 8^{x-1}$

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لحل متباينات أسية.

نشاط 2

استعمل الحاسبة البيانية لحل المتباينة $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$

الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة.



أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

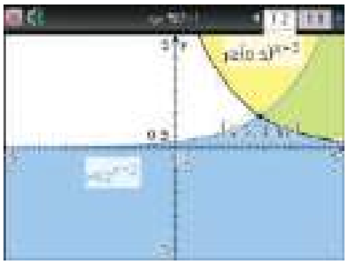
المتباينة الأولى هي: $y \leq 2^{x-2}$ أو $2^{x-2} \geq y$، والمتباينة الثانية هي: $y \geq 0.5^{x-3}$.

ثم مثّلها بالضغط على المفاتيح:

enter 0.5^{x-3} ≥ del tab enter 2^{x-2} ≤ del on

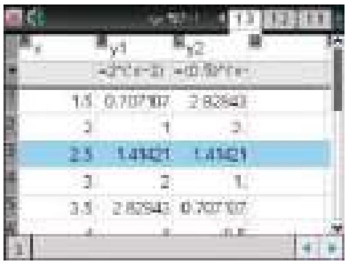
فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل



مجموعة إحداثيات x للنقاط التي تقع في منطقة تقاطع التظليلين تمثل مجموعة الحل للمتباينة الأصلية، و باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** وذلك بالضغط على مفتاح menu، واختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم اختيار 4: نقاط التقاطع والضغط في أي نقطة على الشاشة وتحريك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(2.5 , 1.41)$، حيث يمكن استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

الخطوة 3: استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.



	y1	y2
1.5	0.707107	2.82843
2	1	2
2.5	1.41421	1.41421
3	2	1
3.5	2.82843	0.707107

تحقق من الحل باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات . أنشئ جدولًا لقيم x بزيادة 0.5 في كل مرة، وذلك بالضغط على المفاتيح: on، واكتب $y1 = 2^{x-2}$ في العمود الثاني، $y2 = 0.5^{x-3}$ في العمود الثالث واختر مرجع المتغير في كل مرّة. لاحظ أنه لقيم x الأكبر من $x = 2.5$ تكون $\mathbf{y1} > \mathbf{y2}$، وهذا يؤكد أن حل المتباينة هو $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل متباينة مما يأتي :

(7 $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$

(8 $16^{x-1} > 2^{2x+2}$

(9 $3^x - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$

(10 $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$

(11 $12^{x-5} \geq 9.32$

(12 $12^{4x-7} < 4^{2x+3}$

(13 اكتب: وضح لماذا يكون تمثيل نظام من المعادلات بيانيًّا صالحًا لحل معادلات أو متباينات أسية.

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

2-2

حل المعادلات والمتباينات الأسّية
Solving Exponential Equations and Inequalities

فيما سبق:

درستُ تمثيل الدوال الأسية بيانيًا. (الدرس 1–2)

والآن:

- أحل معادلات أسية.
- أحل متباينات أسية.
- أحل مسائل تتضمن نموًا أسيًا واضمحلالًا أسيًا.

المفردات:

المعادلة الأسية
exponential equation

الربح المركب
compound interest

المتباينة الأسية
exponential inequality

لماذا؟

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة، فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث x عدد السنوات منذ عام 1435 هـ ، و y عدد المشتركين بالملايين.

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

حل المعادلات الأسية: تظهر المتغيرات في **المعادلة الأسية** في موقع الأسس.

مفهوم أساسي **خاصية المساواة للدوال الأسية**

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 0 , b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. و إذا كان $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

يمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية لحل معادلات أسية.

مثال 1 حل المعادلات الأسية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	$8 = 2^3$
$2^x = 2^9$	خاصية قوة القوة
$x = 9$	خاصية المساواة للدوال الأسية

b) $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	$9 = 3^2$
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	خاصية قوة القوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$-2 = 2x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 2

✓ تحقق من فهمك

1A) $4^{2n-1} = 64$

1B) $5^{5x} = 125^{x+2}$

يمكنك استعمال معلومات عن النمو أو الاضمحلال لكتابة دالة أسية.

مثال 2 من واقع الحياة كتابة دالة أسّية

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة ، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a .

$y = ab^x$	الدالة الأسية
$7500 = a\,b^0$	بالتعويض عن x بالعدد 0، وعن y بالعدد 7500
$7500 = a$	$b^0 = 1$

وعندما $x = 4$، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

$23000 = 7500 \cdot b^4$	بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500
$3.067 \approx b^4$	بقسمة كلا الطرفين على 7500
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	بإيجاد الجذر الرابع للطرفين
$1.323 \approx b$	باستعمال الحاسبة

الدالة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y = 7500(1.323)^x$.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

$y = 7500(1.323)^x$	المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية
$= 7500(1.323)^{12}$	بالتعويض عن x بالعدد 12
≈ 215664	باستعمال الحاسبة

سيكون هنالك 215664 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

تحقق من فهمك

2) إعادة تصنيع: أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1436 هـ ، وفي عام 1440 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1436 هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المُعادة التصنيع عام 1481 هـ؟

الربط مع الحياة

قبل إعادة تدوير البلاستيك يتم غسله بمادة الصودا الكاوية المضاف إليها الماء الساخن. ولا ينصح باستعمال العبوات المعاد تدويرها للمواد الغذائية.

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن **الربح المركب**؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

مفهوم أساسي الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال 3 الربح المركب

مال: استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.2% ، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

افهم: أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة.

خطط: بما أنه تتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، إذن استعمل صيغة الربح المركب.

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

حُلّ:

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	صيغة الربح المركب
$= 25000\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$	$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$
≈ 46888.66	باستعمال الحاسبة

تحقق: مثّل المعادلة المناظرة بيانيًّا $f(x) = 25000(1.0035)^{12x}$ ، ثم أوجد قيمة y عندما $x = 15$ على الرسم بالضغط على مفتاح menu ثم اختر 8: الهندسة واختر منها 1: النقاط والمستقيمات ومنها 2: النقطة على [illegible] ثم اضغط على الرسم البياني لتحدد نقطة يظهر الزوج المرتب الذي يمثلها. اضغط esc ثم حدِّد الإحداثي x للنقطة واكتب 15، سيظهر الإحداثي y المقابل 46888.66، إذن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 12% ، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنواتٍ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

تنبيه!

نسب مئوية: تذكر تحويل جميع النسب المئوية إلى كسور عشرية، مثل: $4.2\% = 0.042$

تنبيه!

تقريب الأعداد: يمكنك تقريب الأعداد الظاهرة على الشاشة، بحيث تظهر على الرسم بالشكل المناسب وذلك بالضغط على مفتاح doc واختيار الإعدادات ثم اختيار 2: إعدادات المستند... واختيار التقريب المناسب، وستظهر الأعداد بحسب عدد المنازل المطلوبة.

حل المتباينات الأسية: **المتباينة الأسية** هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي خاصية التباين لدالة النمو

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، و إذا كان $x > 6$ ؛ فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مفهوم أساسي خاصية التباين لدالة الاضمحلال

التعبير اللفظي: إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$ ، و إذا كان $x < 5$ ؛ فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مثال 4 حل المتباينات الأسية

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	$16 = 2^4 , 8 = 2^3$
$2^{8x-12} < 2^3$	خاصية قوة القوة
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين لدالة النمو
$8x < 15$	بجمع 12 للطرفين
$x < \frac{15}{8}$	بقسمة الطرفين على 8

إرشادات للدراسة

دالتا النمو والاضمحلال الأسي: لاحظ أن خاصية التباين لدالة النمو تبين أن هذه الدالة متزايدة على مجالها، وأن خاصية التباين لدالة الاضمحلال تبين أن هذه الدالة متناقصة على مجالها.

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B) $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

1) $8^{4x+2} = 64$

2) $5^{x-6} = 125$

3) $3^{5x} = 27^{2x-4}$

4) $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

5) $2^{6x} = 32^{x-2}$

6) $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

7) $81^{a+2} = 3^{3a+1}$

8) $256^{b+2} = 4^{2-2b}$

9) $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$

10) $8^{2y+4} = 16^{y+1}$

11) **علوم:** الانقسام هو عملية حيوية يتم فيها انشطار الخلية إلى خليتين مطابقتين تمامًا للخلية الأصلية، وتنقسم إحدى أنواع الخلايا البكتيرية كل 15 دقيقة. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسّية على الصورة $c = ab^t$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية c المتكونة من انقسام خلية واحدة بعد t من الدقائق.

b) إذا بدأت خلية بكتيرية واحدة بالانقسام، فكم خلية ستتكون بعد ساعة؟

12) **مال:** ورث خالد مبلغ 100000 ريال عن والده عام 1430 هـ، واستثمره في مشروع تجاري، وقدّر خالد أن المبلغ المستثمَر سيصبح 169588 ريالًا بحلول عام 1442 هـ. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام 1430 هـ.

b) افترض أن المبلغ استمر في الزيادة بالمعدل نفسه، فكم سيصبح عام 1450 هـ إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

13) استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.3%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3)

14) استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 2.25%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3)

حل كل متباينة مما يأتي: (مثال 4)

15) $4^{2x+6} \leq 64^{2x-4}$

16) $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$

17) $625 \geq 5^{a+8}$

18) $10^{5b+2} > 1000$

19) $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$

20) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

21) $(3,100)$, $(0, 6.4)$

22) $(4, 81)$, $(0, 256)$

23) $(5,371293)$, $(0, 128)$

24) $(4, 21609)$, $(0, 144)$

25) **علوم:** وُضع كوب من الشاي درجة حرارته 90°C في وسطٍ درجة حرارته ثابتة وتساوي 20°C، فتناقصت درجة حرارة الشاي، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t دقيقة بالدالة $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة.

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة.

c) إذا كانت درجة الحرارة المناسبة لشرب الشاي هي 60°C ، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساويةً لها أم أقل منها بعد 10 دقائق؟

26) **أشجار:** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتمترات طرديًّا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعًا للأس $\frac{3}{2}$ ، إذا بلغ ارتفاع شجرة 6 m، وقطر قاعدة جذعها 19.1cm ، فاكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة عندما يكون ارتفاعها h متر .

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي:

27) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

28) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$

29) $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$

30) $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$

31) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

32) $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$

33) **سكان:** بلغ عدد سكان العالم عام 1950م ، 2.556 مليار نسمة، وبحلول عام 1980م أصبح 4.458 مليارات نسمة.

a) اكتب دالة أسية على صورة $y = ab^x$ يمكن أن تمثِّل تزايد عدد سكان العالم من عام 1950م إلى عام 1980م بالمليار ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1950م (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف)

b) افترض أن تزايد عدد السكان استمر بالمعدل نفسه، فقدّر عدد سكان العالم عام 2000 .

c) إذا كان عدد سكان العالم عام 2000م هو 6.08 مليارات نسمة تقريبًا، فقارن بين تقديرك والعدد الحقيقي للسكان.

d) استعمل الدالة التي توصلت إليها في فرع a لتقدير عدد سكان العالم عام 2020م. ما دقة تقديرك؟ وضِّح إجابتك.

34) **ثقافة مالية:** يُفاضل سعيد بين خيارين للاستثمار الطويل الأمد، ويريد أن يختار أحدهما.

الخيار الأول:

يستثمر مبلغ 50000 ريال في مؤسسة يتوقع أن يكون معدل ربحها السنوي 6.5%، ويتم إضافة الأرباح إلى رأس المال أربع مرات سنويًّا.

الخيار الثاني:

يشارك في تجارةٍ رأس مالها 50000 ريال يتوقع أن تكون نسبة ربحها 4.2% سنويًّا، ويتم إضافة الأرباح إلى رأس المال كل شهر. بالإضافة إلى استثمار مبلغ 50000 ريال في مشروع يُقدر نسبة ربحه السنوي 2.3%، ويتم إضافة الأرباح إلى رأس المال كل أسبوع.

a) اكتب دالة كل من الخيار الأول والخيار الثاني للاستثمار.

b) مثّل بالحاسبة البيانية منحنىً يوضح المبلغ الكلي من كل استثمار بعد t سنة.

c) أي الخيارين أفضل في الاستثمار الخيار الأول أم الثاني؟ فسّر إجابتك؟

35) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين الزيادة المتسارعة في الدوال الأسية . قصَّ ورقة إلى نصفين، وضع بعضهما فوق بعض، ثم قصَّهما معًا إلى نصفين وضع بعضهما فوق بعض، وكرِّر هذه العملية عدة مرات.

a) **حسيًّا:** عُدّ قطع الورق الناتجة بعد القص الأول، ثم بعد القص الثاني، والثالث، والرابع.

b) **جدوليًّا:** دوِّن نتائجك في جدول.

c) **رمزيًّا:** استعمل النمط في الجدول لكتابة معادلة تمثل عدد قطع الورق بعد القص x مرة.

d) **تحليليًّا:** يُقدر سُمك الورقة الاعتيادية بنحو 0.003in ، اكتب معادلة تمثل سُمك رزمة الورق بعد قصها x مرة.

e) **تحليليًّا:** ما سُمك رزمة من الورق بعد قصها 30 مرة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة الأسية $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$.

37) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة أسية يكون حلها $x = 2$.

38) **برهان:** أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$.

39) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك

$2^x > -(8^{20x})$ لجميع قيم x .

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 1–2)

40) $y = 2(3)^x$

41) $y = 5(2)^x$

42) $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

43) $\sqrt{x+5} - 3 = 0$

44) $\sqrt{3t-5} - 3 = 4$

45) $\sqrt[4]{2x-1} = 2$

46) $(5x+7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$

47) $(3x-2)^{\frac{1}{5}} + 6 = 5$

48) $(7x-1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$

أوجد $[g \circ h](x)$, $[h \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية: (الدرس 1–6)

49) $h(x) = 2x - 1$
$g(x) = 3x + 4$

50) $h(x) = x + 4$
$g(x) = |x|$

51) أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = 2x + 1$ (الدرس 1–7)

تدريب على اختبار

52) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1} + 7 = 8$؟

A -1

B 0

C 1

D 2

53) إذا كانت $f(x) = 5x$، فما قيمة $f[f(-1)]$؟

A -25

B -5

C 5

D 25

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-3

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
Logarithms and Logarithmic Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد الدالة العكسية لدالة. (الدرس 7-1)

والآن:

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثّل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

المفردات:

اللوغاريتم	logarithm
الدالة اللوغاريتمية	logarithmic function

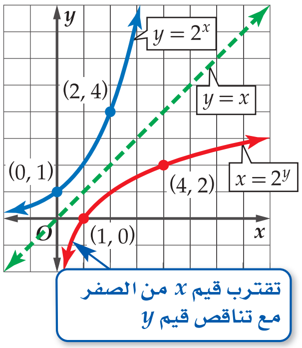
لماذا؟

يُرجِّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية: يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
y	x
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

$x = 2^y$	
y	x
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x ، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b .

مفهوم أساسي — اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$\log_b x = y$ إذا وفقط إذا كان $b^y = x$

مثال: $\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسّية .

تنبيه!

أساس اللوغاريتم: قد يختلط عليك معرفة أي الأعداد هو الأساس وأيها الأس في المعادلات اللوغاريتمية؛ لذا استعمل لونين مختلفين لكتابة كل منهما في أثناء الحل؛ لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a) $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \longrightarrow 8 = 2^3$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \longrightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

✓ تحقق من فهمك

1A) $\log_4 16 = 2$

1B) $\log_3 729 = 6$

يمكن استعمال تعريف اللوغاريتمات أيضًا لكتابة المعادلات الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

مثال 2 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a) $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b) $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

✓ تحقق من فهمك

2A) $4^3 = 64$

2B) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية.

مثال 3 إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$ بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$4 = 16^y$ تعريف اللوغاريتم

$4^1 = 4^{2y}$ $16 = 4^2$

$1 = 2y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

$\frac{1}{2} = y$ اقسم كلا الطرفين على 2

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = y$ بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$\frac{1}{49} = 7^y$ تعريف اللوغاريتم

$7^{-2} = 7^y$ $\frac{1}{49} = 7^{-2}$

$-2 = y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

✓ تحقق من فهمك

3A) $\log_3 81$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

إرشادات للدراسة

الأس الصفري:

- تذكّر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x .

مفهوم أساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

مثال 4 استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ $\quad 5^3 = 125$

$= 3$ $\quad \log_b b^x = x$

b) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $\quad 0.001 = 10^{-3}$

$= -3$ $\quad \log_b b^x = x$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$ $\quad b^{\log_b x} = x$

d) $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$ ، فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد الحقيقية.

✓ تحقق من فهمك

4A) $\log_9 81$

4B) $3^{\log_3 1}$

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ ، وكل من العددين b , x موجبًا **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = \log_b x,\ b > 1$

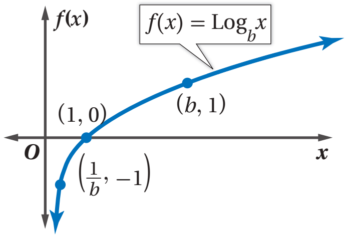
خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

خط التقارب: المحور y

مقطع المحور x : 1



الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = \log_b x,\ 0 < b < 1$

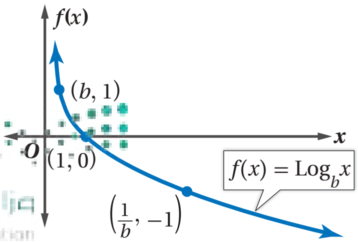
خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

خط التقارب: المحور y

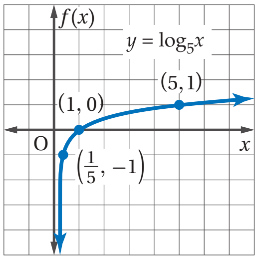
مقطع المحور x : 1



مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

a) $f(x) = \log_5 x$



الخطوة 1: حدّد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

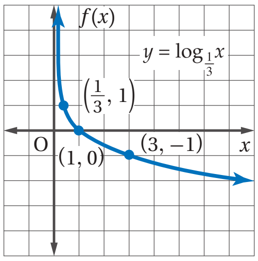
بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$$

أي النقاط $(5, 1)$، $(1, 0)$، $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$.

الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $(3, -1)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

الخطوة 3: ارسم المنحنى.

✓ تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \log_2 x$

5B) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

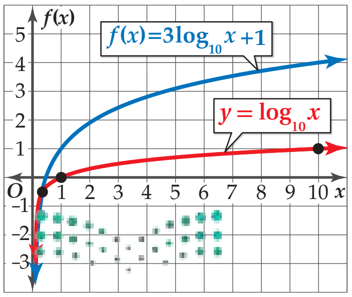
سلوك طرفي التمثيل البياني

لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

مثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

a) $f(x) = 3 \log_{10} x + 1$

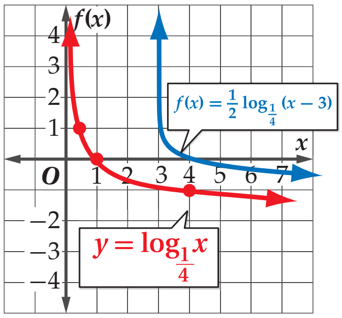


حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10>1$ فاستعمل النقاط $(b , 1)$, $(1 , 0)$, $(\frac{1}{b} , -1)$، أي النقاط $(10 , 1)$, $(1 , 0)$, $(\frac{1}{10} , -1)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.

b) $f(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.



- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.

☑ تحقق من فهمك

6A) $f(x) = 2\log_3(x-2)$

6B) $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

مثال 7 من واقع الحياة إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

هزات أرضية: يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$ ، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة، وقتلت آلاف السكان.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$ الدالة الأصلية

$= 10^{9.2-1}$ عوِّض 9.2 بدلاً من x

$= 10^{8.2}$ بسِّط

$= 158489319.2$ استعمل الحاسبة

b) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 10^{x-1}$، واكتبها على الصورة: $y = \log_{10} x + c$.

بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

$y = 10^{x-1}$ المعادلة الأصلية

$x = 10^{y-1}$ بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y

$y - 1 = \log_{10} x$ تعريف اللوغاريتمات

$y = \log_{10} x + 1$ أضف العدد 1 لكلا الطرفين

☑ تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية: (مثال 1)

1) $\log_8 512 = 3$

2) $\log_5 625 = 4$

3) $\log_2 16 = 4$

4) $\log_7 343 = 3$

5) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$

6) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

7) $\log_{12} 144 = 2$

8) $\log_9 1 = 0$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية: (مثال 2)

9) $11^3 = 1331$

10) $16^{\frac{3}{4}} = 8$

11) $9^{-1} = \frac{1}{9}$

12) $6^{-3} = \frac{1}{216}$

13) $2^8 = 256$

14) $4^6 = 4096$

15) $27^{\frac{2}{3}} = 9$

16) $25^{\frac{3}{2}} = 125$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (المثالان 3, 4)

17) $\log_{13} 169$

18) $\log_2 \frac{1}{128}$

19) $\log_6 1$

20) $\log_4 1$

21) $\log_{10} 10$

22) $\log_{10} 0.01$

23) $\log_3 \frac{1}{9}$

24) $\log_4 \frac{1}{64}$

25) $\log_6 216$

26) $\log_{27} 3$

27) $\log_{32} 2$

28) $\log_{121} 11$

29) $\log_{\frac{1}{5}} 3125$

30) $\log_{\frac{1}{8}} 512$

31) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (المثالان 5, 6)

32) $f(x) = \log_3 x$

33) $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

34) $f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$

35) $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$

36) $f(x) = 4 \log_2 x + 6$

37) $f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

38) $f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$

39) $f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$

40) $f(x) = -8 \log_3 (x - 4)$

41) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$

42) **علوم:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. أوجد معكوس الدالة اللوغاريتمية المعطاة. (مثال 7)

43) **تصوير:** تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة، حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصورة. (مثال 7)

a) أُعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن الجو كان غائمًا. إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس، فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟

b) مثّل الدالة بيانيًّا.

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **b** لتقدير نسبة إضاءة الشمس إذا قلت درجة زر ضبط الإضاءة 3 درجات. هل يؤدي ذلك إلى زيادة الإضاءة أم نقصانها؟

44) **تربية:** لقياس مدى احتفاظ الطلاب بالمعلومات، يتم عادة اختبارهم بعد وقت من تعلمها، ويمكن تقدير درجة سلمان في مادة الرياضيات بعد انتهاء الفصل الدراسي باستعمال المعادلة $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$، حيث t عدد الأشهر التي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسي.

a) ما درجة سلمان في نهاية الفصل الدراسي $(t = 0)$ ؟

b) ما درجته بعد مضي 3 أشهر؟

c) ما درجته بعد مضي 15 شهرًا؟

45) مثّل الدالة $f(x) = 15 \log_{14} (x + 1) - 9$ بيانيًّا.

46) **تحليليًّا:** اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني يشبه التمثيل البياني للدالة $y = \log_3 x$ بعد إزاحتها 4 وحدات إلى اليسار ووحدة إلى أعلى.

47) **إعلانات:** تزداد المبيعات عادة مع زيادة الإنفاق على الدعاية والإعلان، وتقدر قيمة المبيعات لشركة بآلاف الريالات بالمعادلة، $S(a) = 10 + 20 \log_4 (a + 1)$، حيث a المبلغ الذي يتم إنفاقه على الدعاية والإعلان بآلاف الريالات، $a \geq 0$.

a) تعني القيمة $S(0) \approx 10$ أنه إذا لم يُنفق شيء على الدعاية والإعلان، ستكون المبيعات 10000 ريال. أوجد كلًّا من: $S\ (3), S\ (15), S\ (63)$.

b) فسِّر معنى كل من القيم التي أوجدتها في الفرع **a**.

c) مثّل الدالة بيانيًّا.

d) استعمل التمثيل البياني في الفرع **c**، وإجابتك في الفرع **a** لتفسير تناقص أثر الدعاية عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها.

48) **أحياء:** زمن الجيل بالنسبة للخلايا البكتيرية هو الزمن اللازم ليصبح عددها مثليْ ما كان عليه. فإذا كان زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا يُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$ ، حيث t الفترة الزمنية، b عدد الخلايا البكتيرية عند بداية التجربة، f عدد الخلايا البكتيرية عند نهاية التجربة.

a) يبلغ زمن الجيل لبكتيريا مجهرية 16 h ، ما الزمن الذي تحتاج إليه 4 خلايا بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 1024 ؟

b) إذا كان زمن الجيل لنوع من البكتيريا المخبرية 5 h، فما الوقت الذي تحتاج إليه 20 خلية بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 160000 خلية؟

c) تتكاثر بكتيريا E.coli بسرعة، بحيث تتكاثر 6 منها لتصبح 1296 خلال 4.4 h . احسب زمن الجيل لبكتيريا E.coli .

مسائل مهارات التفكير العليا

49) **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$\boxed{\log_3 9}$ $\boxed{\log_2 4}$ $\boxed{\log_2 16}$ $\boxed{\log_4 16}$

50) **تحدٍّ:** إذا كان $y = \log_b x$ ، حيث b, x, y أعداد حقيقية، فإن الصفر ينتمي إلى المجال دائمًا أو أحيانًا أو لا ينتمي أبدًا. وضح إجابتك.

51) **اكتشف الخطأ:** يقول فهد: إن التمثيل البياني لجميع الدوال اللوغاريتمية يقطع المحور y في النقطة $(0, 1)$ ؛ لأن أي عدد مرفوع للأس صفر يساوي 1، ولكن سليمان لم يوافقه الرأي. أيهما على صواب؟ فسر إجابتك.

52) **اكتشف الخطأ:** أوجدت كل من مها ومريم قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$ ، أيٌّ منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك.

مها	مريم
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$ $49^y = \frac{1}{7}$ $(7^2)^y = (7)^{-1}$ $7^{2y} = (7)^{-1}$ $2y = -1$ $y = -\frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$ $(\frac{1}{7})^y = 49$ $(7^{-1})^y = 7^2$ $(7)^{-y} = 7^2$ $y = -2$

53) **تبرير:** دون استعمال الآلة الحاسبة، بيِّن أي القيم التالية أكبر، وبرِّر إجابتك: $\log_7 51, \log_8 61, \log_9 71$

54) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ لكل من الحالات الآتية:

a) y تساوي 25

b) y عدد سالب

c) y بين 0 و 1

d) x تساوي 1

55) **اكتب:** إذا كان $g(x) = a \log_{10} (x - h) + k$ تحويلًا للدالة اللوغاريتمية $\log_{10} x$ ، فاشرح كيفية تمثيل هذا التحويل بيانيًّا.

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2–1)

56) $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

57) $y = -2.5(5)^x$

58) $y = 30^{-x}$

59) $y = 0.2(5)^{-x}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي: (الدرس 2–2)

60) $3^{n-2} > 27$

61) $2^{2n} \leq \frac{1}{16}$

62) $16^n < 8^{n+1}$

63) $32^{5p+2} \geq 16^{5p}$

64) إذا كان $4^{x+2} = 48$ ، فأوجد قيمة 4^x؟ (الدرس 2-2)

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2–2)

65) $9^x = \frac{1}{81}$

66) $2^{6x} = 4^{5x+2}$

67) $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$

68) $9^{x^2} = 27^{x^2-2}$

تدريب على اختبار

69) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$؟

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** 2

70) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$؟

A 5 **B** $\frac{1}{5}$ **C** $-\frac{1}{5}$ **D** -5

71) ما مقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$ ؟

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

الفصل 2

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–2 إلى 3–2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: (الدرس 1-2)

1) $f(x) = 3(4)^x$

2) $f(x) = -(2)^x + 5$

3) $f(x) = -0.5(3)^{x+2} + 4$

4) $f(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 8$

5) **علوم:** بدأت تجربة مخبرية بـ 6000 خلية بكتيرية، وبعد ساعتين أصبح عددها 28000 خلية. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر ازدياد عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه، مقربًا الناتج إلى أقرب 4 منازل عشرية.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 4 ساعات ؟

6) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, 125), (3, 1000)$ ؟ (الدرس 1-2)

A $f(x) = 125(3)^x$

B $f(x) = 1000(3)^x$

C $f(x) = 125(1000)^x$

D $f(x) = 125(2)^x$

7) **سكان:** كان عدد سكان إحدى المدن 45000 نسمة عام 2005 م، وتزايد عددهم ليصبح 68000 نسمة عام 2017 م. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد سكان المدينة y بعد x سنة منذ عام 2005 م، مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

b) استعمل الدالة لتقدير عدد سكان المدينة عام 2025 م.

حُل كلًّا من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 2-2)

8) $11^{2x+1} = 121^{3x}$

9) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

10) $5^{2x+3} \leq 125$

11) $16^{2x+3} < 64$

12) $\left(\frac{1}{32}\right)^{x+3} \geq 16^{3x}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-2)

13) $f(x) = 3\log_2(x-1)$

14) $f(x) = -4\log_3(x-2) + 5$

15) $f(x) = 2 + \log_4(1+x)$

16) **اختيار من متعدد:** ما الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $(625)^{\frac{1}{4}} = 5$ ؟ (الدرس 3-2)

A $\log_{625} 5 = \frac{1}{4}$

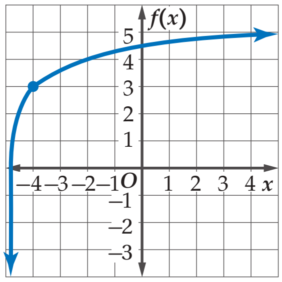
C $\log_5 625 = \frac{1}{4}$

B $\log_5 625 = 4$

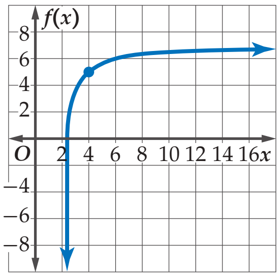
D $\log_{\frac{1}{4}} 5 = 625$

17) **اختيار من متعدد:** أي التمثيلات البيانية الآتية هو تمثيل الدالة $f(x) = \log_3(x+5) + 3$ البياني؟ (الدرس 3-2)

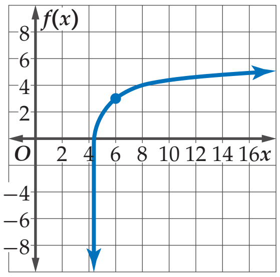
A



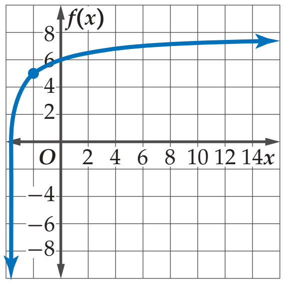
C



B



D



أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

18) $\log_4 32$

19) $\log_5 5^{12}$

20) $\log_{16} 4$

21) اكتب المعادلة $\log_9 729 = 3$ على الصورة الأسية. (الدرس 3-2)

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-4

خصائص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية . (الدرس 3-2)

والآن:

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- أبسّط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

لماذا؟

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
الخل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

لأن $\text{pH} = -\log_{10}[H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$\text{pH}_{\text{للماء النقي}} - \text{pH}_{\text{للقهوة}} = -\log_{10}[H^+]_{\text{للماء النقي}} + \log_{10}[H^+]_{\text{للقهوة}}$$

والتي تكتب بالشكل :

$$\text{pH}_{\text{للماء النقي}} - \text{pH}_{\text{للقهوة}} = \log_{10}\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}}$$

وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

مفهوم أساسي خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افترض أن $b^m = x$ ، و $b^n = y$، وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن $m = \log_b x , n = \log_b y$.

$b^m b^n = xy$	عوِّض
$b^{m+n} = xy$	خاصية ضرب القوى
$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$m + n = \log_b xy$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$	عوِّض عن m , n بالقيمتين $\log_b x , \log_b y$ على الترتيب

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.

مـثال 1 استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$ $192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$

$= \log_4 4^3 + \log_4 3$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 3 + \log_4 3$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$ $\log_4 3 \approx 0.7925$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.

افترض أن $b^m = x , b^n = y$ ، إذن $\log_b x = m , \log_b y = n$

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$$

$b^{m-n} = \frac{x}{y}$ خاصية قسمة القوى

$\log_b b^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$m - n = \log_b \frac{x}{y}$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$ عوِّض عن m , n بالقيمتين $\log_b x , \log_b y$ على الترتيب

مفهوم أساسي خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مـثال 2 استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$\log_6 7.2 = \log_6 (\frac{36}{5})$ $7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$

$= \log_6 6^2 - \log_6 5$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= 2 - 0.8982$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$= 1.1018$ $\log_6 5 \approx 0.8982$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

الربط مع الحياة

المطر الحمضي أكثر حمضية من المطر الطبيعي، حيث يتكون من اختلاط الدخان، وأبخرة المشتقات النفطية وغيرها برطوبة الجو. والمطر الحمضي مسؤول عن التعرية، كما يظهر في الصورة أعلاه.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $pH = \log_{10}\frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أُعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

$pH = \log_{10}\frac{1}{[H^+]}$ المعادلة الأصلية

$4.2 = \log_{10}\frac{1}{[H^+]}$ $pH = 4.2$

$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10}[H^+]$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$4.2 = 0 - \log_{10}[H^+]$ $\log_{10} 1 = 0$

$4.2 = -\log_{10}[H^+]$ بسِّط

$-4.2 = \log_{10}[H^+]$ اضرب كلا الطرفين في -1

$10^{-4.2} = [H^+]$ تعريف اللوغاريتم

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

تحقق:

$4.2 = \log_{10}\frac{1}{[H^+]}$ $pH = 4.2$

$4.2 \overset{?}{=} \log_{10}\frac{1}{10^{-4.2}}$ عوِّض $[H^+] = 10^{-4.2}$

$4.2 \overset{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$4.2 \overset{?}{=} 0 - (-4.2)$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$4.2 = 4.2$ ✓

☑ تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون.

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

ستبرهن خاصية لوغاريتم القوة في السؤال 48

مـثال 4 استعمال خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$\log_2 25 = \log_2 5^2$ $5^2 = 25$

$= 2 \log_2 5$ خاصية لوغاريتم القوة

$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438$ $\log_2 5 = 2.3219$

تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة

يمكنك التحقق من إجابة مثال 4 بإيجاد قيمة $2^{4.6438}$ مستعملاً الحاسبة والإجابة التي ستحصل عليها هي 25 تقريبًا، ولكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ فهذا يعني أن $2^{4.6438} \approx 25$.

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لتبسيط العبارات اللوغاريتمية.

مـثال 5 تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$

$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$ $4^3 = 64$

$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$ خاصية قوة القوة

$= \frac{3}{5} \log_4 4$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5}$ $\log_b b = 1$

تحقق من فهمك

5A) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B) $\log_7 \sqrt[6]{49}$

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة، إذ يمكنك تحويل الضرب إلى جمع، والقسمة إلى طرح، والقوى والجذور إلى ضرب.

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a) $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

$$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$$ خاصية لوغاريتم القوة

b) $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

$$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$$ خاصية لوغاريتم القوة

c) $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

$$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} = \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}}$$ $\sqrt[5]{3-2x} = (3-2x)^{\frac{1}{5}}$

$$= \log_3 (x-1) - \frac{1}{5}\log_3 (3-2x)$$

✓ تحقق من فهمك

6A) $\log_{13} 6a^3bc^4$

6B) $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

6C) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات السابقة في إعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المطولة إلى الصورة المختصرة.

تنبيه!

لوغاريتم المجموع

لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات، $\log_a (x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$.

مثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a) $4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6)$

$$4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$$ خاصية لوغاريتم القوة

$$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_3 \frac{x^4\sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$$ بإنطاق المقام

b) $0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x$

$$0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$$ خاصية لوغاريتم القوة

$$= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64x^6$$ $(x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2}, 2^6 = 64$

$$= \log_7 64x^6\sqrt{x+2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

✓ تحقق من فهمك

7A) $-5\log_2 (x+1) + 3\log_2 (6x)$

7B) $\log_3 (2x-1) - \frac{1}{4}\log_3 (x+1)$

تدرب وحل المسائل

استعمل $\log_4 5 \approx 1.1610$، $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: **(المثالان 1, 2)**

(1 $\log_4 15$

(2 $\log_4 \frac{5}{3}$

(3 $\log_4 \frac{3}{4}$

(4 $\log_4 0.6$

استعمل $\log_4 5 \approx 1.1610 , \log_4 3 \approx 0.7925 , \log_4 2 = 0.5$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: **(المثالان 1, 2)**

(5 $\log_4 30$

(6 $\log_4 20$

(7 $\log_4 \frac{2}{3}$

(8 $\log_4 \frac{4}{3}$

(9 $\log_4 9$

(10 $\log_4 8$

(11 **تسلق الجبال:** يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع، ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} P)$ ، حيث P الضغط بالباسكال. أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه. **(مثال 3)**

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

إذا كان , $\log_3 5 \approx 1.465, \log_5 7 \approx 1.2091, \log_6 8 \approx 1.1606$ $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي: **(مثال 4)**

(12 $\log_3 25$

(13 $\log_5 49$

(14 $\log_6 48$

(15 $\log_7 81$

(16 $\log_6 512$

(17 $\log_7 729$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: **(مثال 5)**

(18 $\log_5 \sqrt[4]{25}$

(19 $\log_2 \sqrt[5]{32}$

(20 $3 \log_7 \sqrt[6]{49}$

(21 $4 \log_2 \sqrt{8}$

(22 $50 \log_5 \sqrt{125}$

(23 $\log_3 \sqrt[6]{243}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة: **(مثال 6)**

(24 $\log_9 6x^3y^5z$

(25 $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

(26 $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$

(27 $\log_4 10t^2uv^{-3}$

(28 $\log_5 a^6b^{-3}c^4$

(29 $\log_2 \frac{3x+2}{\sqrt[3]{1-5x}}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة: **(مثال 7)**

(30 $3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 (6 - x)$

(31 $5 \log_7 (2x) - \frac{1}{3} \log_7 (5x + 1)$

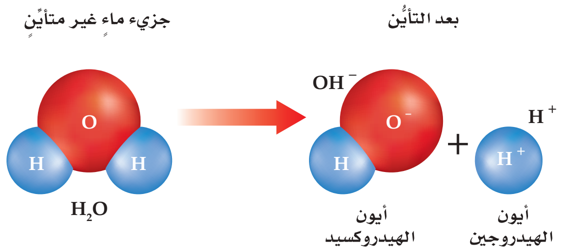
(32 $7 \log_3 a + \log_3 b - 2 \log_3 (8c)$

(33 $2 \log_8 (9x) - \log_8 (2x - 5)$

(34 $2 \log_6 (5a) + \log_6 b + 7 \log_6 c$

(35 $\log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 z$

(36 **كيمياء:** ثابت التأين للماء K_w هو حاصل ضرب تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ في تركيز أيونات الهيدروكسيد $[OH^-]$.



أي أن صيغة ثابت التأين للماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$ حيث تشير الأقواس إلى التركيز بالمول لكل لتر.

a) عبِّر عن $\log_{10} K_w$ بدلالة $\log_{10} [H^+]$ و $\log_{10} [OH^-]$.

b) بسِّط المعادلة في الفرع **a** إذا علمت أن قيمة الثابت K_w هي 1×10^{-14}

c) إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة من الماء 1×10^{-9} مول لكل لتر ، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم غير صحيحة:

(37 $\log_8 (x-3) = \log_8 x - \log_8 3$

(38 $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$

(39 $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$

(40 $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$

(41 $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$

(42 $\log_4 (z+2) = \log_4 z + \log_4 2$

(43 $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$

(44 $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2 \log_9 x + 3 \log_9 y - 4 \log_9 z$

(45 **هزات أرضية:** يبين الجدول أدناه بعض الهزات الأرضية القوية التي ضربت بعض البلدان، وقوة كل منها على مقياس ريختر. إذا علمت أن قوة الهزة M تُعطى بالعلاقة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث تمثل x شدة الهزة الأرضية، فأجب عما يأتي:

السنة	المكان	الدرجة على مقياس ريختر
1939 م	تركيا	8.0
1963 م	يوغسلافيا	6.0
1970 م	البيرو	7.8
1988 م	أرمينيا	7.0
2004 م	مراكش	6.4

a) أي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 10 أمثال شدة الأخرى؟ وأي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 100 مثل شدة الأخرى؟

b) كم درجة على مقياس ريختر تسجل هزة أرضية إذا كانت شدتها تعادل 1000 مثل شدة هزة يوغسلافيا عام 1963 م؟

(46 استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(47 **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على عبارة لوغاريتمية لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة المطولة:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة.

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة.

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة.

(48 **برهان:** استعمل خصائص الأسس لبرهنة خاصية لوغاريتم القوة.

(49 **تحدٍ:** أوجد القيمة الدقيقة للعبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}} (a^2)$

(50 **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك:

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$	$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$
$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$	$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$

(51 استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 18$

مراجعة تراكمية

استعمل منحنى f لتصف التحويل الهندسي الذي يُنتج منحنى g، ثم مثّل منحنى كل منهما بيانيًّا في كل مما يأتي (الدرس 1-2)

(52 $f(x) = 2^x ;\ g(x) = -2^x$

(53 $f(x) = 5^x ;\ g(x) = 5^{x+3}$

(54 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x ;\ g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

(55 $\log_4 16^x$ **(56** $\log_3 27^x$

(57 **كهرباء:** يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير، والتي يستهلكها جهاز باستعمال المعادلة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$، حيث P القدرة بالواط، R المقاومة بالأوم. ما كمية التيار الكهربائي التي يستهلكها جهاز ما إذا كانت $P = 120w$، و $R = 3\Omega$.
قرّب الناتج إلى أقرب عُشر. (مهارة سابقة)

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، مع ذكر السبب: (الدرس 7-1)

(58 $f(x) = x + 73 , g(x) = x - 73$

(59 $g(x) = 7x - 11 , h(x) = \frac{1}{7}x + 11$

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

(60 $3^{4x} = 3^{3-x}$ **(61** $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$

(62 $49^x = 7^{x^2-15}$ **(63** $\log_2 (x+6) = 5$

تدريب على اختبار

(64 ما قيمة $2 \log_5 12 - \log_5 8 - 2 \log_5 3$ ؟

A $\log_5 2$ **C** $\log_5 3$

B $\log_5 0.5$ **D** 1

(65 ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x+1) + 3$ ؟

A 3 **C** 1

B 2 **D** 0

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-5

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inequalites

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. (الدرس 4–2)

والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

المفردات:

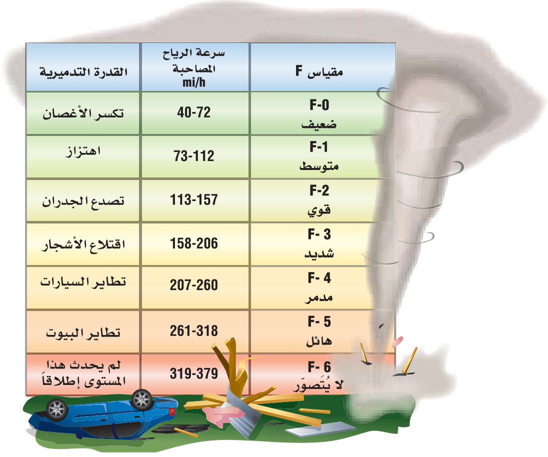
المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation

المتباينة اللوغاريتمية
logarithmic inequality

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنِّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من F–0 إلى F–6 بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وبحسب طول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة F–6 هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.



مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F- 3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F- 4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F- 5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F- 6 لا يُتَصوّر	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقاً

حل المعادلات اللوغاريتمية: تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلّك.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$x = 36^{\frac{3}{2}}$	تعريف اللوغاريتم
$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$	$36 = 6^2$
$x = 6^3 = 216$	خاصية قوة القوة

التحقق: عوّض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .

$\log_{36} x \overset{?}{=} \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$\log_{36} 216 \overset{?}{=} \frac{3}{2}$	عوّض 216 بدلًا من x
$\log_{36} (36)(6) \overset{?}{=} \frac{3}{2}$	حلّل
$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \overset{?}{=} \frac{3}{2}$	خاصيتا ضرب اللوغاريتميات ولوغاريتم القوة
$1 + \frac{1}{2} \overset{?}{=} \frac{3}{2}$	بسّط
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓	الحل صحيح

☑ تحقق من فهمك

1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B) $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

ويمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

مثال 2 على اختبار

حُلّ المعادلة $\log_2 (x^2-4)=\log_2 3x$.

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 4

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار:

$\log_2 (x^2-4)=\log_2 3x$ المعادلة الأصلية

$x^2-4=3x$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$x^2-3x-4=0$ اطرح $3x$ من كلا الطرفين

$(x-4)(x+1)=0$ حلّل إلى العوامل

$x+1=0$ أو $x-4=0$ خاصية الضرب الصفري

$x=-1$ أو $x=4$ حُل كل معادلة

التحقق: عوِّض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x=-1$

$\log_2[(-1)^2-4]\overset{?}{=}\log_2 3(-1)$

$\log_2(-3)=\log_2(-3)$ ✗

$x=4$

$\log_2(4^2-4)\overset{?}{=}\log_2 3(4)$

$\log_2 12=\log_2 12$ ✓

بما أن $\log_2(-3)$ غير معرف، فالإجابة -1 مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3(x^2-15)=\log_3 2x$.

A -3 **B** -1 **C** 5 **D** 15

إرشادات للدراسة

التعويض

اختصارًا للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات في حل المعادلات اللوغاريتمية.

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x+\log_6(x-9)=2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x+\log_6(x-9)=2$ المعادلة الأصلية

$\log_6 x(x-9)=2$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$x(x-9)=6^2$ تعريف اللوغاريتم

$x^2-9x-36=0$ بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين

$(x-12)(x+3)=0$ حلّل

$x+3=0$ أو $x-12=0$ خاصية الضرب الصفري

$x=-3$ $x=12$ حُل كل معادلة

إرشادات للدراسة

تحديد الحلول الدخيلة

يمكن تحديد الحلول الدخيلة من خلال إيجاد مجال المعادلة، ففي مثال3 مجال $\log_6 x$ هو $x>0$، بينما مجال $\log_6(x-9)$ هو $x>9$؛ لذا يكون مجال المعادلة هو $x>9$ ، وبما أن $-3 \not> 9$ فإن $x=-3$ ليس حلًّا للمعادلة.

التحقق: $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \overset{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \overset{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \overset{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \overset{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \overset{?}{=} 2$

$\log_6 36 \overset{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

تحقق من فهمك

3A) $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B) $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

حل المتباينات اللوغاريتمية: **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

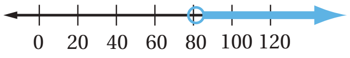
تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين ≤ ، ≥

مثال 4 حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

أوجد مجموعة حلّ المتباينة $\log_3 x > 4$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 x > 4$	المتباينة الأساسية
$x > 3^4$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x > 81$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 81 , x \in R\}$



التحقق: عوّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$x = 9$

$\log_3 9 \overset{?}{>} 4$

$2 > 4$ ✗

$x = 243$

$\log_3 243 \overset{?}{>} 4$

$5 > 4$ ✓

إذن الحل صحيح.

إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية: عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرفًا.

تحقق من فهمك

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك.

4A) $\log_4 x \geq 3$

4B) $\log_2 x < 4$

يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

استثن من حلِّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي — خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
$x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين ≤ ، ≥

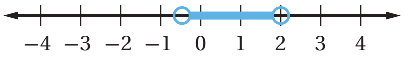
مثال 5 حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$	المتباينة الأساسية
$x + 3 > 2x + 1$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$2 > x$	اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

ثم استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$ ($x \leq -3$ أو $x \leq -\frac{1}{2}$)

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2 , x \in R\right\}$.



التحقق: عوِّض بعدد يقع في الفترة $(-\frac{1}{2}, 2)$، وآخر يقع خارج الفترة $(-\frac{1}{2} ، 2)$.

$x = 1$

$\log_4 (1+3) \overset{?}{>} \log_4 (2+1)$

$\log_4 4 \overset{?}{>} \log_4 3$

$\log_4 4 > \log_4 3$ ✓

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$x = 3$

$\log_4 (3+3) \overset{?}{>} \log_4 (2\times3+1)$

$\log_4 6 \overset{?}{>} \log_4 7$

$\log_4 6 > \log_4 7$ ✗

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

✓ تحقق من فهمك

5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك: (مثال 1)

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$

2) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

3) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$

4) $\log_{25} x = \frac{5}{2}$

5) $\log_8 \frac{1}{2} = x$

6) $\log_6 \frac{1}{36} = x$

7) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

8) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (المثالان 2, 3)

9) $5 \log_2 x = \log_2 32$

10) $3 \log_2 x = \log_2 8$

11) $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$

12) $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

13) $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$

14) $\log_7 (x-3) + \log_7 (x-2) = \log_7 (2x+24)$

15) $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$

16) $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة حلّك: (مثال 4)

17) $\log_5 x > 3$

18) $\log_8 x \leq -2$

19) $\log_6 x < -3$

20) $\log_4 x \geq 4$

21) $\log_3 x \geq -4$

22) $\log_2 x \leq -2$

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (مثال 5)

23) $\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$

24) $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$

25) $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$

26) $\log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3)$

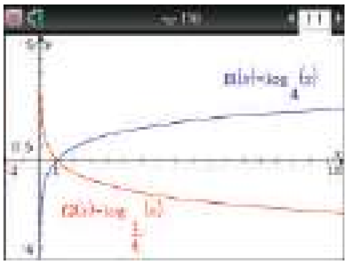
27) **صوت:** يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R هي شدة الصوت. احسب شدة صوت منبه ارتفاع صوته 80 ديسبل.

28) **علوم:** تُقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث x تمثل شدة الهزة الأرضية.

a) كم تبلغ شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر؟

b) كم مرة تبلغ شدة هزة أرضية قوتها 8 درجات بمقياس ريختر مقارنة بشدة هزة أرضية قوتها 5 درجات على المقياس نفسه؟

29) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين الدالتين $y = \log_4 x, y = \log_{\frac{1}{4}} x$.



a) **تحليليًا:** قارن بين منحنيي الدالتين من حيث خطوط التقارب ومقاطع المحور x؟

b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين منحنيي الدالتين.

c) **تحليليًا:** صف العلاقة بين كل من الدالتين $y = \log_4 x$ و $y = -1(\log_4 x)$ وما مجال ومدى كل منهما؟

30) **علوم:** تُعطى سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل.

a) اكتب المعادلة بصورة أسية.

b) ما سرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة 525 ميلًا؟

31) **صوت:** تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

a) أوجد عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1واط لكل متر مربع، وكذلك لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع.

b) إذا كانت شدة الصوت 1 واط لكل متر مربع تعادل 100 مرة من شدة الصوت الذي مقداره 10^{-2} واط لكل متر مربع، فهل تضاعف عدد وحدات الديسبل بمقدار 100مرة ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **اكتشف الخطأ:** تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟

لينا

$\log_2 x \geq -2$

$x \leq 2^{-2}$

$0 < x \leq \frac{1}{4}$

ريم

$\log_2 x \geq -2$

$x \geq 2^{-2}$

$x \geq \frac{1}{4}$

33) **تحدٍّ:** أوجد قيمة

$$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$$

34) **تبرير:** نص خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية هو: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$. كيف يصبح نص الخاصية إذا كان $0 < b < 1$ ، وضّح إجابتك.

35) **اكتب:** وضح العلاقة بين مجال ومدى الدالة اللوغاريتمية ومجال ومدى الدالة الأسيّة المناظرة لها.

36) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على معادلة لوغاريتمية ليس لها حل.

37) **تبرير:** ضع خطًّا تحت التعبير الذي يجعل الجملة صحيحة، مع ذكر السبب: (علمًا بأن جميع المعادلات اللوغاريتمية المذكورة على الصورة $y = \log_b x$).

a) إذا كان أساس اللوغاريتم أكبر من 1 وتقع قيمة x بين 0, 1 ، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

b) إذا كان أساس اللوغاريتم بين 1 ,0 وقيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

c) المعادلة $y = \log_b 0$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

d) المعادلة $y = \log_b 1$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

38) **اكتب:** فسِّر لماذا يقطع منحنى أي دالة لوغاريتمية على الصورة $y = log_b x$ المحور x عند النقطة $(1, 0)$ ولا يقطع المحور y .

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

39) $3^{3x-2} > 81$

40) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$

41) $8^{x-4} = 2^{4-x}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 2-3)

42) $\log_4 256$

43) $\log_2 \frac{1}{8}$

44) $\log_6 216$

45) $\log_7 2401$

بسّط كلًّا مما يأتي. مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي الصفر: (مهارة سابقة)

46) $x^5 \cdot x^3$

47) $(2p^2n)^3$

48) $\frac{x^4y^6}{xy^2}$

49) $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$

تدريب على اختبار

50) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, -10), (4, -160)$؟

A $f(x) = -10(2)^x$

B $f(x) = 10(2)^x$

C $f(x) = -10(4)^x$

D $f(x) = 10(4)^x$

51) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $\log_4 x - \log_4(x-1) = \frac{1}{2}$؟

A $-\frac{1}{2}$ C -2

B $\frac{1}{2}$ D 2

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-6

اللوغاريتمات العشرية
Common Logarithms

فيما سبق:

درستُ تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

(الدروس من 3–2 إلى 5–2)

والآن:

- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

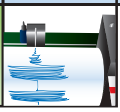
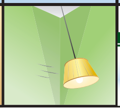
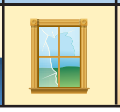
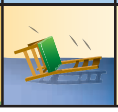
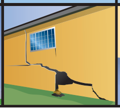
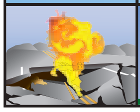
المفردات:

اللوغاريتم العشري
common logarithm

صيغة تغيير الأساس
Change of Base Formula

لماذا؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثر في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.
								

يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية** ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: ENTER 5 LOG تجد أن:

$\log 5 \approx 0.6990$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: ENTER 0.3 LOG تجد أن:

$\log 0.3 \approx -0.5229$

تحقق من فهمك

1A) $\log 7$

1B) $\log 0.5$

قراءة الرياضيات

اللوغاريتم العشري
عند كتابة اللوغاريتم دون أساس، فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن $\log x$ تعني $\log_{10} x$.

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x .

$$\log x = y \quad \longleftrightarrow \quad 10^y = x$$
$$\log 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 10^0 = 1$$
$$\log 10 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 10^1 = 10$$
$$\log 10^m = m \quad \longleftrightarrow \quad 10^m = 10^m$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.

الربط مع الحياة

الديسبل (dB) هو وحدة قياس ارتفاع الصوت، على سبيل المثال: 90—100dB تعادل ارتفاع صوت الرعد، 140dB تعادل ارتفاع صوت إطلاق صاروخ إلى الفضاء.

مثال 2 من واقع الحياة حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

$$L = 10 \log \frac{I}{m} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$66.6 = 10 \log \frac{I}{1} \qquad L = 66.6,\ m = 1$$

$$6.66 = \log I \qquad \text{اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط}$$

$$I = 10^{6.66} \qquad \text{الصورة الأسية}$$

$$I \approx 4570882 \qquad \text{استعمل الحاسبة}$$

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

☑ تحقق من فهمك

2) **هزات أرضية:** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

إرشادات للدراسة

وحدة الجول:
تذكر أن الجول هو وحدة قياس الطاقة، وكذلك الإيرج، حيث 1 إيرج = 4^{-7} جول

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسّية بدلالة الأساس نفسه، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين.

مثال 3 حل معادلات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$4^x = 19 \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\log 4^x = \log 19 \qquad \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية}$$

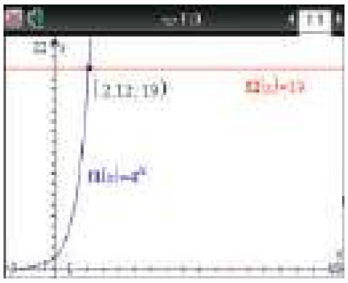
$$x \log 4 = \log 19 \qquad \text{خاصية لوغاريتم القوة}$$

$$x = \frac{\log 19}{\log 4} \qquad \text{اقسم كلا الطرفين على } \log 4$$

$$x \approx 2.1240 \qquad \text{استعمل الحاسبة}$$

الحل هو 2.1240 تقريبًا .

تحقق: يمكنك التحقق من الإجابة بيانيًّا باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** في الحاسبة البيانية TI–nspire. مثّل المعادلة $f1(x) = 4^x$ والمستقيم $f2(x) = 19$ بيانيًّا على الشاشة نفسها. ثم أوجد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين بالضغط على مفتاح menu، ثم اختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(2.12, 19)$. الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبريًّا. ✓



☑ تحقق من فهمك

3A) $3^x = 15$

3B) $6^x = 42$

يمكنك استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسّية لحل متباينات أسّية.

إرشادات للدراسة

حل المتباينات
تذكّر أن تعكس اتجاه رمز التباين عند ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه. وبما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فلا يعكس اتجاه رمز التباين.

مثال 4 حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y - 2) \log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \dfrac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$
$\{y \mid y < -1.0972, y \in R\}$	استعمل الحاسبة

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \overset{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \overset{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\dfrac{1}{59049} < \dfrac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

☑ تحقق من فهمك

4A) $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B) $4^y < 5^{2y+1}$

صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ ،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b ←

لوغاريتم الأساس القديم للأساس b ←

مثال: $\log_3 11 = \dfrac{\log_5 11}{\log_5 3}$

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

$a^x = n$ تعريف اللوغاريتم

$\log_b a^x = \log_b n$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$x \log_b a = \log_b n$ خاصية لوغاريتم القوة

$x = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$ اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$

$\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$ $x = \log_a n$

يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

مثال 5 استعمال صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_3 20 = \dfrac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$ صيغة تغيير الاساس

≈ 2.7268 استعمل الحاسبة

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

تاريخ الرياضيات

الخوارزمي

هو أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي (780م–848م) لُقِّب بأبي الجبر، وهو عالم عربي، أسس علم الجبر ووضع أسسه وابتكر حساب اللوغاريتمات.

مـثال 6 استعمال صيغة تغيير الأساس

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. مستعملًا صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

$R = \log_2 n$ المعادلة الأصلية

$= \log_2 240$ $n = 240$

$= \dfrac{\log 240}{\log 2}$ صيغة تغيير الأساس

≈ 7.9 بسِّط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوةيساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا.

✓ تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة.

تدرب وحل المسائل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: **(مثال 1)**

1) $\log 5$ **2)** $\log 21$ **3)** $\log 0.4$

4) $\log 3$ **5)** $\log 11$ **6)** $\log 3.2$

7) $\log 8.2$ **8)** $\log 0.9$ **9)** $\log 0.04$

10) **علوم:** ترتبط كمية الطاقة E المقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر. **(مثال 2)**

11) **صوت:** أغلق حسن نوافذ سيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 85 dB إلى 73 dB، إذا علمت أن ارتفاع الصوت L بالديسبل يُعطى بالعلاقة $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حد من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. **(مثال 2)**

a) فكم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m = 1$؟

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ.

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: **(مثال 3)**

12) $6^x = 40$

13) $2.1^{a+2} = 8.25$

14) $7^{x^2} = 20.42$

15) $11^{b-3} = 5^b$

16) $8^x = 40$

17) $9^{b-1} = 7^b$

18) $15^{x^2} = 110$

19) $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$

حل كلًّا مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:
(مثال 4)

20) $5^{4n} > 33$
21) $6^{p-1} \leq 4^{p}$
22) $3^{y-1} \leq 4^{y}$
23) $5^{p-2} \geq 2^{p}$
24) $2^{4x} \leq 20$
25) $6^{3n} > 36$

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: **(مثال 5)**

26) $\log_3 7$
27) $\log_2 16$
28) $\log_4 9$
29) $\log_3 21$
30) $\log_5 (2.7)^2$
31) $\log_7 \sqrt{5}$

32) **شحن:** اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال. افترض أن $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ ، حيث t عدد السنوات التي مرت منذ الشراء، P سعر الشراء، V السعر الحالي، r المعدل السنوي لانخفاض السعر. **(مثال 6)**

a) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل15% سنويًّا، فما عدد السنوات التي مرت منذ شرائها لأقرب سنة؟

b) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل10% سنويًّا، فما عدد السنوات التي مرت منذ شرائها لأقرب سنة؟

33) **علوم البيئة:** يقوم مهندس بيئي بفحص مياه الشرب في أحد الآبار الجوفية؛ للتأكد من عدم تلوثها بمادة الزرنيخ، والتي يُقدر معدلها الطبيعي في ماء الشرب بـ 0.025 ppm (حيث ppm تعني جزءًا من المليون) ، كما أن الرقم الهيدروجيني pH لمادة الزرنيخ يجب أن يقل عن 9.5، حتى يكون الماء صالحًا للشرب.

a) إذا كان تركيز أيون الهيدروجين في الماء 1.25×10^{-11}، فهل يعني ذلك ارتفاع الرقم الهيدروجيني لمادة الزرنيخ علمًا بأن قانون تركيز أيون الهيدروجين هو $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$ ؟

b) إذا وجد المهندس 1mg من الزرنيخ في عينة حجمها 3 L من ماء بئر، فهل هذا الماء صالح للشرب؟
(إرشاد: 1 kg من الماء يعادل 1 L تقريبًا. 1 ppm = 1 mg/kg)

c) ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يقابل الرقم الهيدروجيني pH = 9.5 والذي يجعل الماء غير صالح للشرب؟

34) **هزات أرضية:** يمكن تحديد قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M باستعمال المعادلة $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4.4}}$، حيث E كمية الطاقة الزلزالية التي تطلقها الأرض عند حدوث الهزة الأرضية مقيسة بوحدة الجول.

a) استعمل خصائص اللوغاريتمات لتكتب المعادلة بالصورة المطولة.

b) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 7.94×10^{11} جول عند حدوث هزة أرضية. كم قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر؟

c) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 4.47×10^{12} جول عند حدوث زلزال ألوم روك في كاليفورنيا عام 2007 م. كما أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 1.58×10^{18} جول عند حدوث زلزال انكورج في ألاسكا عام 1964. كم مرّة تفوق قوة زلزال أنكورج قوة زلزال ألوم روك على مقياس ريختر؟

d) بصورة عامة ، لا يمكن الشعور بالهزة الأرضية إلاّ إذا بلغت قوتها 3 درجات على مقياس ريختر أو أكثر. ما الطاقة الزلزالية بالجول التي تطلقها الأرض عند حدوث هزة أرضية لها هذه القوة على مقياس ريختر؟

35) **تمثيلات متعددة:** ستحل في هذه المسألة المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a) **جدوليًا:** أدخل الدالة $y = 4^x$ في الحاسبة البيانية وأنشئ جدول قيم للدالة، وذلك بتغيير قيم x بمقدار 0.1 في كل مرة. وابحث عن قيمتين تقع بينهما قيمة x المقابلة للقيمة $y = 13$ في الجدول.

b) **بيانيًا:** مثّل بيانيًّا المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 13$ على الشاشة نفسها، واستعمل أمر intersect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

c) **عدديًا:** حُلّ المعادلة جبريًّا. هل طريقتا الحل تعطيان النتيجة نفسها؟ فسّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) اكتشف الخطأ: حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

بلال

$4^{3p} = 10$

$\log 4^{3p} = \log 10$

$3p \log 4 = \log 10$

$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$

خالد

$4^{3p} = 10$

$\log 4^{3p} = \log 10$

$p \log 4 = \log 10$

$p = \frac{\log 10}{\log 4}$

37) تحدٍّ: حل المعادلة $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 3$ لتجد قيمة x . وفسّر كل خطوة.

38) اكتب: منحنى $g(x) = \log_b x$ هو في حقيقة الأمر تحويل هندسي لمنحنى $f(x) = \log x$. استعمل صيغة تغيير الأساس لتجد التحويل الهندسي الذي يربط بين هذين المنحنيين. ثم اشرح تأثير اختلاف قيم b على منحنى اللوغاريتم العشري .

39) برهان: أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ و $\log_{27} 3$. واكتب تخمينًا حول العلاقة بين $\log_a b, \log_b a$ ، وبرهن تخمينك.

40) اكتب: فسِّر العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، وضمّن تفسيرك أمثلة شبيهة بتلك التي توضح كيفية حل معادلات لوغاريتمية باستعمال الأسس، وحل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات.

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

41) $\log_5 7 + \frac{1}{2} \log_5 4 = \log_5 x$

42) $2 \log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$

43) $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

44) $\log_8 (3y - 1) < \log_8 (y + 5)$

45) $\log_9 (9x + 4) \le \log_9 (11x - 12)$

46) افترض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم، وأن عددها يتناقص بنسبة 5% في السنة.
تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ لتقدير عدد السنوات t ليصبح عدد هذا النوع من الطيور p طائرًا. بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من هذا النوع 3000 طائر؟ (الدرس 2-5)

- **A** سنتان
- **B** 5 سنوات
- **C** 3 سنوات
- **D** 8 سنوات

تدريب على اختبار

47) أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3 , g(x) = x - 5$؟

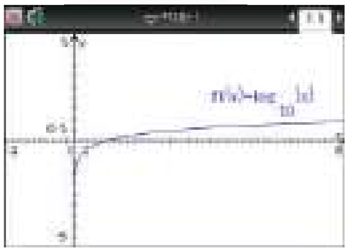
- **A** $x^2 + 4x - 2$
- **B** $x^2 - 6x + 8$
- **C** $x^2 - 9x + 23$
- **D** $x^2 - 14x + 6$

48) أي مما يأتي يمثِّل حلًّا للمعادلة $125 = 27 \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}$؟

- **A** -4
- **B** -2
- **C** 2
- **D** 4

توسع
2-6

معمل الحاسبة البيانية:
حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inqualites



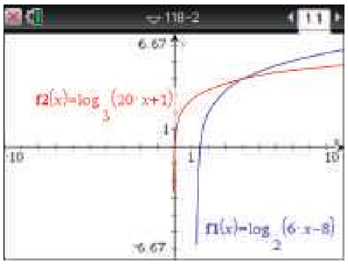
لقد قمت بحل معادلات لوغاريتمية جبريًّا، ويمكنك أيضًا حلها بيانيًّا أو باستعمال جدول.

فالحاسبة البيانية TI–nspire تحتوي على $y = \log_{10} x$ باعتباره أمرًا أساسيًّا.

اضغط على المفاتيح: enter x log (⌂ لعرض التمثيل البياني للدالة $y = \log_{10} x$، ويمكن أيضًا تمثيل الدوال اللوغارتمية بأساسات لا تساوي عشرة من دون استعمال صيغة تغيير الأساس، وذلك باستعمال أوامر مباشرة لكتابة الدالة اللوغاريتمية.

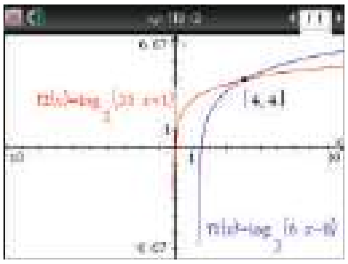
نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المعادلة: $\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$.



الخطوة 1: تمثيل طرفَي المعادلة بيانيًّا.
مثّل كل طرف بيانيًّا على أنه دالة مستقلة.
أدخل $\log_2 (6x - 8)$؛ لتكون f1، و $\log_3 (20x + 1)$ لتكون f2 .
ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

enter $\log_3 (20x + 1)$ 10^x ctrl tab enter $\log_2 (6x - 8)$ 10^x ctrl doc



الخطوة 2: استعمال ميزة **نقاط التقاطع**
استعمل ميزة 4: نقاط التقاطع في قائمة 6: تحليل الرسم البياني ، لتقدير إحداثيِّي الزوج المرتب لنقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.
اضغط على مفتاح menu واختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع ،
ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(4, 4)$، وحيث إن الإحداثي x لنقطة التقاطع يساوي 4؛ إذن حل المعادلة يساوي 4

الخطوة 3: استعمل خاصية **الجدول** لتتحقق من الحلّ.
تحقق من صحة حلّك باستعمال خاصية **الجدول** وذلك بالضغط على مفتاح menu واختيار 7: الجدول ثم اختيار 1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)
اختبر قيم الجدول لتجد قيمة x التي تتساوى عندها قيم y للتمثيلين البيانيين وهي $x = 4$ ، عند القيمة $x = 4$، تكون قيمَتَا y للدالتين متساويتين؛ لذا فإن حل المعادلة يساوي 4.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire لحل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

1) $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$

2) $\log_6 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$

3) $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$

4) $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$

5) $\log_4 (3x + 7) = \log_3 (5x - 6)$

6) $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x + 7)$

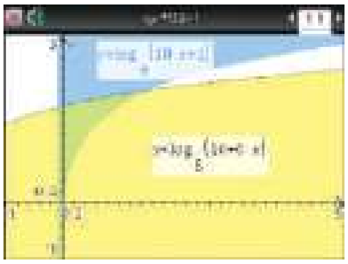
7) $\log_5 (2x + 1) = \log_4 (3x - 2)$

8) $\log_2 2x = \log_4 (x + 3)$

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة TI–nspire لحل متباينات لوغاريتمية

نشاط 2

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المتباينة اللوغاريتمية: $\log_4 (10x + 1) < \log_5 (16 + 6x)$.



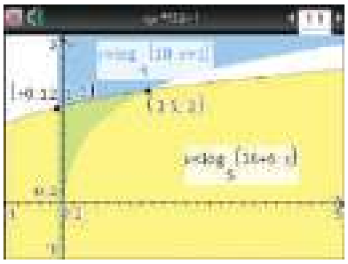
الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة

أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

المتباينة الأولى هي $y > \log_4 (10x + 1)$، أو $\log_4 (10x + 1) < y$،

والمتباينة الثانية هي $y < \log_5 (16 + 6x)$، ثم مثّلها بالضغط على المفاتيح:

on del > ctrl 10^x $\log_4 (10x - 1)$ enter tab del < $\log_5 (16 + 6x)$ enter



الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل

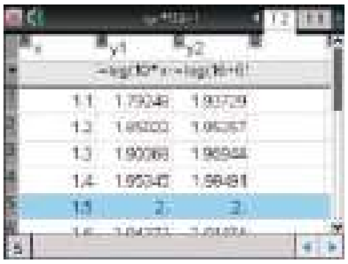
الحد الأيسر لمجموعة الحل هو عندما تكون المتباينة الأولى غير معروفة، وهي كذلك عندما $10x + 1 \leq 0$.

$$10x + 1 \leq 0$$

$$10x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{10}$$

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحد الأيمن، وذلك بالضغط على مفتاح menu واختيار 5: تحليل الرسم البياني ومنها 4: نقاط التقاطع ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(1.5, 2)$، ويمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي$\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.



x	y1	y2
	$=\log_4(10x+1)$	$=\log_5(16+6x)$
1.1	1.79248	1.93729
1.2	1.85003	1.95267
1.3	1.90089	1.96944
1.4	1.95345	1.98491
1.5	2	2

الخطوة 3: استعمال ميزة تطبيق القوائم وجداول البيانات للتحقق من الحل.

ابدأ الجدول عند 0.1–، واستعرض قيم x بزيادة 0.1 كل مرة، وحرك المؤشر باحثًا في الجدول.

اضغط على المفاتيح: on، واكتب $y1 = \log_4 (10x + 1)$ في العمود الثاني، $y2 = \log_5 (16 + 6x)$ في العمود الثالث، واختر مرجع المتغير في كل مرّة، سترى أن قيم الجدول تؤكد أن مجموعة حل المتباينة هي: $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانيّة TI-nspire؛ لحل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك:

(9 $\log_7 x < -1$

(10 $\log_5 (12x + 5) \leq \log_5 (8x + 9)$

(11 $\log_3 (7x - 6) < \log_3 (4x + 9)$

(12 $\log_5 (3 - 2x) \geq \log_5 (4x + 1)$

(13 $\log_4 (9x + 1) > \log_3 (18x - 1)$

(14 $\log_3 (3x - 5) \geq \log_3 (x + 7)$

(15 $\log_5 (2x + 1) < \log_4 (3x - 2)$

(16 $\log_2 2x \leq \log_4 (x + 3)$

الفصل

2

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسية (الدرسان 2-1, 2-2)

- تكون الدوال الأسية على الصورة $y = ab^x$ ، حيث $a \neq 0, b > 0 , b \neq 1$.
- خاصية المساواة للدوال الأسية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذًا وفقط إذا كان $x = y$.
- خاصية التباين للدوال الأسية: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, b > 1$ دالة نمو أسي.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, 0 < b < 1$ دالة اضمحلال أسي.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الدرس 2-3)

- إذا كان $b > 0, b \neq 1, x > 0$ فإن الصورة الأسية للمعادلة اللوغاريتمية $y = \log_b x$ هي $b^y = x$، والصورة اللوغاريتمية للمعادلة الأسية $x = b^y$ هي $\log_b x = y$

خصائص اللوغاريتمات (الدرس 2-4)

- خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
- الضرب والقسمة: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$
$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$ وَ

- لوغاريتم القوة: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b x^m = m \log_b x$.
- خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.

اللوغاريتم العشري (الدرس 2-6)

- اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم الذي أساسه 10 .
- صيغة تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

المفردات

الدالة الأسية	ص 82	المتباينة الأسية	ص 94
النمو الأسي	ص 83	اللوغاريتم	ص 97
عامل النمو	ص 83	الدالة اللوغاريتمية	ص 99
الاضمحلال الأسي	ص 84	المعادلة اللوغاريتمية	ص 112
عامل الاضمحلال	ص 84	المتباينة اللوغاريتمية	ص 114
المعادلة الأسية	ص 92	اللوغاريتم العشري	ص 118
الربح المركب	ص 93	صيغة تغيير الأساس	ص 121

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ تسمى دالة __________ .

2) في المعادلة $x = b^y$. المتغير y يسمى __________ x للأساس b .

3) يسمى اللوغاريتم ذو الأساس 10 __________ .

4) __________ هي معادلة يظهر فيها المتغير على صورة أس.

5) يمكنك باستعمال __________ كتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة للوغاريتم بأساس مختلف.

6) يُسمى الأساس $1 - r$ في الدالة الأسية $A(t) = a(1 - r)^t$ __________ .

7) تُسمى الدالة $y = \log_b x$، حيث $b > 0 , b \neq 1$ __________

الفصل 2 دليل الدراسة و المراجعة

مراجعة الدروس

2-1 الدوال الأسية (الصفحات 82 - 89)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

8) $f(x) = 3^x$

9) $f(x) = -5(2)^x$

10) $f(x) = 3(4)^x - 6$

11) $f(x) = 3^{2x} + 5$

12) $f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$

13) $f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3$

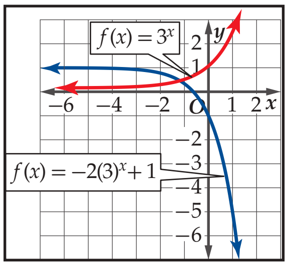
14) **سكان:** يبلغ عدد سكان مدينة ما 120000 نسمة، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل 3% سنويًّا.

a) اكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنة.

b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات؟

مثال 1

مثّل الدالة $f(x) = -2(3)^x + 1$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.



التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 3^x$

- $a = -2$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويتسع رأسيًّا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى الأعلى.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية .

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < 1\}$

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية (الصفحات 92 - 96)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

15) $16^x = \frac{1}{64}$

16) $3^{4x} = 9^{3x+7}$

17) $64^{3n} = 8^{2n-3}$

18) $8^{3-3y} = 256^{4y}$

19) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$

20) $27^{3x} \leq 9^{2x-1}$

21) **بكتيريا:** بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ 5000 خلية. وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبًا.

a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

b) ما عدد الخلايا البكتيرية المتوقعة بعد 32h؟

مثال 2

حُلّ المعادلة $4^{3x} = 32^{x-1}$.

$4^{3x} = 32^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$	أعد الكتابة لتوحيد الأساس
$2^{6x} = 2^{5x-5}$	بسّط
$6x = 5x - 5$	خاصية المساواة للأسس
$x = -5$	بسّط

الحل هو -5 .

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الصفحات 97 - 103)

22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ على الصورة الأسية.

23) اكتب $10^2 = 100$ على الصورة اللوغاريتمية.

أوجد قيمة كل مما يأتي:

24) $\log_4 256$

25) $\log_2 \frac{1}{8}$

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

26) $f(x) = 2\log_{10} x + 4$

27) $f(x) = \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

مثال 3

أوجد قيمة $\log_2 64$.

$\log_2 64 = y$ افرض أن العبارة تساوي y

$64 = 2^y$ تعريف اللوغاريتم

$2^6 = 2^y$ $64 = 2^6$

$6 = y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

إذن $\log_2 64 = 6$.

2-4 خصائص اللوغاريتمات (الصفحات 105 - 111)

استعمل $\log_5 16 \approx 1.7227 , \log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

28) $\log_5 8$

29) $\log_5 64$

30) $\log_5 4$

31) $\log_5 \frac{1}{8}$

32) $\log_5 \frac{1}{2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المطولة:

33) $\log_3 2x^5 y^2 z^3$

34) $\log_5 ab^{-3} c^4 d^{-2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المختصرة:

35) $3\log_2 x^2 - \frac{1}{3}\log_2(x-4)$

36) $2\log_2(z-1) - \log_2(2z-1)$

37) **هزات أرضية :** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يُسمى مقياس ريختر، وتعطى قوة الهزة M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية. كم مرة تعادل شدةُ هزة أرضية سجّلت 10 درجات على مقياس ريختر شدةَ هزة أرضية أخرى سجّلت 7 درجات على المقياس نفسه؟

مثال 4

استعمل $\log_5 16 \approx 1.7227 , \log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة $\log_5 32$.

$\log_5 32 = \log_5 (16 \times 2)$ $32 = 16 \times 2$

$= \log_5 16 + \log_5 2$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$\approx 1.7227 + 0.4307$ استعمل الحاسبة

≈ 2.1534 بسّط

مثال 5

اكتب $\log_3 x^2 y^{-4} z$ بالصورة المطولة:

العبارة هي لوغاريتم حاصل ضرب x^2 , y^{-4} , z

$\log_3 x^2 y^{-4} z$

$= \log_3 x^2 + \log_3 y^{-4} + \log_3 z$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 2\log_3 x - 4\log_3 y + \log_3 z$ خاصية لوغاريتم القوة

الفصل

2 دليل الدراسة و المراجعة

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية (الصفحات 117 - 112)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي إن أمكن، ثم تحقق من صحة حلك:

38) $\log_{16} x = \frac{3}{2}$

39) $\log_2 \frac{1}{64} = x$

40) $\log_4 x < 3$

41) $\log_5 x < -3$

42) $\log_9 (3x - 1) = \log_9 (4x)$

43) $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$

44) $\log_3 (3x + 4) \le \log_3 (x - 2)$

45) **صوت:** استعمل القانون $L = 10 \log_{10} R$، حيث L ارتفاع الصوت، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد الفرق بين ارتفاع أصوات 20 شخصًا يتكلمون في الوقت نفسه وارتفاع صوت شخص واحد على فرض أن الشدة النسبية لصوت الشخص الواحد يساوي 80 dB .

مثال 6

حُلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$ المعادلة الأصلية

$\log_3 3x(4) = \log_3 36$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$3x(4) = 36$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$12x = 36$ اضرب

$x = 3$ اقسم كلا الطرفين على 12

التحقق:

$$\log_3 3x + \log_3 4 \overset{?}{=} \log_3 36$$

$$\log_3 3 \times 3 + \log_3 4 \overset{?}{=} \log_3 36$$

$$\log_3 9 + \log_3 4 \overset{?}{=} \log_3 36$$

$$\log_3 (9 \times 4) \overset{?}{=} \log_3 36$$

$$\log_3 36 \overset{?}{=} \log_3 36$$

الحل صحيح.

مثال 7

حُلّ المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$ المتباينة الأصلية

$x < 27^{\frac{2}{3}}$ خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$x < 9$ بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x < 9 , x \in R\}$

التحقق:

عوض بعدد أقل من 9، وعدد أكبر من 9 في المتباينة الأصلية

$x = 1$	$x = 27$
$\log_{27} 1 \overset{?}{<} \frac{2}{3}$	$\log_{27} 27 \overset{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 \overset{?}{<} \frac{2}{3}$	$1 \overset{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 < \frac{2}{3}$ ✓	$1 < \frac{2}{3}$ ✗

2-6 اللوغاريتمات العشرية (الصفحات 124 - 118)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

(46 $3^x = 15$

(47 $6^{x^2} = 28$

(48 $8^{m+1} = 30$

(49 $12^{r-1} = 7^r$

(50 $3^{5n} > 24$

(51 $5^{x+2} \leq 3^x$

(52 اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

(a $\log_4 11$

(b $\log_2 15$

(53 **مال:** استثمر خالد مبلغ 10000 ريال في مشروع تجاري، وتوقع ربحًا سنويًّا نسبته 5%، وتضاف الأرباح إلى رأس المال كل 4 أشهر. استعمل القانون $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$، حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدّل الربح السنوي، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

(a كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي 15000 ريال؟

(b كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ الأصلي؟

مثال 8

حُلّ المعادلة: $5^{3x} = 7^{x+1}$ ، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

المعادلة الأصلية	$5^{3x} = 7^{x+1}$
خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	$\log 5^{3x} = \log 7^{x+1}$
خاصية القوة للوغاريتمات	$3x \log 5 = (x+1) \log 7$
خاصية التوزيع	$3x \log 5 = x \log 7 + \log 7$
اطرح $x \log 7$ من كلا الطرفين	$3x \log 5 - x \log 7 = \log 7$
أخرج x عامل مشترك	$x(3 \log 5 - \log 7) = \log 7$
اقسم كلا الطرفين على $3 \log 5 - \log 7$	$x = \frac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7}$
استعمل الحاسبة	$x \approx 0.6751$

الفصل 2

دليل الدراسة و المراجعة

تطبيقات ومسائل

54) **أسعار:** تزداد أسعار السلع سنويًّا؛ بسبب ما يسمى التضخم. ونتيجة لذلك، يزداد سعر إحدى السلع بمعدل 4.5% سنويًّا، ويُعطى سعر هذه السلعة بالدالة $M(t)=275(1.045)^t$، حيث t عدد السنوات بعد عام 1432هـ **(الدرس 2-1)**

a) كم كان سعر السلعة عام 1432هـ؟

b) إذا استمر تضخم سعر السلعة بمعدل 4.5% سنويًّا، فكم سيكون سعرها عام 1447هـ تقريبًا؟

55) **سيارات:** ينخفض سعر سيارة جديدة سنويًّا بدءًا من لحظة شرائها، ويُعطى سعر هذه السيارة بعد t سنة من شرائها بالمعادلة $f(t) = 80000(0.8)^t$. **(الدرس 2-2)**

a) ما معدل انخفاض سعر السيارة سنويًّا؟

b) متى يصبح سعر السيارة مساويًا لنصف سعرها الأصلي؟

56) **استثمار:** ورثت فاطمة عن والدها مبلغ 250000 ريال، واستثمرته في مشروع، وتزايد كما في الجدول أدناه: **(الدرس 2-2)**

السنة	المبلغ (ريال)
1422 هـ	250000
1430 هـ	329202
1435 هـ	390989

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لإيجاد المبلغ الكلي بعد t سنة من الاستثمار.

b) إذا استمر تزايد المبلغ بالمعدل نفسه، ففي أي سنة يصبح المبلغ الكلي 500000 ريال تقريبًا؟

57) **كيمياء:** يُعطى عدد السنوات t اللازمة لاضمحلال الكمية الأصلية N_0 جرام من مادة مشعة لتصبح N جرام بالمعادلة

$$t = \frac{16 \log_{10} \frac{N}{N_0}}{\log_{10} \frac{1}{2}}$$ **(الدرس 2-3)**

a) بشكل تقريبي، بعد كم سنة تقريبًا يضمحل 100g من المادة المشعة لتصبح 30g؟

b) ما النسبة التقريبية لما يتبقى من 100g بعد 40 سنة؟

58) **زلازل:** مقياس ريختر هو نظام عددي لتحديد قوة الزلازل. وتعتمد درجة مقياس ريختر R على الطاقة الصادرة عن الزلزال E بوحدة الكيلوواط لكل ساعة. وتُعطى R بالعلاقة:

$$R = 0.67 \cdot \log_{10} (0.37E) + 1.46$$ **(الدرس 2-5)**

a) أوجد قيمة R لزلزال أصدر 1000000 كيلو واط في الساعة.

b) قدّر كمية الطاقة الصادرة عن زلزال قوّته 7.5 على مقياس ريختر.

59) **أحياء:** يعرّف زمن الجيل G بأنه الزمن اللازم ليصبح عدد فصيلة نادرة من الحيوانات مثلي ما كان عليه، ويُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{2.5 \log_b d}$، حيث b العدد الأصلي، d العدد النهائي، t الفترة الزمنية. إذا كان زمن الجيل لهذه الفصيلة 6 سنوات، ويوجد الآن من هذه الفصيلة 5 حيوانات، فما الفترة الزمنية اللازمة ليصبح عدد حيوانات هذه الفصيلة 3125 حيوانًا؟ **(الدرس 2-5)**

60) **صوت:** تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع (I)، وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$$ **(الدرس 2-6)**

a) حدّد شدة الصوت إذا كان عدد وحدات الديسبل 100.

b) قارنت سميرة الصوت في الفرع a مع صوت آخر عدد وحدات الديسبل فيه 50 ديسبل ، فاستنتجت أنّ شدّة الصوت الثاني تساوي نصف شدّة الصوت الأول. هل استنتاجها صحيح؟ برّر إجابتك.

c) صوت شدّته 1×10^{-8} واط لكل متر مربع. كم يزيد عدد وحدات الديسبل إذا ضوعفت شدته؟

61) **مال:** السعر الأصلي لسلعة 8000 ريال، وازداد سعرها باستمرار؛ بسبب التضخم بطريقة الربح المركب حتى بلغ 12000 ريال بعد 5 سنوات. **(الدرس 2-6)**

a) إذا كان معدل التضخم 6% سنويًّا، فبعد كم سنة يصبح سعر السلعة 12000 ريال ؟

b) ما معدل التضخم الذي يصبح عنده سعر السلعة 12000 ريال بعد 5 سنوات؟

الفصل

2

اختبار الفصل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

1) $f(x) = 3^{x-3} + 2$

2) $f(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 3$

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية كلما لزم ذلك:

3) $8^{c+1} = 16^{2c+3}$

4) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^x$

5) $2^{a+3} = 3^{2a-1}$

6) $\log_2 (x^2 - 7) = \log_2 6x$

7) $\log_5 x > 2$

8) $\log_3 x + \log_3 (x - 3) = \log_3 4$

9) $6^{n-1} \leq 11^n$

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$ ، $\log_5 11 \approx 1.4899$، لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

10) $\log_5 44$

11) $\log_5 \frac{11}{2}$

12) **سكان:** كان عدد سكان مدينة ما قبل 10 أعوام 150000 نسمة، ثم تزايد بعد ذلك عددهم بمعدل ثابت كل سنة، ليصبح الآن 185000 نسمة.

a) اكتب دالة أسية يمكن أن تمثّل عدد السكان بعد x سنة إذا استمرت الزيادة بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية.

b) كم يصبح عدد السكان بعد 25 سنة؟

13) اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ على الصورة الأسية.

14) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\log_4 \frac{1}{64}$؟

A -3

B $-\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{3}$

D 3

15) **زراعة:** تمثّل المعادلة $y = 3962520(0.98)^x$ تراجع عدد المزارع في بلد ما، حيث x عدد الأعوام منذ عام 1380 هـ، y عدد المزارع.

a) كيف يمكنك أن تعرف أن عدد المزارع يتناقص؟

b) بأي نسبة يتناقص عدد المزارع؟

c) تنبأ بعد كم سنة يصبح عدد المزارع مليون مزرعة.

16) **توفير:** استثمر سلمان مبلغ 75000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 9% ، بحيث يتم إضافة الأرباح إلى رأس المال شهريًّا .

a) ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات؟

b) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ المستثمر عند البداية؟

c) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي 100000 ريال؟

17) **اختيار من متعدد:** ما حل المعادلة $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$؟

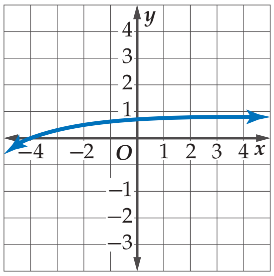
A $\frac{1}{2}$

B 4

C 2

D 8

18) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية لها التمثيل البياني أدناه؟



A $y = \log_{10} (x - 5)$

B $y = 5 \log_{10} x$

C $y = \log_{10} (x + 5)$

D $y = -5 \log_{10} x$

19) اكتب العبارة اللوغاريتمية $-2 \log_3 x + 6 \log_3 (z - 2) + \log_3 t^2$ بالصورة المختصرة.

الفصل

3

المتطابقات والمعادلات المثلثية

Trigonometric Identities and Equations

فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية، وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

1) $-16a^2 + 4a$

2) $5x^2 - 20$

3) $4x^2 - x + 6$

4) $2y^2 - y - 15$

5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8)\ \text{cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4)$ cm، فما عرضها؟

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

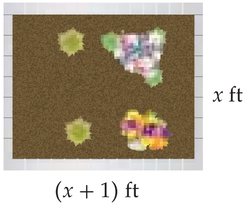
6) $x^2 + 6x = 0$

7) $x^2 + 2x - 35 = 0$

8) $x^2 - 9 = 0$

9) $x^2 - 7x + 12 = 0$

10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض $42\ \text{ft}^2$، وبعديه عددان صحيحان، فأوجد قيمة x الممكنة.



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

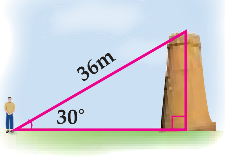
11) sin 45°

12) cos 225°

13) tan 150°

14) sin 120°

15) **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y.

الزاوية المرجعية (reference angle):
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x، ويمكن استعمالها؛ لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ.

دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

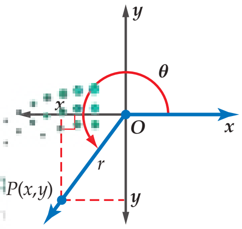
النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of general angles):
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0$$



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

المتطابقات المثلثية

Trigonometric Identities

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

والآن:

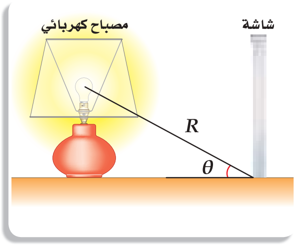
- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:

المتطابقة	identity
المتطابقة المثلثية	trigonometric identity
المتطابقات النسبية	quotient identities
متطابقات المقلوب	resiprocal identities
متطابقات فيثاغورس	pythagorean identities
متطابقات الزاويتين المتتامتين	cofunction identities
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية	odd-even identities

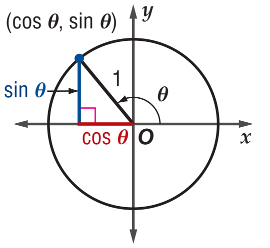
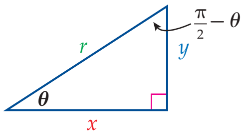
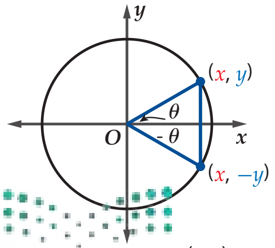
لماذا؟

تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.



المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًا يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم أساسي **المتطابقات المثلثية الأساسية**

المتطابقات النسبية:	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$	$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$
متطابقات المقلوب:	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$ $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$ $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$	$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$
متطابقات فيثاغورس:	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ حسب نظرية فيثاغورس
متطابقات الزاويتين المتتامتين:	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$	 $\sin \theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$	 $\sin \theta = y$ $\sin(-\theta) = -y$ $\cos \theta = x$ $\cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين: يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:

$\sin(90° - \theta) = \cos \theta$

يمكنك استعمال المتطابقات الأساسية، لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية.

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقات فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$	عوّض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$	أوجد مربع العدد $\frac{1}{4}$
$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$	خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\sin^{-1}\frac{1}{4}$

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$	استعمل الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$$-\frac{\sqrt{15}}{4} \overset{?}{\approx} -0.97$$

$$-0.968 \approx -0.97 \checkmark$$

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	متطابقات فيثاغورس
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$	عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$
$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$	أوجد مربع العدد $-\frac{3}{5}$
$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$	$\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$
$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$	خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

☑ تحقق من فهمك

1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$.

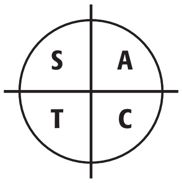
1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

إرشادات للدراسة

الأرباع:

يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكّر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\csc\theta$		
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\sec\theta$		
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\cot\theta$		



A all functions
S sine
T tangent
C cosine

تبسيط العبارات المثلثية: تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة: $\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

☑ تحقق من فهمك

2A) $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

2B) $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لِـ E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$E\sec\theta = \frac{I}{R^2} \qquad E \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

$$E\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \cos\theta \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$؟ فسِّر إجابتك.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad E \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad R^2 \text{ اقسم كلا الطرفين على}$$

$$E = \frac{I\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسّط}$$

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تتبسّط إلى: $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$، بينما المعادلة في الفرع (a) تكتب على الصورة: $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$.

☑ تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة $\tau = Fr\sin\theta$. أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية

عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب$(\sin\theta)$ و/أو بدلالة جيب التمام $(\cos\theta)$.

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له: أبو عبد الله البتاني، والزرقلي، ونصير الدين الطوسي.

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: **(مثال 1)**

1) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$

3) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

4) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -1$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

5) $\tan\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -3$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$

6) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$

7) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

8) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -\frac{9}{2}$ ، $\sin\theta < 0$

بسِّط كل عبارة مما يأتي: **(مثال 2)**

9) $\tan\theta\cos^2\theta$

10) $\csc^2\theta - \cot^2\theta$

11) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$

12) $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$

13) $\sin\theta\,(1 + \cot^2\theta)$

14) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$

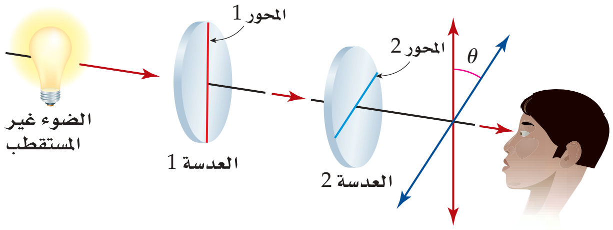
15) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

16) $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$

17) $2 - 2\sin^2\theta$

18) $\csc\theta - \cos\theta\ \cot\theta$

19) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. **(مثال 3)**



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها 30° مع محور العدسة الأولى.

20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W\sec\theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لِـ W.

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80$, $\theta = 40^\circ$, $A = 0.75$, $S = 1000\ W/m^2$. (قرّب إلى أقرب جزء من مئة).

21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية؛ لتحدد ما إذا كانت معادلة ما تمثِّل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثِّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$				
$\tan^2\theta\sin^2\theta$				

b) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ ، بيانيًّا.

c) **تحليليًّا:** "إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين؛ فإن المعادلة تمثِّل متطابقة". هل التمثيلان البيانيان في الفرع **(b)** متطابقان؟

d) **تحليليًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة ما إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x\sec^2 x$ تمثِّل متطابقة أم لا. (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

22) **التزلّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m في اتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة ينتج نظام المعادلات الآتي:

$mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$, $F_n - mg\cos\theta = 0$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

بسّط كلًّا مما يأتي:

(23 $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

(24 $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

مسائل مهارات التفكير العليا

(25 **اكتشف الخطأ:** تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرَّب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلًا، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

(26 **تحدٍّ:** أوجد مثالًا مضادًّا يبيّن أنّ: $1-\sin x=\cos x$ ليست متطابقة.

(27 **تبرير:** وضِّح كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الاستضاءة الموجودة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، على الصورة: $\cos\theta=\dfrac{ER^2}{I}$.

(28 **اكتب:** بيّن كيف تستعمل نظرية فيثا غورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

(29 **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a)=-\tan a$ تمثِّل متطابقة.

(30 **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة: $\tan\theta\sin\theta$

(31 **تبرير:** بيِّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ على الصورة: $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

(32 **اكتشف الخطأ:** بسَّط كل من علاء وسامي المقدار $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

علاء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\tan^2\theta+1$$
$$=\sec^2\theta$$

سامي

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$=\sin^2\theta$$

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم. **(مهارة سابقة)**

(33 $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

(34 $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{6}{7}\right)$

(35 $\sin\left(\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

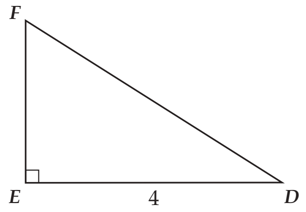
(36 $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$

(37 أوجد قيمة K التي تجعل الدالة:
$f(x)=\begin{cases}K+x^2\,,\,x<5\\3x+2\,,\,x\geq 5\end{cases}$ متصلة عند $x=5$. **(الدرس 3-1)**

(38 حل المعادلة: $2^x=32^{x-2}$. **(الدرس 2-2)**

تدريب على اختبار

(39 في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D=0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$؟



A 5

B 4

C 3.2

D 10

(40 إذا كان $\sin x=m$ وَ $0°<x<90°$ ، فما قيمة $\tan x$؟

A $\dfrac{1}{m^2}$

B $\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\dfrac{1-m^2}{m}$

D $\dfrac{m}{1-m^2}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-2

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

Verifying Trigonometric Identities

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها. (الدرس 3–1)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin \theta = \frac{v^2}{gR} \cos \theta$ ، حيث $0° < \theta < 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المتطابقة: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي — إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسِّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

مثال 1 — إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta$

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta}$$
الطرف الأيسر

$$= \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$
اضرب كلًا من البسط والمقام في $1 + \cos \theta$

$$= \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta}$$
$(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \cos^2 \theta$

$$= \frac{\sin^2 \theta \, (1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$
$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$= 1 + \cos \theta \ \checkmark$$
اقسم كلًا من البسط والمقام على $\sin^2 \theta$

= الطرف الأيمن

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة

توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

✓ تحقق من فهمك

1) $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$.

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، لا بد من تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ **C** $\cot^2\theta$

B $\csc\theta$ **D** $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما cot θ أو csc θ. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوالّ دوالّ مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\,\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$ اضرب

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$ اقلب المقام واضربه بالبسط

$$= \cot\theta\cdot\cot\theta$$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \cot^2\theta$$ اضرب

الجواب هو C.

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلّك اختر قيمة لـ θ. وعوّض بها في البديل المختار، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

✓ تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta\,(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي — اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- **بسِّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.**
- **حلّل أو اضرب كلًّا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.**
- **اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.**
- **لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.**

تنبيه!

تبسيط الطرفين
تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عمليةَ التحقّق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقّق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة **$\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$**

نبسِّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta\cot\theta = \cos\theta \,.\, \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اضرب}$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اطرح}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

3) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$

4) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

6) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

7) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

8) $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

10) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$ ؟ (مثال 2)

A $\sin^2\theta$

B $\tan^2\theta$

C $\cos^2\theta$

D $\csc^2\theta$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

12) $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

13) $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

14) $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

15) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

16) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

17) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

18) $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

19) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

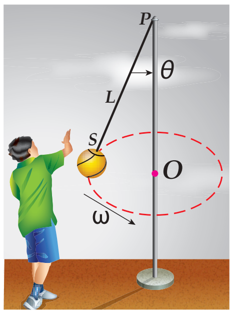
20) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

21) $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

22) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

23) $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

24) **ألعاب:** يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω (الإزاحة الزاويّة مقسومة على الزمن المستغرق)، فإنها تكوّن مع الحبل L الذي طرفاه p, s ،والزاوية المحصورة شكلًا مخروطيًا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود θ تُعطى بالصيغة: $L = \dfrac{g\sec\theta}{\omega^2}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\,m/s^2$، فهل الصيغة $L = \dfrac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ ؟ وضح إجابتك.



25) **جري:** مضمار سباق نصف قطره 16.7 m. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$،

فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولًا، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟" .

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو −1 :

26) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

27) $\sin\theta\csc(-\theta)$

28) $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$

29) $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

30) $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$

31) $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

32) $\cos(-\theta)\sec\theta$

33) $\sin(-\theta)\csc\theta$

بسّط كلًّا مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$

35) $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

36) $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

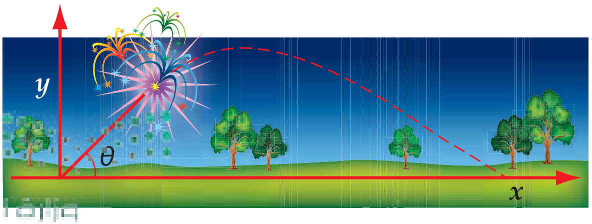
37) $\tan\theta\cos\theta$

38) $\cot\theta\tan\theta$

39) $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

40) $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$

41) **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة: $y = \dfrac{-gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} + \dfrac{x\sin\theta}{\cos\theta}$ ، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية . أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$.



42) **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R ، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P = I_0^2 R \sin^2 2\pi f t$ ، حيث f التردد ، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi f t$.

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi f t$.

43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $1 = 2 \sin x$.

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

b) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثِّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا كدالة في المجال $0 \le x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

c) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثِّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما ، وأوجد قيم x بالراديان.

d) **لفظيًا:** خمِّن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

45) **تبرير:** بيّن لماذا تُعدّ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos \theta}$ ليست متطابقة.

46) **اكتب سؤالًا:** يجد زميلك صعوبة في برهنة متطابقة مثلثية تتضمن قوى دوال مثلثية. اكتب سؤالًا قد يساعده في ذلك.

47) **تبرير:** اكتب موضحًا لماذا يُفضل إعادة كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب $(\sin \theta)$ وجيب التمام $(\cos \theta)$ في معظم الأحيان.

48) **تحدٍّ:** إذا علمت أن α, β زاويتان متتامتان، فبرهن أن: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

49) **تبرير:** برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة.

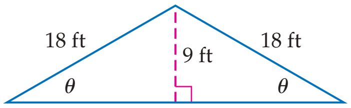
مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

50) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$

51) $\cos \theta$ ، إذا كان $\sec \theta = \frac{5}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$

52) **هندسة معمارية:** يمثِّل الشكل أدناه سقف منزل مغطى بالقرميد. أوجد θ. (مهارة سابقة)



بسّط العبارتين الآتيتين. (الدرس 3-1)

53) $\sin \theta \cos \theta \, (1 + \cot^2 \theta)$

54) $\dfrac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$

تدريب على اختبار

55) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ $\cos \theta$ ، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؟

A $\dfrac{\cos \theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

B $\dfrac{1 - \sin^2 \theta}{\cos\theta}$

C $\cot \theta \sin \theta$

D $\tan \theta \csc \theta$

56) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثِّل متطابقة:

$\sin^3 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \sin \theta = \sin \theta \cos \theta$

3-3

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

Sum and Difference of Angles Identities

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

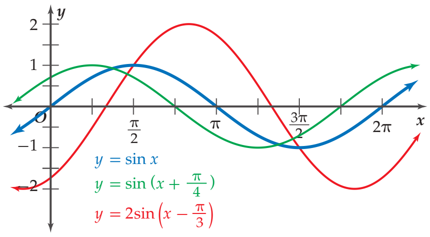
فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

لماذا؟



هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟

تُسبّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا. ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.

متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمّن جمع الزاويتين $\frac{\pi}{4}$, x. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin(60° - 45°)$.

مفهوم أساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	• $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
• $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	• $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
• $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	• $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ وَ $60°$ يساوي $105°$، وكلًا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها، لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°) \qquad 105° = 60° + 45°$$

$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° \qquad \text{متطابقة المجموع}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{عوّض}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{بسّط}$$

b) $\cos(-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos(-120°) = \cos(60° - 180°) \qquad -120° = 60° - 180°$$

$$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180° \qquad \text{متطابقة الفرق}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \qquad \text{عوّض}$$

$$= -\frac{1}{2} \qquad \text{بسّط}$$

✓ تحقق من فهمك

1A) $\sin 15°$

1B) $\cos(-15°)$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة:
كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين $0°$, $360°$، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال متطابقات المجموع والفرق

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين من الزوايا الخاصة.

$c = 3 \sin 165°t$ الصيغة الأصلية

$= 3 \sin (120°t + 45°t)$ $120°t + 45°t = 165°t$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$c = 3 \sin (120°t + 45°t)$ المعادلة بحسب الفرع a

$= 3 \sin (120° + 45°)$ $t = 1$

$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°]$ متطابقة المجموع

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ عوّض مستعملًا الزاوية المرجعية $(\theta = 60°)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ اضرب

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ بسّط

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير.

الربط مع الحياة

يسمى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو المقياس.

✓ تحقق من فهمك:

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

a) $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (90° - \theta)$ الطرف الأيسر

$= \cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta$ متطابقة الفرق

$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$ عوّض

$= \sin \theta$ ✓ بسّط

$=$ الطرف الأيمن

b) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ الطرف الأيسر

$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$ متطابقة المجموع

$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$ عوّض

$= \cos\theta$ ✓ بسّط

= الطرف الأيسن

☑ تحقق من فهمك

3A) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165°$

2) $\cos 105°$

3) $\cos 75°$

4) $\cos\frac{\pi}{12}$

5) $\sin 135°$

6) $\sin(-210°)$

7) $\cos 135°$

8) $\tan 195°$

9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120°\, t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين من الزاويا الخاصة؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

10) $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

11) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

12) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

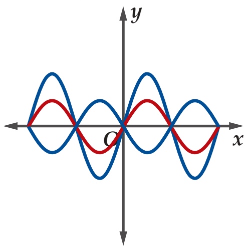
13) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

14) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

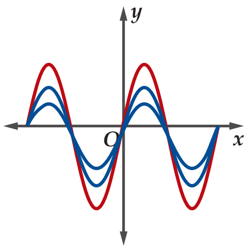
15) $\tan(\theta + 45°) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

16) **إلكترونيات:** ارجع إلى فقرة"لماذا؟" في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناءً، وبعكس ذلك يكون هدّامًا.

تداخل هدّام



تداخل بنّاء



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:

$y_1 = 10\sin(2t + 210°),\ y_2 = 10\sin(2t + 30°)$.

تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسِّر معناه بالنسبة للموجتين.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

17) $\tan 165°$

18) $\sec 1275°$

19) $\sin 735°$

20) $\tan\frac{23\pi}{12}$

21) $\csc\frac{5\pi}{12}$

22) $\cot\frac{113\pi}{12}$

23) بيِّن أنه يمكن كتابة المقدار $\frac{\sin A + \tan\theta\cos A}{\cos A - \tan\theta\sin A}$ على الصورة $\tan(A + \theta)$، حيث A, θ زاويتان حادتان.

24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$.

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°				
45°	60°				
90°	30°				

b) **بيانيًا:** افترض أن B أقل من A بـ 15° دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًا من: $y=\sin(x+x-15°)$ ، $y=\sin x+\sin(x-15°)$ على الشاشة نفسها .

c) **تحليليًا:** حدّد ما إذا كانت $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$ متطابقة أم لا. فسِّر إجابتك.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

25) $\sin(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{\sec A\sec B}$

26) $\cos(A+B)=\dfrac{1-\tan A\tan B}{\sec A\sec B}$

27) $\sec(A-B)=\dfrac{\sec A\sec B}{1+\tan A\tan B}$

28) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

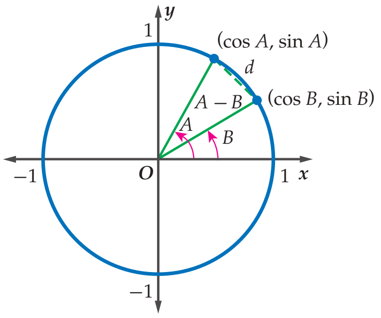
مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تبرير:** بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

30) **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot(A+B)$ بدلالة $\cot A, \cot B$.

31) **برهان:** الشكل أدناه، يُبيّن الزاويتين A, B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة ؛ لإيجاد قيمة d ، حيث $(x_1, y_1)=(\cos B, \sin B), (x_2, y_2)=(\cos A, \sin A)$



32) **اكتب:** استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس وفي السؤال 16؛ لتشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. موضحًا الفرق بين التداخل البنّاء، والتداخل الهدّام.

33) **مسألة مفتوحة:** في النظرية الآتية: إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ اختر قيمًا لكلٍّ من A, B, C . وتحقق من صحة المساواة لكل القيم التي تختارها.

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين: (الدرس 1–3)

34) $\sin\theta\csc\theta-\cos^2\theta$

35) $\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 1–3)

36) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta=\frac{1}{2}$ ، $0°<\theta<90°$

37) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ ، $180°<\theta<270°$

38) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta=-\frac{7}{12}$ ، $90°<\theta<180°$

39) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta=\frac{3}{4}$ ، $270°<\theta<360°$

40) $\tan\theta$ ، إذا كان $8\cos\theta-5=0$ ، $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين: (الدرس 2–3)

41) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta}=\cos\theta+\sin\theta$

42) $\sec\theta(\sec\theta-\cos\theta)=\tan^2\theta$

تدريب على اختبار

43) ما القيمة الدقيقة للعبارة:
$\sin(60°+\theta)\cos\theta-\cos(60°+\theta)\sin\theta$ ؟

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D $\sqrt{3}$

44) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** إذا كان $\cos\theta+0.3=0$ ، حيث $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$.

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 3-1 إلى 3-3

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-1)

1) $\cot \theta \sec \theta$

2) $\dfrac{1-\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

3) $\dfrac{1}{\cos \theta} - \dfrac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$

4) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \csc \theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 3-1)

5) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ، $0° < \theta < 90°$

6) $\csc \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = -\frac{1}{2}$ ، $270° < \theta < 360°$

7) $\tan \theta$ ، إذا كان $\sec \theta = \frac{4}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$

8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة: $\dfrac{\cos \theta}{1-\sin^2 \theta}$ ؟ (الدرس 3-1)

A $\cos \theta$ **C** $\tan \theta$

B $\csc \theta$ **D** $\sec \theta$

9) **مدينة ألعاب:** ركب سلمان لعبة الأحصنة الدوّارة في مدينة الألعاب. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16 m، وظل زاوية ميل سلمان تُعطى بالعلاقة $\tan \theta = \dfrac{v^2}{gR}$ ، حيث R نصف قطر المسار الدائري، v السرعة بالمتر لكل ثانية، g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$. (الدرس 3-2)

a) إذا كان جيب زاوية ميل سلمان يساوي $\frac{1}{5}$، فأوجد زاوية ميله.

b) أوجد سرعة دوران اللعبة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 3-2)

10) $\cot^2 \theta + 1 = \dfrac{\cot \theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta}$

11) $\dfrac{\cos \theta \csc \theta}{\cot \theta} = 1$

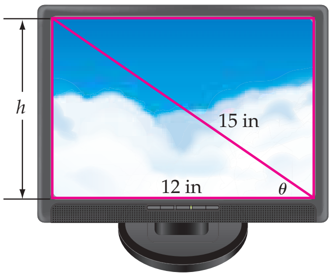
12) $\dfrac{\sin \theta \tan \theta}{1-\cos \theta} = (1+\cos \theta) \sec \theta$

13) $\tan \theta\,(1-\sin \theta) = \dfrac{\cos \theta \sin \theta}{1+\sin \theta}$

14) **حاسوب:** تُصنَّف شاشات الحاسوب عادة وفقًا لطول قطرها. استعمل الشكل أدناه للإجابة عما يأتي: (الدرس 3-1)

a) أوجد قيمة h .

b) بيّن أن $\cot \theta = \dfrac{\cos \theta}{\sin \theta}$



أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 3-2)

15) $\dfrac{\sin \theta \cdot \sec \theta}{\sec \theta - 1} = (\sec \theta + 1) \cot \theta$

16) $\sin^2 \theta \cdot \tan^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta$

17) $\cot \theta\,(1-\cos \theta) = \dfrac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{1+\cos \theta}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 3-3)

18) $\cos 105°$

19) $\sin(-135°)$

20) $\tan 15°$

21) $\cot 75°$

22) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\cos \frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 3-3)

A $\sqrt{2}$ **C** $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ **D** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

23) أثبت صحة المتطابقة الآتية: (الدرس 3-2)

$$\cos 30° \cos \theta + \sin 30° \sin \theta = \sin 60° \cos \theta + \cos 60° \sin \theta$$

3-4

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

Double-Angle and Half-Angle Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

لماذا؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H:

$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta, H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

مفهوم أساسي **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية**

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 30

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin (A + B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ، أو $\sin 2\theta$، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos (A + B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ، أو $\cos 2\theta$.

مثال 1 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2 \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$، فإننا نجد $\cos \theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$؛ لإيجاد $\cos \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ عوّض $\sin \theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$ ربّع ثم اطرح

$\cos \theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos \theta$ موجب أي $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ متطابقة ضعف الزاوية

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ $\sin \theta = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ اضرب

تحقق من فهمك ☑

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$.

وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}; 0° < \theta < 90°$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\cos \theta, \sin \theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$.

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$	متطابقة ضعف الزاوية
$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$	$\sin \theta = \frac{2}{3}$

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أوجد $\tan \theta$ ؛ كي تستعمل متطابقة $\tan 2\theta$.

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	تعريف دالة الظل
$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$	$\sin \theta = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$
$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	بالقسمة وإنطاق المقام

الخطوة 2: أوجد $\tan 2\theta$.

$\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	متطابقة ضعف الزاوية
$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$	$\tan \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}}$	ربِّع المقام
$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}}$	بسِّط
$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

☑ تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\cos \theta = -\frac{1}{3}; 90° < \theta < 180°$:

2A) $\cos 2\theta$

2B) $\tan 2\theta$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1 \qquad \cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \qquad \sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 31

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ في إيجاد جيب نصف الزاوية θ أو $\sin \frac{\theta}{2}$ ، كما يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ في إيجاد جيب تمام نصف الزاوية θ أو $\cos \frac{\theta}{2}$.

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ ، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	استعمل متطابقة فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$	$\sin\theta = -\frac{4}{5}$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$	$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	متطابقة نصف الزاوية
$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$	$\cos\theta = -\frac{3}{5}$
$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$	بسّط
$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$	بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين 180° و 270° ، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين 90° و 135° . إذن، $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لـ **cos 67.5°** .

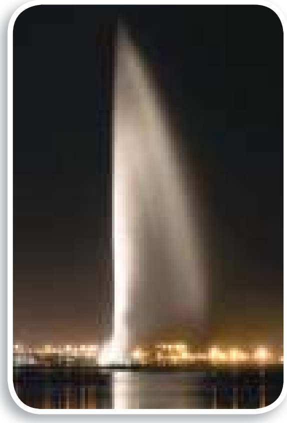
$\cos 67.5° = \cos\frac{135°}{2}$	$67.5° = \frac{135°}{2}$
$= \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ، 67.5° في الربع الأول، فالقيمة موجبة
$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$\cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$1 = \frac{2}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$	اطرح
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}$	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$	اضرب
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	بسّط

✓ تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة
أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.



الربط مع الحياة

نافورة الملك فهد هي أحد معالم الجمال في مدينة جدة، فقد أقيمت على جزيرة قرابة الشاطئ، وتضخ الماء رأسيًا إلى ارتفاع 312m .

مثال 4 من واقع الحياة

التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$\frac{H}{D} = \dfrac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$	المعادلة الأصلية
$= \dfrac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$	بسّط كلّا من البسط والمقام
$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g} \cdot \frac{g}{v^2\sin 2\theta}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$	بسّط
$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	بسّط
$= \frac{1}{4}\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

✓ تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.014\sin L\cos L$، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة **g** عندما $L = 45°$.

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5

إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$.

$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$	الطرف الأيمن
$= \dfrac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$	اضرب كلّا من البسط والمقام في $\sin\theta$
$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$	اضرب في $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 1$
$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$	اضرب
$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$= \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$ ✓	$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta, 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$
= الطرف الأيسر	

✓ تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 1-3)

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin \theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos \theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

4) $\tan \theta = -\frac{8}{15}; 90° < \theta < 180°$

5) $\sin \theta = \frac{2}{3}; 90° < \theta < 180°$

6) $\sin \theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

7) $\tan \theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin \frac{\pi}{8}$

9) $\cos 15°$

10) $\sin 75°$

11) $\tan 165°$

12) $\tan \frac{5\pi}{12}$

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها 37° مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها 52 ft/s. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 32 ft/s^2 ، وَ v تُمثّل السرعة الابتدائية المتجهة. (مثال 4)

a) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 5)

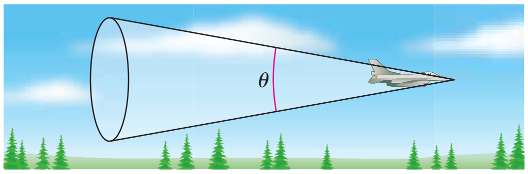
14) $\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

15) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

16) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

17) $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$

18) **عدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكِّله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M (نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) وفق العلاقة $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

b) إذا كان $\cos \theta = \frac{17}{18}$ ، فاستعمل العبارة التي أوجدتها في **a** لحساب قيمة عدد ماخ.

19) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تُعطى بالصيغة: $P = {I_0}^2 R \sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

20) **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة ابتدائية مقدارها 95 ft/s . برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45° - A , \theta = 45° + A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13 .

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، إذا كان:

21) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

22) $\sin \theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

23) $\tan \theta = -3; 90° < \theta < 180°$

24) $\sec \theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$

25) $\cot \theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$

26) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(\theta) = 4 (\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4})$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

b) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (a) لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

c) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(\theta) = \cos^2 (\theta - \frac{\pi}{3}) - \sin^2 (\theta - \frac{\pi}{3})$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

d) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (c) لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لِـ $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

سعيد

$$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin (45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

سلمان

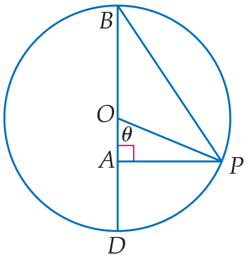
$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\sin \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$$

$$= 0.5$$

28) **تحدٍّ:** استعمل دائرة الوحدة أدناه، والشكل المرسوم داخلها. لتبرهن أن:

$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.



29) **اكتب:** اكتب فقرة مختصرة تبين الشروط اللازم توافرها؛ كي تستعمل كلًّا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$.

30) **برهان:** استعمل الصيغة $\sin (A + B)$ لاشتقاق صيغة لِـ $\sin 2\theta$ ، واستعمل الصيغة $\cos (A + B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\cos 2\theta$.

31) **تبرير:** اشتقّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

32) **مسألة مفتوحة:** ضرب لاعب جولف كرة عدة مرات بسرعة ابتدائية مقدارها 115 ft/s، ولنفترض أن المسافة d التي قطعتها الكرة في كل مرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. فسِّر لماذا تكون المسافة العظمى عندما $\theta = 45°$. $(g = 32\ ft/s^2)$

مراجعة تراكمية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 2–3)

33) $\cot \theta + \sec \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$

34) $\sin^2 \theta + \tan^2 \theta = (1 - \cos^2 \theta) + \frac{\sec^2 \theta}{\csc^2 \theta}$

35) $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3–3)

36) $\sin 135°$

37) $\cos 105°$

38) $\sin 285°$

39) $\cos 210°$

40) $\sin (-240°)$

41) $\cos (-120°)$

42) $\cos 78° \cos 18° + \sin 78° \sin 18°$.

تدريب على اختبار

43) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\tan \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 < \theta < 90°$.

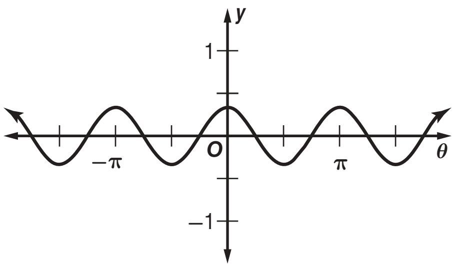
A $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

B $\sqrt{3} - 2$

C $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي :



A $y = 3 \cos 2\theta$

B $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$

C $y = 3 \cos \frac{1}{2}\theta$

D $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\theta$

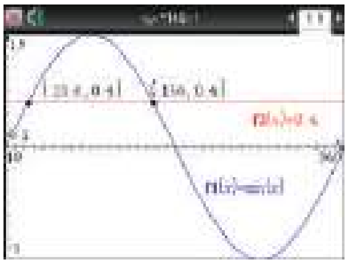
معمل الحاسبة البيانية:

حل المعادلات المثلثية

Solving Trigonometric Equations

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحل المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر التي تحقّق المعادلة جميعها. بإمكانك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المعادلات باستعمال التمثيل، وذلك بتمثيل كلٍّ من طرفي المعادلة بوصفها دالة على حدة، ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 معادلة مثلثية بحلول حقيقية



استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\sin x = 0.4$ ، إذا كانت $0° \le x < 360°$.

الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- اضبط الحاسبة على نظام الدرجات بالضغط على مفتاح on ثم الإعدادات ومنها 2: إعدادات المستند... ثم الزاوية: درجة
- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f1\ (x) = \sin x\,, f2\ (x) = 0.4$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

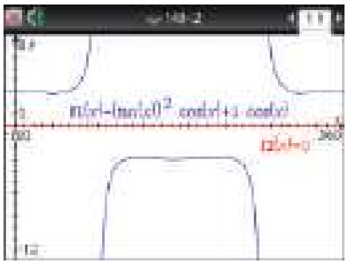
on ∪ trig sin x enter tab 0.4 enter

- حدد فترة الرسم المطلوبة بالضغط على menu واختر منها 4: تكبير/تصغير النافذة ثم 1: إعدادات النافذة وحدد القيمة الصغرى لِـ x بِـ $0°$ ، والقيمة العظمى لِـ x بِـ $360°$، كذلك حدد القيمة الصغرى لِـ y بِـ -1 ، والقيمة العظمى لِـ y بِـ 1

الخطوة 2: تحديد الحلول

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** في إيجاد قيم تقريبية للحلول بالضغط على مفتاح menu واختر منها 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر 4: نقاط التقاطع ، واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقاط التقاطع في $0° \le x < 360°$ ، ستكون الحلول هي: $x \approx 156.0°\ , x \approx 23.6°$

نشاط 2 معادلة مثلثية ليس لها حلول حقيقية



استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$، إذا كانت $0° \le x < 360°$.

الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- أعد كتابة المعادلة $f1\ (x) = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x\,, f2\ (x) = 0$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on ∪ (trig tan x ^ 2 ▶ ▶ trig cos $x + 3$ trig cos x
enter tab 0 enter

الخطوة 2: تحديد الحلول

هاتان الدّالتان لا تتقاطعان؛ لذلك ليس للمعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x الموضحة بجانب كلٍّ منها:

1) $\sin x = 0.7\,; 0° \le x < 360°$
2) $\tan x = \cos x\,; 0° \le x < 360°$
3) $3 \cos x + 4 = 0.5; 0° \le x < 360°$
4) $0.25 \cos x = 3.4\,; -720° \le x < 720°$
5) $\sin 2x = \sin x\,; 0° \le x < 360°$
6) $\sin 2x - 3 \sin x = 0\,; -360° \le x < 360°$

3-5

حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية. (الدروس من 2−3 إلى 4−3)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t .$$

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية
حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ ، إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$.

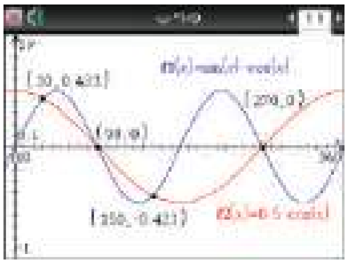
$\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$	المعادلة الأصلية
$\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$	حلّل بأخذ عامل مشترك

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$ — خاصية الضرب الصفري

$\theta = 90°$ أو $270°$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30°$ أو $150°$ — الزاوية المرجعية للزاوية 150° هي 30°

الحلول هي 30°, 90°, 150° فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$



التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من: $y = \sin\theta\cos\theta, y = \frac{1}{2}\cos\theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين 0° وَ 180° فقط.

b) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$	المعادلة الأصلية
$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$	حلّل

$2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$ — خاصية الضرب الصفري

$2\sin\theta = -1$ ، $\sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin\theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

التحقق:

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \\ 2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \\ 2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

☑ تحقق من فهمك

1A) حُل المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$، إذا كانت $0 \le x \le 2\pi$.

1B) حُل المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\ \sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

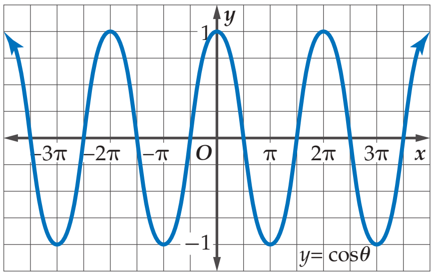
تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر في الفترة $[0 , 2\pi]$ بالراديان، أو $[0° , 360°]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

مثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\begin{aligned} \cos\theta + 1 &= 0 \\ \cos\theta &= -1 \end{aligned}$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos\theta$ ؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$.



الحلول هي $\ldots, \pi, 3\pi, 5\pi$، وكذلك $\ldots, -5\pi, -3\pi, -\pi$، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π. طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

☑ تحقق من فهمك

2A) حُل المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات مثلثية

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$ المعادلة الأصلية

$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$ عوّض 31 بدلًا من h

$10 = -20\cos 3\pi t$ اطرح 21 من كلا الطرفين

$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$ اقسم كلا الطرفين على -20

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$ خذ معكوس جيب التمام

ومن قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة نعلم أن:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ ‏ k أي عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ ‏ $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ ‏ اقسم كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

✓ تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الحلول الدخيلة: بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ ‏ المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ ‏ ربع

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ ‏ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ ‏ بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين

$0 = 2\cos\theta(1 + \cos\theta)$ ‏ حلّل

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ ‏ خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

التحقق:

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 180° \overset{?}{=} 1 + \cos 180°$$
$$0 \overset{?}{=} 1 + (-1)$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 90° \overset{?}{=} 1 + \cos 90°$$
$$1 \overset{?}{=} 1 + 0$$
$$1 = 1 \ \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 270° \overset{?}{=} 1 + \cos 270°$$
$$-1 \overset{?}{=} 1 + 0$$
$$-1 \ne 1 \ \times$$

إذن $270°$ حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

✓ تحقق من فهمك

4) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$	المعادلة الأصلية
$2(1 + \tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$	خاصية التوزيع
$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$	اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر
$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$	حلّل
$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$\tan^2\theta = -1$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta = 3$

$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي : $\theta = 60° + 180°k , \theta = 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k , 120° + 180°k$.

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(60° + 180°k) - \tan^4(60° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

$\theta \stackrel{?}{=} 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(120° + 180°k) - \tan^4(120° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

✓ تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو π، وهذا يبرر كتابة الحلول في الصورة:

$\theta = 60° + 180°k$

$\theta = 120° + 180°k$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها : (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$

2) $2\cos^2\theta + \cos\theta = 1\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$

3) $-2\sin^2\theta = 7 - 15\sin\theta\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$

4) $\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0\ ;\ 0° \le \theta \le 240°$

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

6) $2\cos^2\theta = 1$

7) $\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$

8) $2\cos^2\theta + 4\cos\theta = -2$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

10) $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

11) $2\sin^2\theta - 1 = 0$

12) $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3)

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع **a**، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو؟ فسِّر إجابتك.

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

15) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

16) $\tan\theta = 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

17) $\cos^2\theta = \frac{1}{4};\ 0° \le \theta \le 360°$

18) $2\sin^2\theta = 1;\ 90° < \theta < 270°$

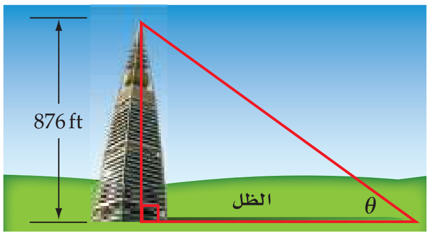
19) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0;\ 0 \le \theta \le 2\pi$

20) $4\sin^2\theta - 1 = 0;\ 180° < \theta < 360°$

21) $\tan\theta - \sin\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

22) $4\sin^2\theta = 4\sin\theta - 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

23) **ناطحات سحاب:** يبلغ ارتفاع برج الفيصلية في الرياض 876 ft. أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 685 m؟



24) **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، عمق نهر خلال أحد الأيام ؛ حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$ ، 24 تدل على الساعة الثانية عشرة عند منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر ، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25) $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$

26) $2\sin^2\theta + \left(\sqrt{2} - 1\right)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

27) $2\sin\theta = \sin 2\theta$

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28) $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

29) $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$

30) **ألماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin \boldsymbol{i} = n_2 \sin r$، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء،و $\boldsymbol{i}$ قياس زاوية السقوط،و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1 ، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو 35°، فما قياس زاوية الانكسار؟

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًّا ونقيًّا أم لا.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$ ، $0°\le\theta\le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

هلا	ليلى
$2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$	$2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$
$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta}$	$-\sin\theta=-\sin\theta$
$2\cos\theta=1$	$2\cos\theta=0$
$\cos\theta=\frac{1}{2}$	$\cos\theta=0$
$\theta=60°, 300°$	$\theta=90°, 270°$

32) **تحدٍّ:** حل المتباينة $\sin 2x<\sin x$ ، $0\le x\le 2\pi$ بدون استعمال الحاسبة.

33) **اكتب:** حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟

34) **تبرير:** اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية.

35) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على معادلة مثلثية لها حلّان فقط، بحيث تكون $0°\le\theta\le 360°$.

36) **تحدٍّ:** هل للمعادلتين $\csc x=\sqrt{2}$, $\cot^2 x+1=2$ الحلول نفسها في الربع الأول؟ برر إجابتك.

مراجعة تراكمية

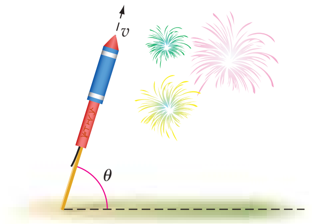
أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3–4)

37) $\cos 165°$ **38)** $\sin 22\frac{1}{2}°$ **39)** $\sin\frac{7\pi}{8}$ **40)** $\cos\frac{7\pi}{12}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (الدرس 3–3)

41) $\sin(270°-\theta)=-\cos\theta$ **42)** $\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

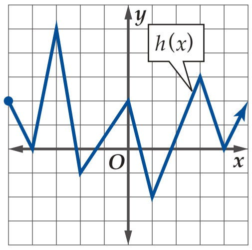
43) $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$ **44)** $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$



45) **ألعاب نارية:** إذا أطلق صاروخ من سطح الأرض، فإن أعلى ارتفاع يصل إليه يعطى بالصيغة $h=\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ ، حيث θ زاوية الانطلاق، و v السرعة المتجهة الابتدائية للصاروخ، و g تسارع الجاذبية الأرضية وتساوي 9.8m/sec .

a) أثبت أن $\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta}=\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ تمثِّل متطابقة .

b) إذا أطلق الصاروخ من سطح الأرض بزاوية 80°، وسرعة ابتدائية مقدارها 110m/s، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه. (الدرس 3-2)



46) استعمل التمثيل البياني في الشكل المجاور؛ لتحدد مجال الدالة $h(x)$ ومداها. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta+\cos\theta\tan^2\theta=0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ **B** $\frac{7\pi}{4}$ **C** 2π **D** $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحَلّ المعادلة $\csc x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0°<x<360°$؟

A 30° أو 150° **C** 210° أو 330°

B 60° أو 120° **D** 240° أو 300°

الفصل

3

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 5–3, 2–3, 1–3)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية في تبسيط العبارات المثلثية، وحل المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3–3)

- لجميع قيم A, B:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الدرس 4–3)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المفردات

المتطابقة (ص. 136)

المتطابقة المثلثية (ص. 136)

المتطابقات النسبية (ص. 136)

متطابقات المقلوب (ص. 136)

متطابقات فيثاغورس (ص. 136)

متطابقات الزاويتين المتتامتين (ص. 136)

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية (ص. 136)

المعادلات المثلثية (ص. 158)

اختبر مفرداتك

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) يمكن استعمال ________ في إيجاد جيب أو جيب تمام الزاوية 75° إذا علم الجيب والجيب تمام لكل من الزاويتين 90° و 15° .

2) المتطابقة $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ هي مثال على ________ .

3) ________ هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرفًا.

4) يمكن استعمال ________ في إيجاد sin 60° باستعمال الزاوية 30° .

5) تكون ________ صحيحة لقيم معينة للمتغيرات.

6) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.

7) المتطابقتان $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ مثالان على ________ .

8) يمكن استعمال ________ في إيجاد كل من sin 120° , cos 120° إذا عُلم الجيب، والجيب تمام لكل من الزاويتين 30° , 90° .

9) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ هي مثال على ________ .

مراجعة الدروس

3-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 140 - 136)

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

10) $\sin\theta$ ، إذا كان $270° < \theta < 360°$، $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

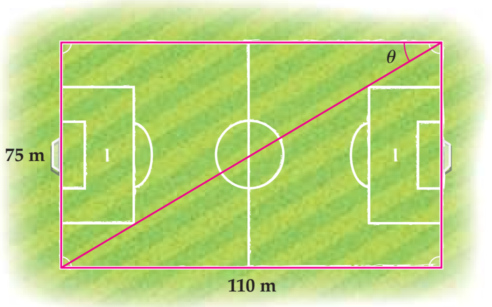
11) $\sec\theta$ ، إذا كان $90° < \theta < 180°$، $\cot\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

12) $\tan\theta$ ، إذا كان $0° < \theta < 90°$، $\cot\theta = 2$

13) $\cos\theta$ ، إذا كان $180° < \theta < 270°$، $\sin\theta = -\frac{3}{5}$

14) $\csc\theta$، إذا كان $270° < \theta < 360°$ ، $\cot\theta =-\frac{4}{5}$

15) **كرة قدم:** إذا كان بُعدا ملعب كرة القدم هما: 75 m, 110m كما في الشكل أدناه، فأوجد جيب الزاوية θ.



بسّط كل عبارة مما يأتي :

16) $1 - \tan\theta\sin\theta\cos\theta$

17) $\tan\theta\csc\theta$

18) $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$

19) $\cos\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ اطرح $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ عوِّض $\frac{3}{4}$ بدلًا عن $\cos\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ ربع $\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ اطرح

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة.

إذن ، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط العبارة $\cos\theta\sec\theta\cot\theta$.

$$\cos\theta\sec\theta\cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \cot\theta$$

الفصل 3

دليل الدراسة والمراجعة

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 141 - 145)

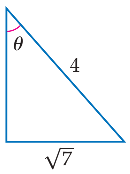
أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

(20 $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

(21 $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

(22 $\sec^2\theta - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$

(23 **هندسة :** المثلث المجاور قائم الزاوية. استعمل أطواله المعطاة لتتحقّق من أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$.

$\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}$ الطرف الأيسر

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$ بسّط

$= \cot\theta + \csc\theta$ ✓ بسّط

الطرف الأيمن =

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 146 - 149)

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(24 $\cos(-135°)$

(25 $\cos 15°$

(26 $\sin 210°$

(27 $\sin 105°$

(28 $\tan 75°$

(29 $\cos 105°$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(30 $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$

(31 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

(32 $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 75°$.

دون استعمال الآلة الحاسبة، استعمل المتطابقة $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$

$$= \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الصفحات 156 - 151)

أوجد القيم الدقيقة لكل من: لـ $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا علمت أن:

33) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

34) $\sin \theta = -\frac{1}{4}; 180° < \theta < 270°$

35) $\cos \theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36) **ملاعب:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

a) أوجد طول قطر الملعب.

b) اكتب النسبة sin 45° باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

c) استعمل الصيغة $\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ؛ لبرهنة صحة النسبة التي كتبتها في الفرع **(b)** .

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$، وتقع θ في الربع الثاني.

$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$ اطرح

$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ اقسم ، بسِّط ، وأنطق المقام

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3-5 حل المعادلات المثلثية (الصفحات 163 - <OV>)

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

37) $2\cos\theta - 1 = 0; 0° \le \theta < 360°$

38) $4\cos^2\theta - 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

39) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0; 0° \le \theta < 360°$

40) $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3; 0° \le \theta < 360°$

41) $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

مثال 6

حل المعادلة $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ حلّل

$2\sin\theta - 1 = 0$ أو $\cos\theta = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

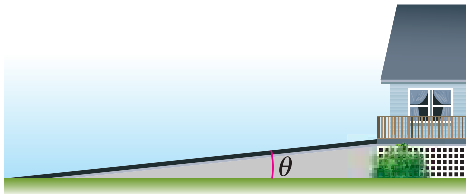
$\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

الفصل 3

دليل الدراسة و المراجعة

تطبيقات ومسائل

42) **إنشاءات:** يبين الشكل أدناه ممرًّا مائلًا لمنزل . (الدرس 3-1)

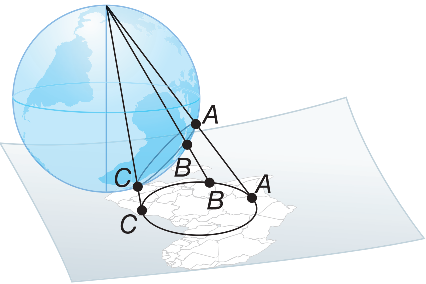


أوجد $\sin\theta, \cos\theta$ إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{12}$.

43) **ضوء:** تعطى شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين بالصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ؛ حيث I_0 شدة الضوء الخارج من العدسة الأولى، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب الصيغة السابقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. (الدرس 3-1)

44) **خرائط:** يستعمل إسقاط الستيروجرافيك (Stereographic Projection) لتحويل مسار ثلاثي الأبعاد على الكرة الأرضية إلى مسار في المستوى (على الخريطة)، بحيث ترتبط النقاط على الكرة الأرضية بالنقاط المقابلة لها على الخريطة بالمعادلة $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

أثبت أن $r = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 3-2)



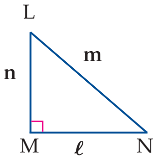
45) **موجات:** يُسمى تداخل موجتين بنَّاءً إذا كانت سعة الموجة الناتجة أكبر من سعة مجموع الموجتين المتداخلتين. هل يكون تداخل الموجتين الآتيتين معادلتاهما بنَّاء؟

$y_2 = 20\sin(3t + 45°)$ ، $y_1 = 20\sin(3t + 225°)$

(الدرس 3-3)

46) **هندسة:** استعمل المثلث LMN أدناه لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$.

(الدرس 3-4)



أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة: (الدرس 3-4)

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$

48) $1+\cos 2\theta = \frac{2}{1+\tan^2\theta}$

49) **مقذوفات:** إذا قُذفت كرة بسرعة متجهة مقدارها v وزاوية قياسها θ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ft، ويعطى زمن تحليقها t بالصيغة $t = \frac{d}{v\cos\theta}$، فأوجد الزاوية التي قُذفت بها الكرة، إذا علمت أن $v = 50$ft/s، وكانت المسافة الأفقية 100ft ، وزمن التحليق 4 ثوانٍ.

(الدرس 3-5)

اختبار الفصل

1) **اختيار من متعدد:** أي من العبارات الآتية تكافئ $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$؟

A $\cot\theta$

B $\tan\theta$

C $\sec\theta$

D $\csc\theta$

أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة:

2) $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$.

3) $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، $90° < \theta < 180°$؟

A $\frac{5}{3}$

B $\frac{\sqrt{34}}{8}$

C $-\frac{4}{5}$

D $\frac{4}{5}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\cot\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $270° < \theta < 360°$

6) $\tan\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، $90° < \theta < 180°$

7) $\sec\theta$، إذا كان $\csc\theta = -2$، $180° < \theta < 270°$

8) $\sec\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$، $0° < \theta < 90°$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

9) $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

10) $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

11) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta\sec^2\theta$

12) $\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\tan\frac{\pi}{8}$؟

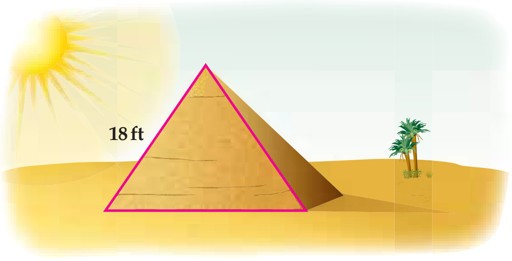
A $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

B $\sqrt{2} - 1$

C $1 - \sqrt{2}$

D $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

14) **تاريخ:** يُرجِّح بعض المؤرخين أن الذين بنوا أهرامات مِصر ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، ثمّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افترض أنّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 18 ft.



a) أوجد ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، وطول ضلع المثلث وارتفاعه لتبيّن أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$ ، ثم أوجد القيمة الدقيقة للنسبة المثلثية $\sin 60°$.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

15) $\cos(-225°)$

16) $\sin 480°$

17) $\cos 75°$

18) $\sin 165°$

حُل كلًّا من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

19) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

20) $2\sin 3\theta - 1 = 0$

حُل المعادلتين الآتيتين، حيث $0° \leq \theta \leq 360°$:

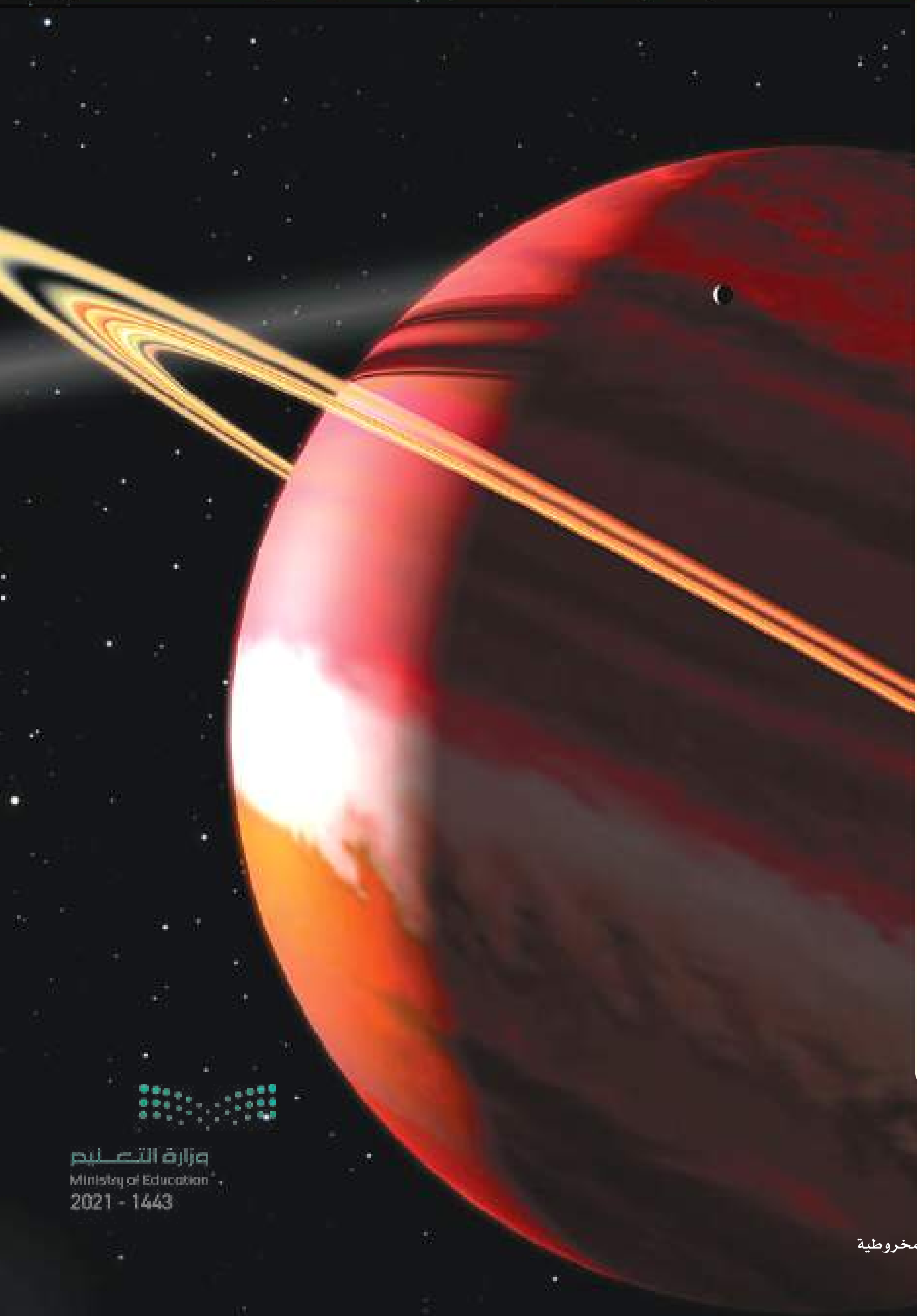
21) $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

22) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

الفصل

4

القطوع المخروطية
Conic Sections



فيما سبق:

درستُ تمثيل الدالة التربيعية (والتي تمثل قطعًا مكافئًا) ، ودالة المقلوب (والتي تمثل قطعًا زائدًا). الدرس (5-3)

والآن:

- أحُلُّ معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأمثّلُها بيانيًّا.
- أكتبُ معاالادت القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحلُّ مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا؟

فضاء: القطوع المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء؛ إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضاوية الشكل تشبه القطوع الناقصة، أمّا المذنَّبات، فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد، ممّا يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقًا.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال التربيعية وتمثيلها البياني.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$

2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$

4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$

5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$

6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$

7) **أعمال:** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلًا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لمنحنى هذه الدالة.

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$

10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$

13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

14) $x^2 + 8x$

15) $x^2 - 18x$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

16) $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$

17) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

18) **هدية:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 50 كوبًا ورقيًا لاستعمالها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الأكواب التي سيستعملها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. اكتب دالة تمثِّل هذا الموقف، ومثِّلها بيانيًا.

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية للدوال (Functions transformations):
هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

المماس (tangent line):
يكون المستقيم مماسًا لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

إكمال المربع (completing the square):
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية:

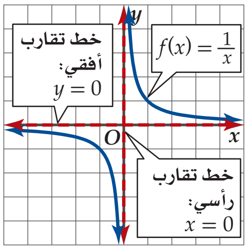
1) أوجد نصف معامل x؛ أي نصف b.

2) ربِّع الناتج في الخطوة (1).

3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

محور التماثل (axis of symmetry):
مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

خط التقارب (asymptote):
هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



4-1

القطوع المكافئة
Parabolas

فيما سبق:

درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:

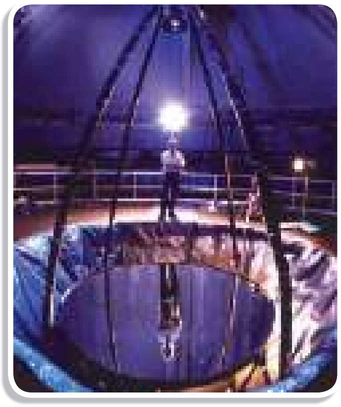
- أحلّ معادلات قطوع مكافئة، وأمثلها بيانيًا.
- أكتبُ معادلات قطوع مكافئة.

المفردات

القطع المخروطي	conic section
المحل الهندسي	locus
القطع المكافئ	parabola
البؤرة	focus
الدليل	directrix
محور التماثل	axis of symmetry
الرأس	vertex
الوتر البؤري	latus rectum

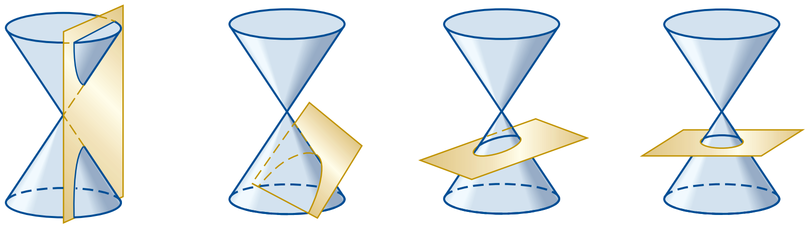
لماذا؟

استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.



القطوع المخروطية: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

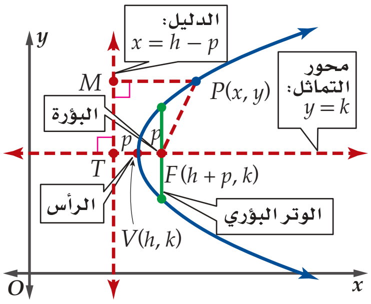
والقطوع المخروطية الثلاثة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص (وحالة خاصة منه الدائرة) والقطع الزائد.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا:

المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة (تسمى **البؤرة**) مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم (يسمّى **الدليل**).



والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

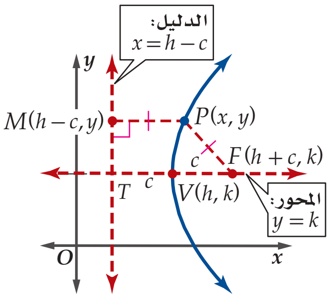
درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ؛ لإيجاد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا أفقيًا (إلى اليمين أو إلى اليسار) أو رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل).

إرشادات للدراسة

القطع

كلمة قطع هي مفرد كلمة قطوع، وتعني في اللغة الجزء قال تعالى: ﴿ فَأَسْرِ بِأَهْلِكَ بِقِطْعٍ مِّنَ ٱلَّيْلِ ... ﴾ [الحجر: 65]

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$ ، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.



نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$$\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} = \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - y)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2 = [x - (h - c)]^2 + 0^2$$ ربّع الطرفين

$$x^2 - 2x(h + c) + (h + c)^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2x(h - c) + (h - c)^2$$ فك الأقواس

$$x^2 - 2xh - 2xc + h^2 + 2hc + c^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2xh + 2xc + h^2 - 2hc + c^2$$ فك الأقواس

$$(y - k)^2 = 4xc - 4hc$$ بسّط

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$ حلّل

أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y - k)^2 = 4c(x - h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$.

وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

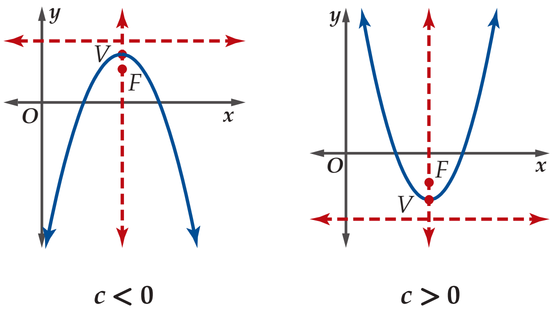
قراءة الرياضيات

اتجاه فتحة منحنى القطع

ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًا (إلى اليمين أو اليسار).

مفهوم أساسي — خصائص القطع المكافئ

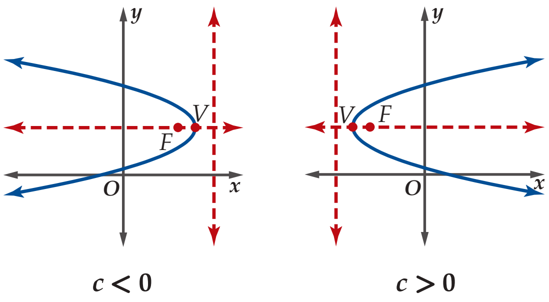
المعادلة في الصورة القياسية: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$



$c > 0$ $c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k + c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y - k)^2 = 4c(x - h)$



$c > 0$ $c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h + c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل .

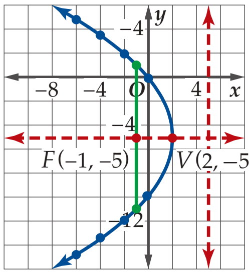
مثال 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًا

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y+5)^2 = -12(x-2)$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ؛ لذا فإن $h = 2, k = -5$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس:	$(2, -5)$	(h, k)	الدليل:	$x = 5$	$x = h - c$
البؤرة:	$(-1, -5)$	$(h + c, k)$	محور التماثل:	$y = -5$	$y = k$
طول الوتر البؤري:	12	$\lvert 4c \rvert$			

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

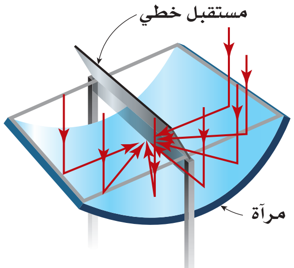


✓ تحقق من فهمك

1A) $8(y+3) = (x-4)^2$ **1B)** $2(x+6) = (y+1)^2$

مثال 2 من واقع الحياة خصائص القطع المكافئ

طاقة شمسية : يتكون مجمِّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$ ، حيث x, y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع ، أين يقع المستقبل الخطِّي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و c موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k+c)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h, k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0+0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$. فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

✓ تحقق من فهمك

2) **فلك :** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8(y-6)$ ، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ

يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله موازٍ لأحد محوري الإحداثيات:

- مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c < 0$.
- مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c < 0$.

إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري

لرسم الوتر البؤري في المثال 1، ارسم قطعة مستقيمة طولها 12 وحدة، وتمر بالبورة التي تقع في منتصفها، وتكون عمودية على محور التماثل.

الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

مثال 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائص القطع المكافئ، ومثّل منحناه بيانيًّا.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$	المعادلة الأصلية
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$	أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$	أكمل المربع
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$	$-\frac{1}{4}(-36) = 9$
$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$	حلّل
$-4(y - 15) = (x - 6)^2$	اطرح 15 من الطرفين، ثمَّ اضرب في العدد (4−)

وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x، و $c = -1$، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

الرأس: $(6, 15)$ (h, k)

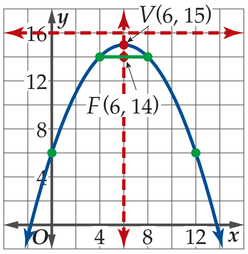
الدليل: $y = 16$ $y = k - c$

البؤرة: $(6, 14)$ $(h, k + c)$

محور التماثل: $x = 6$ $x = h$

طول الوتر البؤري: 4 $|4c|$

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



✓ تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

معادلات القطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

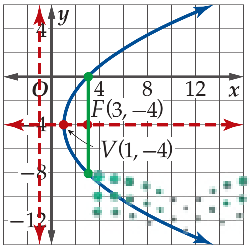
بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$، وتكون قيمة c هي $3 - 1 = 2$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$	$c = 2, h = 1, k = -4$
$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$	بسّط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

مثّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x ، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

إرشادات للدراسة

الدليل
يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

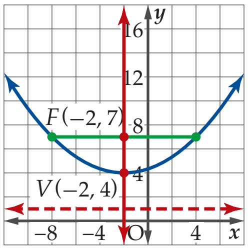
بما أن الدليل مستقيم أفقيًا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

استعمل معادلة الدليل لتجد c .

$y = k - c$	معادلة الدليل
$1 = 4 - c$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -c$	اطرح 4 من الطرفين.
$3 = c$	اقسم كلا الطرفين على -1 .

عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	الصورة القياسية
$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$	$h = -2, k = 4, c = 3$
$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$	بسّط

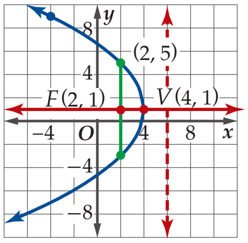


طول الوتر البؤري يساوي $12 = |4 \times 3| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + c, k) = (2, 1)$ ، والرأس (h, k) هو $(2 - c, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$(5 - 1)^2 = 4c[2 - (2 - c)]$	$h = 2 - c, k = 1, x = 2, y = 5$
$16 = 4c(c)$	بسّط
$4 = c^2$	بسّط
$\pm 2 = c$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين



بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$ ، والرأس هو $(4, 1)$.

$$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$$

طول الوتر البؤري يساوي $8 = |4 \times (-2)| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

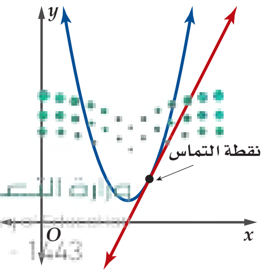
4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(-2, 9)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

يمكن رسم مماسٍ لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقًا كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.



إرشادات للدراسة

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

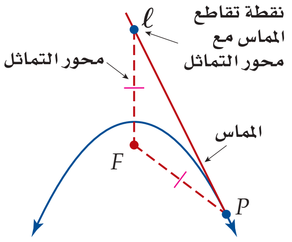
– إذا كان المنحنى مفتوحًا أفقيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$

– إذا كان المنحنى مفتوحًا رأسيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

مفهوم أساسي مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



مثال 5 كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

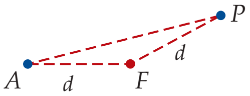
المنحنى مفتوح أفقيًّا.

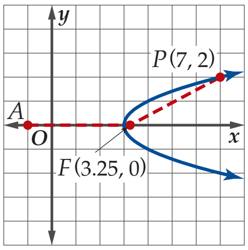
$$x = y^2 + 3 \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$1(x - 3) = (y - 0)^2 \qquad \text{الصورة القياسية}$$

بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$ ، والبؤرة $(3.25, 0)$.

الخطوة الثانية: أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F ، ونقطة التماس P) كما يظهر في الشكلين الآتيين .





حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{صيغة المسافة}$$

$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2} \qquad (x_2, y_2) = (7, 2) \text{ و } (x_1, y_1) = (3.25, 0)$$

$$= 4.25 \qquad \text{بسِّط}$$

الخطوة الثالثة: أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل) بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25؛ والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة: أوجد معادلة المماس.

تقع النقطتان A, P على مماس منحنى القطع المكافئ.

$$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} = \frac{1}{4} \qquad \text{صيغة الميل}$$

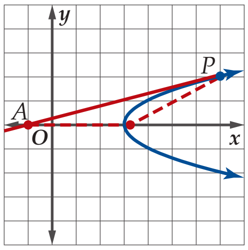
$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة}$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7) \qquad m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$$

$$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4} \qquad \text{خاصية التوزيع}$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \qquad \text{اجمع 2 إلى الطرفين}$$

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 4.1.1 .



الشكل 4.1.1

☑ تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$

تدرب وحل المسائل

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $(x-3)^2 = 12(y-7)$

2) $(x+1)^2 = -12(y-6)$

3) $(y-4)^2 = 20(x+2)$

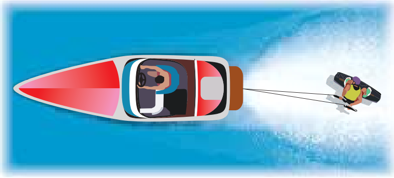
4) $-40(x+4) = (y-9)^2$

5) $(y+5)^2 = 24(x-1)$

6) $-4(y+2) = (x+8)^2$

7) **لوح تزلُّج:** صمَّم بدر لوح تزلُّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y-2)$، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

8) **قوارب:** يُجر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

9) $x^2 - 17 = 8y + 39$

10) $y^2 + 33 = -8x - 23$

11) $3x^2 + 72 = -72y$

12) $60x - 80 = 3y^2 + 100$

13) $-33 = x^2 - 12y - 6x$

14) $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4)

15) البؤرة $(-9, -7)$ والرأس $(-9, -4)$.

16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

17) البؤرة $(2, -1)$ والرأس $(-4, -1)$.

18) البؤرة $(11, 4)$ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$.

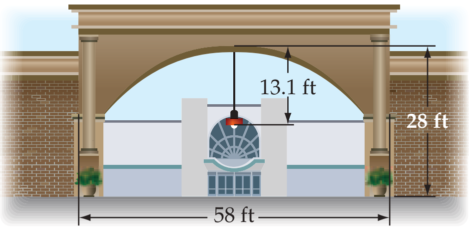
19) البؤرة $(-3, -2)$، والرأس $(1, -2)$.

20) المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.

21) البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$.

22) الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

23) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

b) مثِّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)\ ;(-5, -5)$

25) $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)\ ;(24, 2)$

26) $(x+6)^2 = 3(y-2)\ ;(0, 14)$

27) $-4x = (y+5)^2 ;(0, -5)$

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

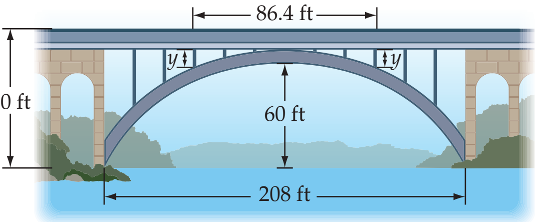
28) الدليل $y = 4$ وَ $c = -2$

29) المعادلة هي $y^2 = -8(x-6)$

30) الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$

31) البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x = 1$

32) **جسور:** يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft، وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.

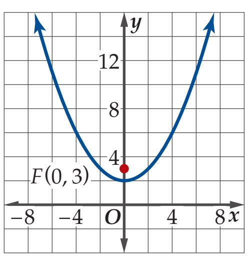


a) اكتب معادلة تمثّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثِّل المحور x، والمحور المار بقمة القوس والعمودي على المحور x هو المحور y.

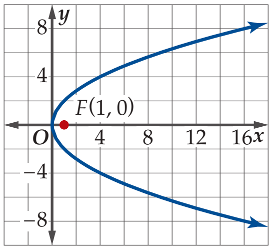
b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft.

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F ، في كلٍّ مما يأتي:

33)



34)



35) **تمثيلات متعددة:** ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

a) **هندسيًّا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2=4(x-2)$ **ii)** $y^2=8(x-2)$ **iii)** $y^2=16(x-2)$

b) **بيانيًّا:** مثّل منحنى كل قطع مكافئ في الفرع a بيانيًّا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًّا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

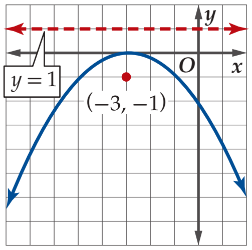
d) **تحليليًّا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2=20(y+7)$ ولكنّه أقل اتساعًا.

e) **تحليليًّا** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي:
$x^2=-2(y+1), x^2=-12(y+1), x^2=-5(y+1)$
ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًّا.

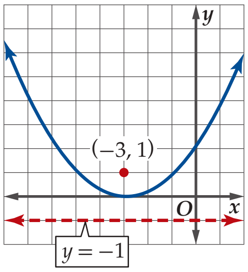
مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2+6x-4y+9=0$ بيانيًّا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

صفية



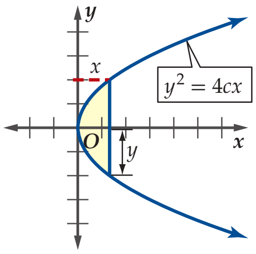
ميمونة



37) **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك.

38) **تبرير:** حدّد دون استعمال الرسم أي أرباع المستوى الإحداثي لا توجد فيه نقاط يمر بها منحنى القطع $(y-5)^2=-8(x+2)$. فسِّر تبريرك.

39) **تحدٍّ:** تُعطى مساحة المقطع المظلل في الشكل المجاور بالمعادلة $A=\frac{4}{3}xy$. أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدة مربعة، وعرضه $(2y)$ يساوي 3 وحدات.



40) **اكتب:** اشرح كيف تحدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ إذا أعطيت إحداثيات بؤرته ورأسه.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-2)

41) $\log_{16} 4$ **42)** $\log_4 16^x$ **43)** $\log_3 27^x$

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك. (الدرسان 2-2, 2-5)

44) $8^{2x-1}=2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

45) $\log_3(-x)+\log_3(6-x)=3$

46) $\log_3 x\le -3$

47) أوجد كلًّا مما يأتي إذا كان: (الدرس 1-1)

$h(x)=16-\frac{12}{2x+3}$

a) $h(-3)$

b) $h(6x)$

c) $h(10-2c)$

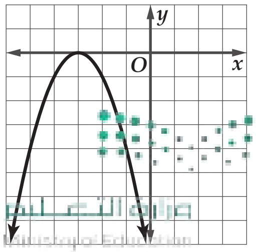
48) إذا كان $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ ، فأوجد $\sin\theta+\cos\theta$ ، حيث θ زاوية في الربع الأول. (الدرس 3-1)

تدريب على اختبار

49) إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

A $x^{-\frac{1}{4}}$ **B** $\sqrt{x^3}$ **C** $x^{\frac{3}{4}}$ **D** $\sqrt{x^5}$

50) ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحناها جانبًا؟



A $y=x$

B $y=|x|$

C $y=\sqrt{x}$

D $y=x^2$

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

4-2

القطوع الناقصة والدوائر
Ellipses and Circles

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًا.
(الدرس 1—4)

والآن:

- أُحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأمثّلُها بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

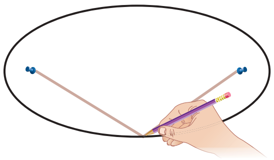
المفردات:

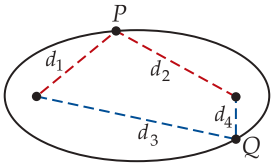
القطع الناقص
ellipse
البؤرتان
foci
المحور الأكبر
major axis
المركز
center
المحور الأصغر
minor axis
الرأسان
vertices
الرأسان المرافقان
co-vertices
الاختلاف المركزي
eccentricity

لماذا؟

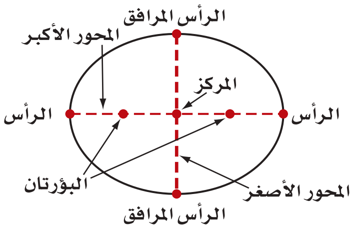
يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليليجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلها بيانيًا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**، وعمليًّا يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البورتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شده كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .

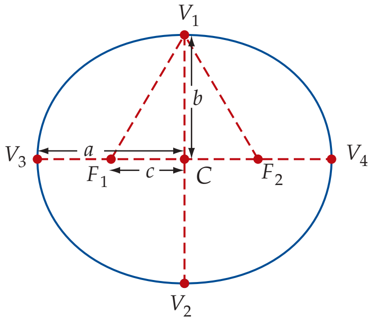




تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمّى نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة. وفيما يلي توضيحٌ للعلاقة بين a, b, c

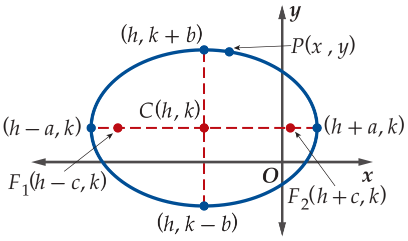


بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق SAS
$(\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2 ,\overline{V_1C} \cong \overline{V_2C})$
فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1, V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c .

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسِّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

بما أنّ $V_1F_1 = a$ ، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:



افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$
تعريف القطع الناقص

$$\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} = 2a$$
صيغة المسافة

$$\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 2a$$
خاصية التوزيع ثم التجميع

$$\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 2a - \sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2}$$
اطرح

$$(x - h)^2 - 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} + (x - h)^2 + 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2$$
ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين

$$4a\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} = 4a^2 + 4c(x - h)$$
بسّط

$$a\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} = a^2 + c(x - h)$$
اقسم كلا الطرفين على 4

$$a^2[(x - h)^2 + 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2] = a^4 + 2a^2c(x - h) + c^2(x - h)^2$$
ربّع الطرفين

$$a^2(x - h)^2 + 2a^2c(x - h) + a^2c^2 + a^2(y - k)^2 = a^4 + 2a^2c(x - h) + c^2(x - h)^2$$
خاصية التوزيع

$$a^2(x - h)^2 - c^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^4 - a^2c^2$$
بسّط

$$b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2$$
$a^2 - c^2 = b^2$

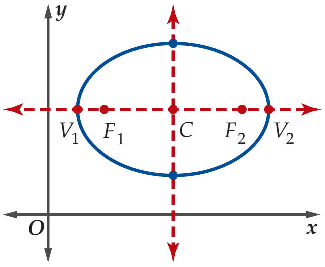
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$
اقسم الطرفين على a^2b^2

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k) ، حيث $a > b$ ، هي $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ ، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$ يكون المحور الأكبر رأسيًّا.

مفهوم أساسي خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

الرأسان: $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$

المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $= 2a$

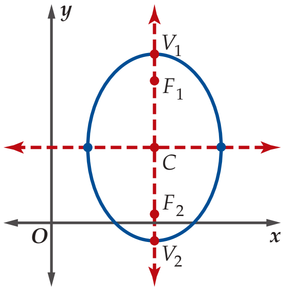
المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $= 2b$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

طول البعد البؤري: 2C

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

الرأسان: $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $= 2a$

المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $= 2b$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

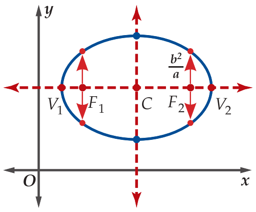
طول البعد البؤري: 2C

إرشادات للدراسة

البعد البؤري

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري.

لرسم القطع الناقص نعين نقاطًا مساعدة وهي التي تبعد مسافة $\frac{b^2}{a}$ أعلى وأسفل كل من البؤرتين.



إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًّا

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

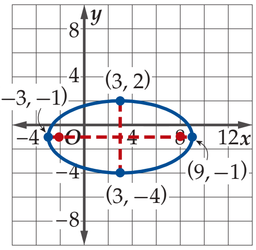
a) $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث

$h = 3, k = -1, a = \sqrt{36} = 6, b = \sqrt{9} = 3, c = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرأسان:	$(9, -1)$ و $(-3, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, 2)$ و $(3, -4)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y = -1$، وطوله 12	$y = k$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x = 3$، وطوله 6	$x = h$، طول المحور الأصغر $2b$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

b) $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

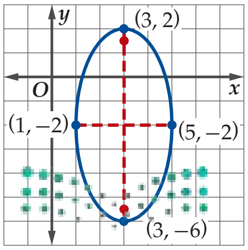
$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$	المعادلة الأصلية
$(4x^2 - 24x) + (y^2 + 4y) = -24$	جمّع الحدود المتشابهة
$4(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = -24$	حلّل
$4(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -24 + 4(9) + 4$	كمّل المربعين
$4(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$	حلّل وبسّط
$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$	اقسم الطرفين على 16

المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	$(y-k)^2$مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$	$(h, k \pm c)$
الرأسان:	$(3, 2)$ و $(3, -6)$	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(1, -2)$ و $(5, -2)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x = 3$، وطوله 8	$x = h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y = -2$، وطوله 4	$y = k$، طول المحور الأصغر $2b$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

✓ تحقق من فهمك

1A) $\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

1B) $x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$

لكتابة معادلة القطع الناقص على الصورة القياسية، إذا علمت بعض خصائصه، فإنك تحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف.

إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) **الرأسان $(-6, -8)$, $(-6, 2)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$, $(-3, -3)$.**

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a , b .

نصف طول المحور الأكبر
$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 5$$

نصف طول المحور الأصغر
$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 3$$

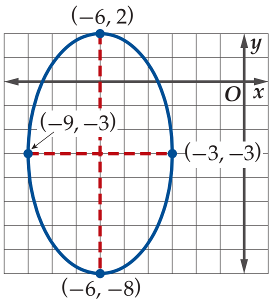
مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر .

$$(h, k) = \left(\frac{-6+(-6)}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (-6, -3)$$ بسّط

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .



الشكل 4.2.1

b) **الرأسان $(6, 4)$, $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.**

طول المحور الأكبر $2a$ ، وهي المسافة بين الرأسين.

$$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2}$$ صيغة المسافة

$$a = 5$$ بسّط

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

$$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2}$$ صيغة المسافة

$$c = 3$$ بسّط

أوجد قيمة b .

$$c^2 = a^2 - b^2$$ العلاقة بين a, b, c

$$3^2 = 5^2 - b^2$$ $a = 5, c = 3$

$$b = 4$$ بسّط

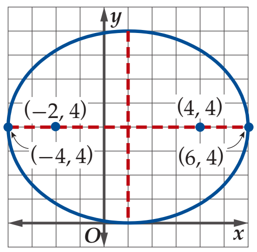
وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

$$(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (1, 4)$$ بسّط

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.2 .



الشكل 4.2.2

✓ تحقق من فهمك

2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

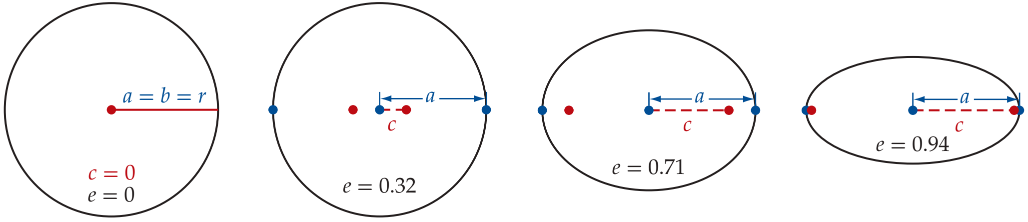
2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ ، حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن **الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة** $e = \frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي e, c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a, b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x-6)^2}{100} = 1$.

أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 100 - 9$ $a^2 = 100, b^2 = 9$

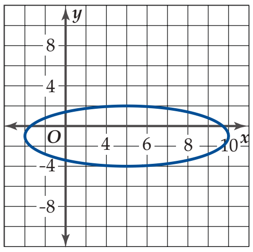
$c = \sqrt{91}$ بسّط

نستعمل قيمتي a, c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$ $a = 10, c = \sqrt{91}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.



الشكل 4.2.3

✓ تحقق من فهمك

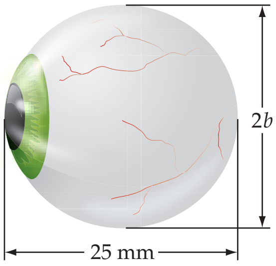
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{(y+8)^2}{48} + \frac{x^2}{18} = 1$

3B) $\frac{(y+7)^2}{17} + \frac{(x-4)^2}{19} = 1$

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$ تعريف الاختلاف المركزي

$0.28 = \frac{c}{12.5}$ $e = 0.28, a = 12.5$

$c = 3.5$ اضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$ $c = 3.5, a = 12.5$

$b = 12$ بسّط

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$، ويساوي 24 mm تقريبًا.

✓ تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm، فما ارتفاعها؟

مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ معادلة القطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ $e=0$ عندما $a=b$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$ اضرب كلا الطرفين في a^2 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$ a نصف قطر الدائرة

مفهوم أساسي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$ الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2$$ $(h, k)=(-1, 2),\ r=\frac{8}{2}=4$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16$$ بسّط

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$, $(7, 6)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$$(h, k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$=\left(\frac{7+(-1)}{2}, \frac{6+(-8)}{2}\right)$$ $(x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(-1, -8)$

$$=\left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right)$$ اجمع

$$=(3, -1)$$ بسّط

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ صيغة المسافة بين نقطتين

$$=\sqrt{(3-7)^2+(-1-6)^2}$$ $(x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(3, -1)$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2}$$ اطرح

$$=\sqrt{65}$$ بسّط

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2=65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y+1)^2=65$.

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$.

تدرب وحل المسائل

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1)

1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

2) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

3) $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

4) $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2)

5) الرأسان $(13, -3), (-7, -3)$ ، والبؤرتان $(11, -3), (-5, -3)$

6) الرأسان $(4, -9), (4, 3)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(1, 2)$, $(-13, 2)$ ، وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0)$, $(-6, 4)$.

8) البؤرتان $(-6, -3), (-6, 9)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

9) الرأسان المرافقان $(-3, 7), (-13, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

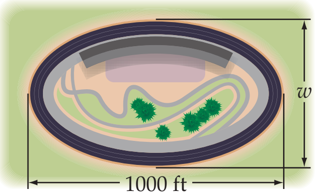
10) $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$

11) $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

12) $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y+3)^2}{57} = 1$

13) $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33} = 1$

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (مثال 4)



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5)

15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

16) المركز $(-4, -3)$ ، والقطر 12 .

17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18) $(2, 1) , (2, -4)$

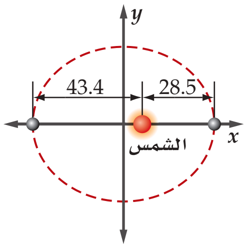
19) $(-4, -10) , (4, -10)$

20) $(5, -7) , (-2, -9)$

21) $(-6, 4) , (4, 8)$

22) **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، أجب عما يأتي:



a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد.

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار.

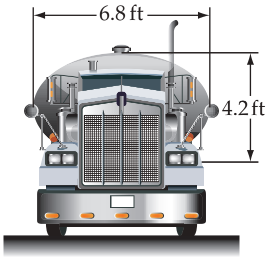
أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

25) $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

26) $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثّل المقطع العرضي للخزان.

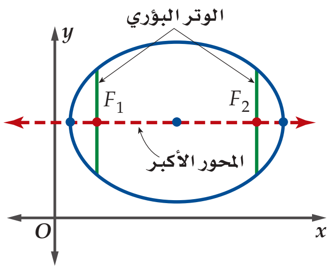
اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28) الرأسان $(10, 0)$, $(-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$

29) الرأسان المرافقان $(6, 1)$, $(0, 1)$ ، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$.

30) المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4 + 2\sqrt{5})$ ، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

31) الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(3, 2)$، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.

32) **هندسة:** تتقاطع المستقيمات $x - 5y = -3, 2x + 3y = 7, 4x - 7y = 27$ لتشكِّل مثلثًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي:

33) $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$

34) $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

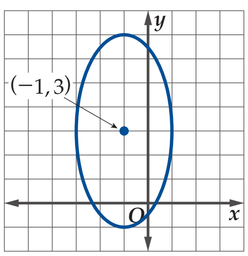
35) $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$

36) $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

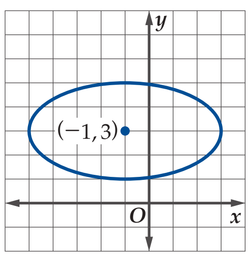
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** مثَّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟

خالد

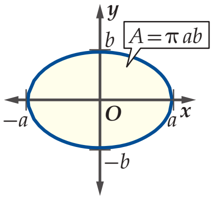


ياسر



38) **تبرير:** حدّد ما إذا كان للقطعين الناقصين $\frac{y^2}{p} + \frac{x^2}{p+r} = 1, \frac{y^2}{p+r} + \frac{x^2}{p} = 1$، حيث $r > 0$، البؤرة نفسها. وضِّح إجابتك.

تحدٍّ: تُعطى المساحة داخل القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالصيغة $A = \pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص المعطى خصائصه في كل مما يأتي:



39) $b + a = 12, A = 35\pi$

40) $a - b = 5, A = 24\pi$

41) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت معادلة دائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ حيث $h > 0, k < 0$، فأوجد مجال الدائرة مدعمًا إجابتك بمثال جبري، وآخر بياني.

42) **اكتب:** اشرح لماذا يقترب شكل القطع الناقص من شكل الدائرة عندما تقترب قيمة a من قيمة b .

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي:
(الدرس 4-1)

43) $y = 3x^2 - 24x + 50$

44) $y = -2x^2 + 5x - 10$

45) $x = 5y^2 - 10y + 9$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.
(الدرس 3-5)

46) $\sin \theta = \cos \theta$

47) $\sin \theta = 1 + \cos \theta$

48) $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن لكل دالة مما يأتي، ثم حدِّد مجالها.
(الدرس 1-7)

49) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

50) $f(x) = \sqrt{5 - x}$

51) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

52) مثّل الدالة $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ بيانيًّا، وحدِّد مداها. (الدرس 2-1)

تدريب على اختبار

53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

A 6
B 8
C 10
D $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

A $\frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1$
B $\frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1$
C $\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$
D $\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1$

اختبار منتصف الفصل

الدرسان 4-2 , 4-1

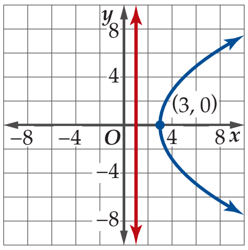
اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا: (الدرس 4-1)

1) البؤرة (1, 5)، الرأس (1, 3)

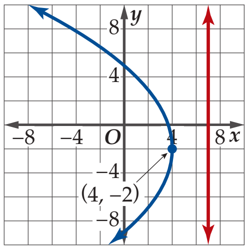
2) البؤرة (5, −7)، الرأس (1, −7)

3) **اختيار من متعدد:** أي القطوع المكافئة الممثّلة بيانيًّا أدناه فيه بُعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر؟ (الدرس 4-1)

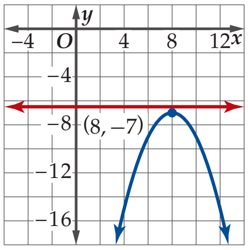
A



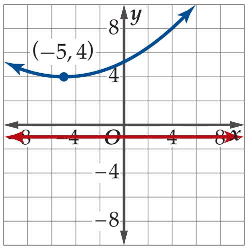
C



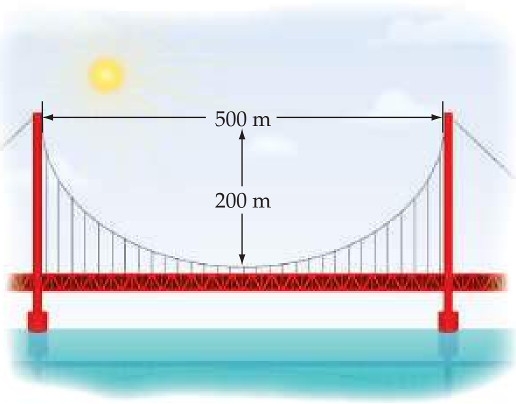
B



D



4) **تصميم:** اكتب معادلة قطع مكافئ تمثِّل شكل سلك تثبيت الجسر الموضح في الشكل أدناه. افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة على السلك. (الدرس 4-1)



مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-2)

5) $\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

6) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

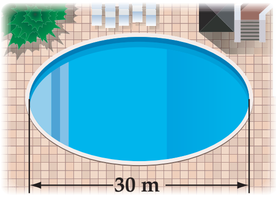
7) الرأسان (−3, −3) , (9, −3) ، والبؤرتان (−1, −3) , (7, −3) .

8) البؤرتان (3, 7) , (3, 1) ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

9) الرأسان (1, −13) , (1, −1) ، والرأسان المرافقان (4, −7) , (−2, −7) .

10) الرأسان (8, −9) , (8, 5) ، وطول المحور الأصغر 6 وحدات.

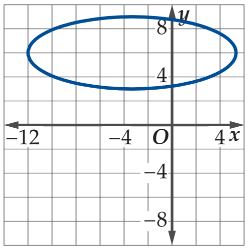
11) **سباحة:** بركة سباحة على شكل قطع ناقص طوله 30 m واختلافه المركزي 0.68 . (الدرس 4-2)



a) ما أكبر عرض للبركة؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كانت نقطة الأصل هي مركز البركة.

12) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثّل القيمة الأقرب لطول المحور الأكبر في القطع الناقص الممثَّل بيانيًّا أدناه؟ (الدرس 4-2)



A 17 وحدة

C 6 وحدات

B 9 وحدات

D 3 وحدات

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-3

القطوع الزائدة
Hyperbolas

فيما سبق:

درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًا.
(الدرس 4—2)

والآن:

- أحلل معادلات القطوع الزائدة، وأمثلها بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

القطع الزائد
hyperbola

البؤرتان
foci

المركز
center

الرأسان
vertices

المحور القاطع
transverse axis

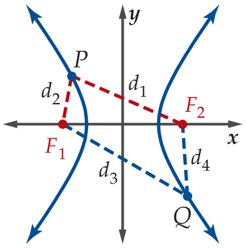
المحور المرافق
conjugate axis

لماذا؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقصٍ؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلًا، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًّا مفتوحًا من إحدى جهتيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمَّى قطوعًا زائدةً.

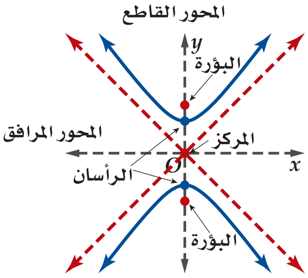
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

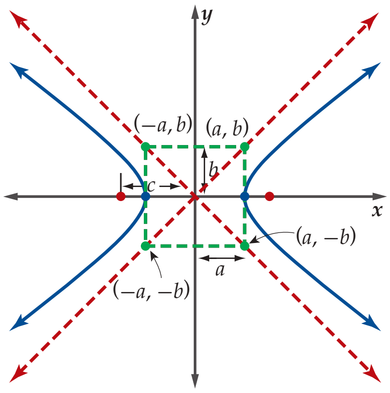


يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، **ومركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، **ورأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.



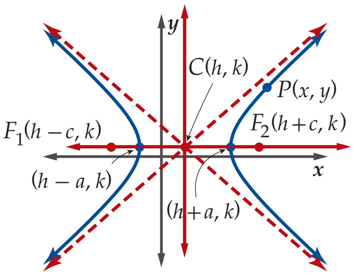
لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.



إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.



الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:

يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$، ومحوره القاطع أفقي. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$. وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.

$PF_1 - PF_2 = 2a$	
$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$	صيغة المسافة
$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a$	خاصية التوزيع ثم التجميع
$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$	اجمع
$(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$	ربِّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين
$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2 - 4c(x-h)$	بسّط
$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2 + c(x-h)$	اقسم الطرفين على -4 .
$a^2[(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$	ربِّع الطرفين
$a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$	الخاصية التوزيعية
$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$	بسّط
$(a^2-c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$	الخاصية التوزيعية
$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$	$a^2 - c^2 = -b^2$
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.

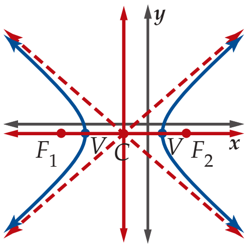
المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًّا، كما تكون في الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًّا.

مفهوم أساسي

خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع أفقي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h \pm a, k)$

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

المحور القاطع: $y = k$، وطوله $2a$

المحور المرافق: $x = h$، وطوله $2b$

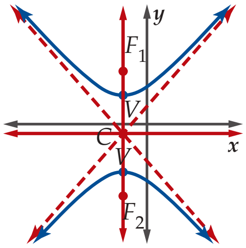
خطا التقارب: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$

طول البعد البؤري: 2C

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع رأسي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

المحور القاطع: $x = h$، وطوله $2a$

المحور المرافق: $y = k$، وطوله $2b$

خطا التقارب: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$

طول البعد البؤري: 2C

تنبيه!

عندما تمثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y، فإن اتجاه القطع رأسي.

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

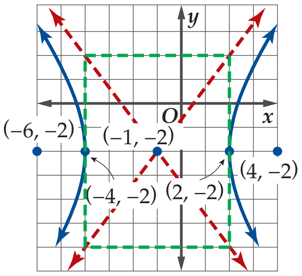
المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h = -1, k = -2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9+16} = 5$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	أفقي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x
المركز:	$(-1, -2)$	(h, k)
الرأسان:	$(2, -2), (-4, -2)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(4, -2), (-6, -2)$	$(h \pm c, k)$
خطا التقارب:	$y+2 = \frac{4}{3}(x+1)$, $y+2 = -\frac{4}{3}(x+1)$	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$
	$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$	

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$، والبعد الآخر $2b = 8$، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



✓ تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

1B) $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1 .

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

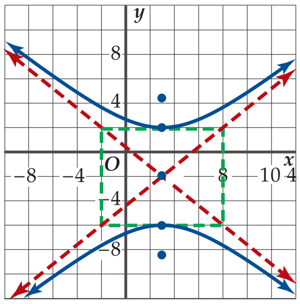
$25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$	المعادلة الأصلية
$(25y^2 + 100y) + (-16x^2 + 96x) = 444$	جمِّع الحدود المتشابهة
$25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$	حلِّل
$25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$	أكمل المربع
$25(y+2)^2 - 16(x-3)^2 = 400$	حلِّل وبسِّط
$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$	اقسم كلا الطرفين على 400

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16+25} \approx 6.4.$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	رأسي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
الرأسان:	$(3, 2), (3, -6)$	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(3, 4.4), (3, -8.4)$	$(h, k \pm c)$
خطا التقارب:	$y-(-2)=-\frac{4}{5}(x-3)$, $y-(-2)=\frac{4}{5}(x-3)$ $y=\frac{-4}{5}x+\frac{2}{5}$, $y=\frac{4}{5}x-\frac{22}{5}$	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$



عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعدَيه $2a = 8$، والبعد الآخر $2b = 10$، وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطَّي التقارب $2c = 12.8$

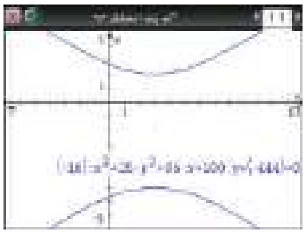
ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا، بحيث يمس جانبَي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

التحقق: تمثيل القطع الزائد بيانيًّا وتحديد خصائصه، باستعمال الحاسبة البيانيّة TI-nspire ،

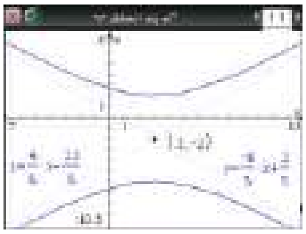
- مثِّل القطع الزائد بالضغط على المفاتيح: ثم اختيار

3: إدخال/ تحرير الرسم البياني   2: معادلة

6: القطوع المخروطية   1: $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x{\cdot}y+c{\cdot}y^2+d{\cdot}x+e{\cdot}y+f=0$



- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة لمنحنى القطع الزائد.



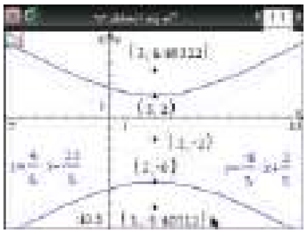
- حدِّد خصائص القطع الزائد بالضغط على ، ثم اختيار

6: تحليل الرسم البياني ومنها 7: تحليل القطوع المخروطية

ثم اضغط على مفتاح كل خاصية من خصائص القطع الزائد:

1: المركز   6: الخطوط المقاربة   2: الرؤوس

3: البؤرة



- قارن بين الناتج وتمثيلك السابق، وذلك باختبار النقاط وخطَّي التقارب.

✓ تحقق من فهمك

2A) $4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$

2B) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0$

الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (350 - 415)

كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولونيوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طوَّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

يمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلوماتٍ كافيةً.

مثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

بما أنّ إحداثيَّي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a, b, c .

المركز: $\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) = (-3, -2)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

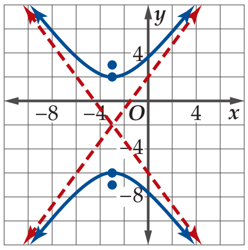
$a = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-6-(-2))^2} = 4$ المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$c = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (3-(-2))^2} = 5$ المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$b = 3$ $c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. انظر الشكل 4.3.1 .



الشكل 4.3.1

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = 2x - 12$, $y = -2x + 12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (-6, 0)$ نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

$a = 3$ المسافة بين أي من الرأسين والمركز

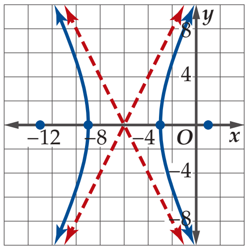
ميلا خطي التقارب: $\pm\frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a} = 2$ الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ $a = 3$

$b = 6$ بسّط

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ، انظر الشكل 4.3.2 .



الشكل 4.3.2

✓ تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3B) البؤرتان $(12, -2)$, $(2, -2)$ ، وخطا التقارب $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$, $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$.

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1 ، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 48 + 36$ $a^2 = 48, b^2 = 36$

$c = \sqrt{84}$ بسّط

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$ $a = \sqrt{48}, c = \sqrt{84}$

≈ 1.32 بسّط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من فهمك ☑

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

4B) $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد.

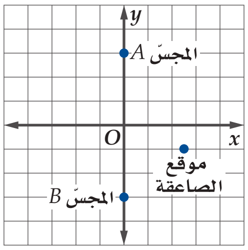
مثال 5 من واقع الحياة تطبيقات على القطع الزائد

أرصاد : يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km ، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B . ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجس B .

الربط مع الحياة

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.



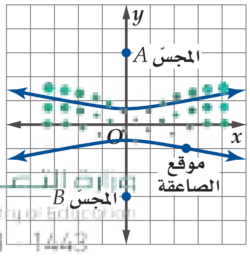
حدّد موقع المجسّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسين، وأقرب إلى المجس B ، فإن موقعها في الربع الرابع.

المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا 3 $= c$. تذكَّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو $2a$ ، وبما أنّ بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5 km على بعدها عن المجس B ، فإن $2a = 1.5$ ، أي أن $a = 0.75$. استعمل قيمتي a و c لتجد b .

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3^2 = 0.75^2 + b^2$ $c = 3 , a = 0.75$

$8.4375 = b^2$ بسّط



المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل. لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. وعند تعويض قيمتي a^2, b^2 تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$. أي أن موقع الصاعقة يمثِّل نقطة على منحنى القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$.

b) **أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.**

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسين فإنّ $x = 2.5$ ، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A ، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي. عوّض قيمة x في المعادلة، وأوجد y .

المعادلة الأصلية $$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$$

$x = 2.5$ $$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1$$

حل بالنسبة لـ y $$y \approx \pm 0.99$$

وحيث إن موقع الصاعقة في الربع الرابع، لذا فإن قيمة y هي -0.99 تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة هو $(2.5, -0.99)$.

☑ تحقق من فهمك

5) **ملاحة بحرية :** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًا .

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(-100, 0)$, $(100, 0)$.

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$.

تدرب وحل المسائل

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: **(مثال 1)**

1) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

2) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

3) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

4) $\frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64} = 1$

5) $3x^2 - 2y^2 = 12$

6) $3y^2 - 5x^2 = 15$

7) **إضاءة :** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا. **(مثال 1)**

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًّا: **(مثال 2)**

8) $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

9) $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

10) $-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$

11) $9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$

12) $16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: **(مثال 3)**

13) البؤرتان $(-1, -7)$, $(-1, 9)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

14) الرأسان $(-5, 5)$, $(7, 5)$ ، والبؤرتان $(-9, 5)$, $(11, 5)$.

15) الرأسان $(-1, 3)$, $(-1, 9)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

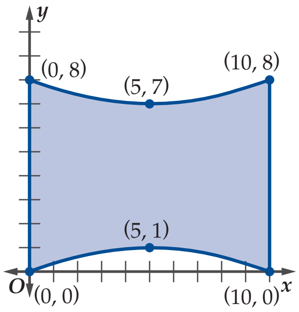
16) البؤرتان $(-17, 7)$, $(9, 7)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

17) المركز $(-7, 2)$ ، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$ ، والمحور القاطع أفقيًّا وطوله 10 وحدات.

18) الرأسان $(2, -2)$, $(2, 10)$ ، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(-1, -2)$, $(13, -2)$.

20) **هندسة معمارية :** يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.



a) اكتب معادلة تمثّل فرعي المنحنى في الشكل.

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثّل 15 ft ، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ **(مثال 3)**

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: **(مثال 4)**

21) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

22) $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$

23) $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

24) $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

27) **طيران :** يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A . وعند لحظة ما كان بُعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بُعدها عن المطار A . **(مثال 5)**

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.

c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة.

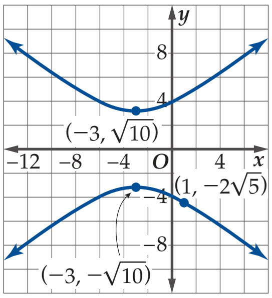
28) **هندسة معمارية :** يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m ، فما معادلة القطع الزائد؟

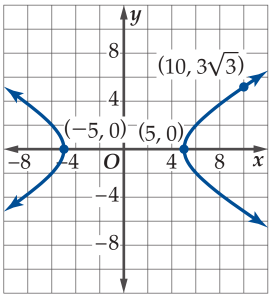
b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m ، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m ، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

اكتب معادلة القطع الزائد الممثَّل بيانيًّا في كل مما يأتي:

29)

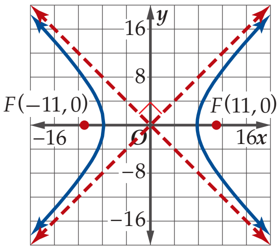


30)



31) **طقس:** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft . إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec ، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec ، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

32) يتشكّل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، و عند كتابة $a = b$ معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد المتطابق الساقين في الشكل المجاور.



33) **تمثيلات متعددة :** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًّا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًّا :** مثِّل منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه .

b) **تحليليًّا** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

c) **تحليليًّا :** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

d) **بيانيًّا :** مثل منحنيي القطعين في الفرع c.

e) **لفظيًّا :** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلةً لقطع زائد يكون فيه طول المحور القاطع يساوي نصف المسافة بين البؤرتين.

35) **تبرير:** افترض أن $rx^2 = -sy^2 - t$ ، حيث r, s, t أعداد ثابتة. صف نوع القطع المخروطي الناتج في كل حالة. واشرح تبريرك.

a) $rs = 0$

b) $rs > 0$

c) $r = s$

d) $rs < 0$

36) **تبرير:** افترض أنك أُعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: *دائمًا أو أحيانًا أو غير ممكن أبدًا*؟

37) **تحدٍّ:** قطع زائد بؤرتاه $F_1(0, 9)$, $F_2(0, -9)$ ، ويمر بالنقطة P . يزيد بعد P عن F_1 بمقدار 6 وحدات على بعد P عن F_2 . اكتب معادلة القطع الزائد بالصيغة القياسية.

38) **برهان:** يتشكل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما $a = b$ عند كتابة المعادلة على الصورة القياسية. برهن أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد متطابق الساقين هو $\sqrt{2}$.

39) **اكتب:** صف خطوات إيجاد معادلة قطع زائد عندما تعطى بؤرتاه وطول محوره القاطع.

مراجعة تراكمية

مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

40) $\displaystyle (x-8)^2 + \frac{(y-2)^2}{81} = 1$

41) $\displaystyle \frac{x^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{49} = 1$

42) $\displaystyle \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1$

43) **مقذوفات:** قُذفت كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s ، بحيث يكون ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية هو $h = -16t^2 + 80t + 5$ قدم. (الدرس 4-1)

a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تبلغه الكرة؟

b) كم تستغرق الكرة من الوقت؛ لتعود مرة أخرى إلى المستوى الذي انطلقت منه؟

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ . (الدرس 3-5)

44) $\tan\theta = \sec\theta - 1$

45) $\sin\theta + \cos\theta = 0$

46) $\csc\theta - \cot\theta = 0$

تدريب على اختبار

47) **مراجعة:** يمثِّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x ,\ y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x ,\ y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x ,\ y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x ,\ y = -\frac{1}{5}x$

48) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

4-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية
Identifying Conic Sections

فيما سبق:

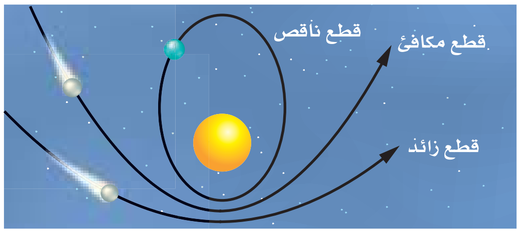
درستُ كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.
(الدروس من 1–4 إلى 3–4)

والآن:

- أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.

لماذا؟

تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثّل مركز الشمس بؤرة للقطع.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية: يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

مثال 1 كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله:

a) $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$

$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$ المعادلة الأصلية

$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$ حلّل وبسّط

$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$ مربع كامل

$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ اقسم كل حدّ على 400

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$

$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$ جمّع الحدود المتشابهة

$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$ أكمل المربع

$(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$ حلّل وبسّط

$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ اقسم كلا الطرفين على 16

بما أنّ المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

✓ تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ على الصورة القياسية، وذلك باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

مراجعة المفردات

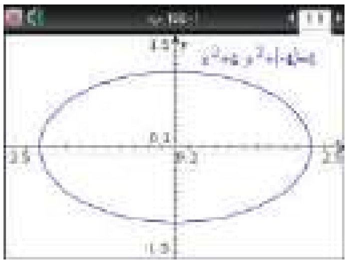
المميز
تذكر أن مميز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو $b^2 - 4ac$.

مفهوم أساسي تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

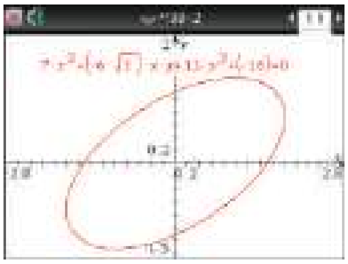
يكون القطع أفقيًا أو رأسيًا عندما $B = 0$، أما إذا كانت $B \neq 0$، فلا يكون القطع أفقيًا ولا رأسيًا.

قطع ناقص أفقي: $B = 0$



$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

قطع ناقص ليس رأسيًا ولا أفقيًا ؛ $B \neq 0$



$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

مثـال 2 تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$

$A = 4, B = -3, C = 1$

المميز يساوي $(-3)^2 - 4(4)(1) = -7$.

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B \neq 0$، فإن المعادلة تمثِّل قطعًا ناقصًا.

b) $3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$

$A = 3, B = 2, C = -5$

المميز يساوي $2^2 - 4(3)(-5) = 64$.

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.

c) $4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$

$A = 0, B = 0, C = 4$

المميز يساوي $0^2 - 4(0)(4) = 0$.

ولأن المميز يساوي صفرًا ، فإن المعادلة تمثِّل قطع مكافئ.

✓ تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2C) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله. (مثال 1)

1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

3) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4) $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

8) $4x^2 - 6y = 8x + 2$

9) $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$

10) $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$

11) $16xy + 8x^2 + 10y^2 - 18x + 8y = 13$

12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام.

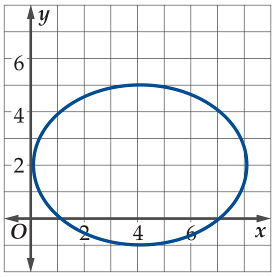
a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟

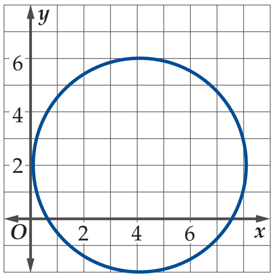
c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثِّل كلًّا منها:

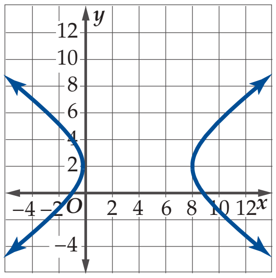
13)



14)



15)



a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

b) $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

c) $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

قابل بين كل حالة في التمارين 19-16 مع المعادلة التي تمثِّلها من a-d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

16) **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft.

17) **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين.

18) **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال.

19) **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها.

20) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

a) **تحليليًا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًا:** حوّل المعادلة في الفرع a إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

21) تبرير: حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحةأحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا .
"عندما يكون القطع رأسيًّا، وتكون $A = C$ ، فإن القطع دائرة".

22) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، بحيث يكون $A = 9C$ ، وتُمثِّل المعادلة قطعًا مكافئًا.

23) اكتب: اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها.

مراجعة تراكمية

24) فلك: افترض أنه يمكن تمثيل مسار مُذَنَّب بفرع من قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$. أوجد كلًّا من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد، ثم مثِّل المعادلة بيانيًّا. (الدرس 4-3)

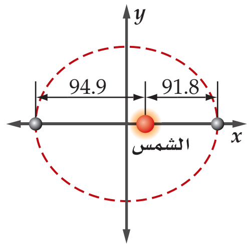
حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (الدرس 4-2)

25) $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$

26) $4x^2 + 8y^2 = 32$

27) $x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0$

28) فلك: أقرب مسافة بين مركز الشمس والأرض في مسار دورانها 91.8 مليون ميل. أما أبعد مسافة فتساوي 94.9 مليون ميل. اكتب معادلة تمثّل مدار الأرض حول الشمس باعتبار أن مركز المدار هو نقطة الأصل، وأن الشمس تقع على المحور x. (الدرس 4-2)



تدريب على اختبار

حُلَّ كلَّ معادلة من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 4-2)

29) $\log_4 8n + \log_4 (n - 1) = 2$

30) $\log_9 9p + \log_9 (p + 8) = 2$

31) سؤال ذو إجابة قصيرة: حدِّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثِّل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

32) اختيار من متعدد: ما المعادلة التي تمثِّل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$ ، ويمر بالنقطة $(0, 6)$ ؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

توسع

4-4

معمل الحاسبة البيانية:
أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية
Systems of Nonlinear Equations and Inequalities

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

الهدف

استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات غير خطية.

معادلات القطوع المخروطية هي معادلات غير خطية، ولا تمثل دوالّ إلا في بعض الحالات. ويمكنك حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire من خلال تمثيل كل معادلة في النظام ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشـاط 1 حل نظام معادلات غير خطية بيانيًا

حلّ نظام المعادلات الآتي بيانيًّا:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$xy + 6 = 0$$

لحل المعادلتين بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة 1: مثل المعادلتين بيانيًّا.

- اضغط على المفاتيح:

menu esc on ثم اختيار 3: إدخال / تحرير الرسم البياني

2: معادلة 6: القطوع المخروطية

1: $a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$

- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الأولى.
- اضغط tab واكتب المعادلة الثانية ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الثانية.

الخطوة 2: إيجاد نقاط التقاطع.

- استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحلول بالضغط على menu ثم اختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم 4: نقاط التقاطع واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقطة من نقاط التقاطع، ستظهر الأزواج المرتبة الممثلة لنقاط التقاطع الأربع؛

أي أن الحلول هي: $(-3, 2), (-2, 3), (2, -3), (3, -2)$

تمارين:

حلّ كل نظام معادلات فيما يأتي بيانيًا مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $xy = 2$
$x^2 - y^2 = 3$

2) $49 = y^2 + x^2$
$x = 1$

3) $x = 2 + y$
$x^2 + y^2 = 100$

4) $25 - 4x^2 = y^2$
$2x + y + 1 = 0$

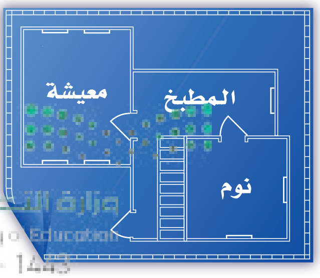
5) $y^2 = 9 - 3x^2$
$x^2 = 10 - 2y^2$

6) $y = -1 - x$
$4 + x = (y - 1)^2$

7) **تحدّ:** يحتوي جناح في منزل على غرفتين مربعتين؛ غرفة معيشة وغرفة نوم، والمساحة الكلية للغرفتين هي $468\,ft^2$، ومساحة غرفة النوم أصغر من مساحة غرفة المعيشة بمقدار $180\,ft^2$.

a) اكتب نظامًا من معادلات تربيعية يمثل معطيات هذا الموقف.

b) مثّل نظام المعادلات بيانيًا، وقدّر طول كل غرفة.



كذلك يمكنك حل أنظمة المتباينات غير الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، وقد مرّ معك في صفٍّ سابقٍ أنه يمكنك تمثيل المتباينات غير الخطية بيانيًّا، وذلك بكتابة كل متباينة بدلالة y.

نشاط 2 حل نظام متباينات غير خطية

حلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$$x^2 + y^2 \le 36$$
$$y - x^2 > 0$$

الخطوة 1: اكتب كل متباينة بدلالة y .

$$y > x^2, y \le \sqrt{36 - x^2}, y \ge -\sqrt{36 - x^2}$$

الخطوة 2: افتح الحاسبة بالضغط على on .

اختر من الشاشة الظاهرة 1 مستند جديد

ثم اختر من الشاشة الظاهرة 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية

الخطوة 3: اكتب المتباينة الأولى $y > x^2$ ، وذلك بالضغط على مفتاح del ، ثم اختر رمز التباين $>$ مستعملًا الأسهم، فتظهر $y >$ ، أكمل كتابة المتباينة، ثم اضغط enter .

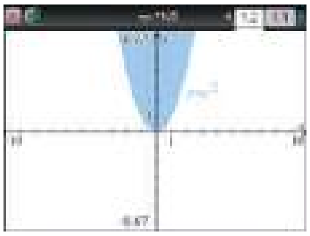
الخطوة 4: اكتب المتباينة الثانية $y \le \sqrt{36 - x^2}$ بالضغط على المفتاح tab ثم المفتاح del ، ثم اختر رمز التباين $\le$ مستعملًا الأسهم، ستظهر $y \le$ ، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter ثم اضغط على المفتاح tab وتمثيل المتباينة $y \ge -\sqrt{36 - x^2}$ ، ستكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

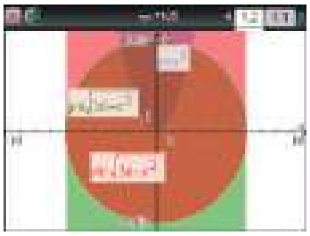
أي قم بالضغط على المفاتيح:

del $>$ x^2 enter tab del $\le$ ctrl x² $36 - x^2$ enter tab
del $\ge -$ ctrl x² $36 - x^2$ enter

لاحظ نمط التظليل فوق $y = x^2$ ، وتحت $y = \sqrt{36 - x^2}$.
إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنماط التظليل، وهي المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق النظام جميعها.

$$x^2 + y^2 \le 36$$
$$y - x^2 > 0$$

إرشاد تقني

تدريج المحاور

يمتد تدريج الحاسبة التلقائي على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ ، ولكي يتضمن التمثيل البياني للمعادلة $f2(x)$ القيمة $f2(x) = 7$، قم بالضغط على مفتاح menu، ومنها اختيار 4: تكبير/تصغير النافذة ثم اختيار 1: إعدادات النافذة

وليمتد تدريج المتغير y ليتضمن العدد 7 ، يمكن اختيار قيمة القيمة العظمى لـ Y : 10

إرشاد تقني

لون التظليل

يمكن تغيير لون التظليل الذي يمثل منطقة حل المتباينة بالضغط على menu ctrl، ثم اختيار B: اللون ومنها 1: لون السطر أو 2: لون التعبئة أو كلاهما، وذلك حتى يكون لون منطقة الحل مميزًا عن لون تظليل كل متباينة من نظام المتباينات.

تمارين:

حُلَّ كل نظام متباينات فيما يأتي بيانيًّا:

8) $2y^2 \le 32 - 2x^2$
$x + 4 \ge y^2$

9) $y + 5 \ge x^2$
$9y^2 \le 36 + x^2$

10) $x^2 + 4y^2 \le 32$
$4x^2 + y^2 \le 32$

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القطوع المكافئة (الدرس 1-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأس	البؤرة
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	أفقي	(h, k)	$(h+c, k)$
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	رأسي	(h, k)	$(h, k+c)$

- تحدد قيمة p موقع البؤرة .

القطوع الناقصة والدوائر (الدرس 2-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 - b^2 = c^2$.
- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

القطوع الزائدة (الدرس 3-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الزائد هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 + b^2 = c^2$.

تحديد أنواع القطوع المخروطية (الدرس 4-4)

- يمكن تحديد أنواع القطوع المخروطية بكتابة معادلاتها العامة بالصورة القياسية إن أمكن، أو باستعمال المميز.

المفردات

القطع المخروطي ص 172
المحل الهندسي ص 172
القطع المكافئ ص 172
البؤرة ص 172
الدليل ص 172
محور التماثل ص 172
الرأس ص 172
الوتر البؤري ص 172
القطع الناقص ص 180
البؤرتان ص 180
المحور الأكبر ص 180

المركز ص 180
المحور الأصغر ص 180
الرأسان ص 180
الرأسان المرافقان ص 180
الاختلاف المركزي ص 180
القطع الزائد ص 189
البؤرتان ص 189
المركز ص 189
الرأسان ص 189
المحور القاطع ص 189
المحور المرافق ص 189

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ________ هو الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما ، بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

2) الدائرة هي ________ للنقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن نقطة معطاة.

3) يكون ________ القطع المكافئ عموديًا على محور تماثله.

4) يقع الرأسان المرافقان في ________ على محوره الأصغر، بينما يقع الرأسان على محوره الأكبر.

5) مجموع بعدي نقطة واقعة على منحنى القطع الناقص عن ________ يساوي مقدارًا ثابتًا .

6) ________ للقطع الناقص هو نسبة تحدِّد ما إذا كان شكل منحناه متسعًا أو دائريًّا، ويمكن إيجاده باستعمال النسبة $\frac{c}{a}$.

7) ________ الدائرة هو نقطة تبعد عنها جميع نقاط الدائرة بعدًا ثابتًا.

8) كما يوجد للقطع الناقص رأسان وبؤرتان فإن لـ ________ الشيء نفسه، لكن له خطي تقارب، ومنحناه مكوّن من جزئين

مراجعة الدروس

4-1 القطوع المكافئة (الصفحات 172 - 179)

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

9) $(x+3)^2 = 12(y+2)$

10) $(x-2)^2 = -4(y+1)$

11) $(x-5) = \frac{1}{12}(y-3)^2$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

12) $F(1, 1)$, $V(1, 5)$

13) $F(-3, 6)$, $V(7, 6)$

14) $F(-2, -3)$, $V(-2, 1)$

15) $F(3, -4)$, $V(3, -2)$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

16) $F(-4, -4)$ والمنحنى المفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(-7, 0)$

17) $F(-1, 4)$ والمنحنى المفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة $(7, -2)$

18) $F(3, -6)$ والمنحنى المفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة $(9, 2)$

مثال 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

بما أن البؤرة والرأس يشتركان في الإحداثي x، فإن المنحنى رأسي. البؤرة هي $(h, k+p)$، لذلك فإن قيمة p هي 4 = $1-(-3)$. وبما أن p قيمة موجبة، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

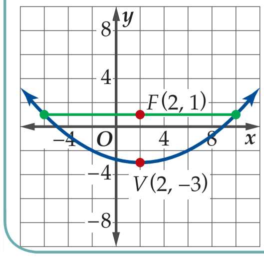
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال القيم h, p, k .

$$4p(y-k) = (x-h)^2$$ الصورة القياسية

$$4(4)(y+3) = (x-2)^2$$ $p = 4, k = 3, h = 2$

$$16(y+3) = (x-2)^2$$ بسّط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-2)^2 = 16(y+3)$. مثّل بيانيًّا كلًّا من الرأس والبؤرة والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس، ويمتد مارًّا بكلا طرفي الوتر البؤري.



4-2 القطوع الناقصة والدوائر (الصفحات 180 - 187)

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍ مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

19) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

20) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

21) الرأسان $(3, -3)$, $(7, -3)$ ، والبؤرتان $(4, -3)$, $(6, -3)$

22) البؤرتان $(9, 2)$, $(1, 2)$ ، وطول المحور الأصغر يساوي 6 وحدات.

23) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(6, 4)$, $(-4, 4)$ و إحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(1, 7)$, $(1, 1)$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحالات الآتية:

24) المركز $(-1, 6)$، وطول نصف القطر 3 وحدات.

25) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(0, 0)$, $(2, 5)$.

26) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(-2, -6)$, $(4, -2)$

مثال 2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات نهايتي محوره الأكبر $(11, 4)$, $(-9, 4)$ و إحداثيات نهايتي محوره الأصغر $(1, -4)$, $(1, 12)$.

استعمل نهايات المحورين الأكبر والأصغر لتحديد a , b .

نصف طول المحور الأكبر

$$a = \frac{11-(-9)}{2} = 10$$

نصف طول المحور الأصغر

$$b = \frac{12-(-4)}{2} = 8$$

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحور الأكبر.

$$(h, k) = \left(\frac{11+(-9)}{2}, \frac{12+(-4)}{2}\right)$$ قانون نقطة المنتصف

$$= (1, 4)$$ بسّط

الإحداثيان y لنقطتي نهايتي المحور الأكبر متساويان؛ لذلك فإن المحور الأكبر أفقي، وقيمة a مرتبطة بالمتغير x. لذا فإن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$$

الفصل

4 دليل الدراسة و المراجعة

4-3 القطوع الزائدة (الصفحات 189 - 197)

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

(27 $\frac{(y+3)^2}{30}-\frac{(x-6)^2}{8}=1$

(28 $\frac{(x+7)^2}{18}-\frac{(y-6)^2}{36}=1$

(29 $\frac{(y-1)^2}{4}-(x+1)^2=1$

(30 $x^2-y^2-2x+4y-7=0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(31 الرأسان $(-7, 0)$ ، $(7, 0)$ ، طول المحور المرافق 8.

(32 البؤرتان $(0, -5)$ ، $(0, 5)$ ، والرأسان $(0, -3)$ ، $(0, 3)$.

(33 البؤرتان $(1, -5)$ ، $(1, 15)$ ، وطول المحور القاطع 16.

(34 الرأسان $(-2, 0)$ ، $(2, 0)$ ، وخطا التقارب $y=\pm\frac{3}{2}x$.

مثال 3

مثّل معادلة القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$ **بيانيًّا.**

في هذه المعادلة: $h=-1\,, k=-3, a=\sqrt{16}=4,$

$b=\sqrt{4}=2, c=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

حدِّد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: راسي

المركز: $(-1, -3)$ (h, k)

الرأسان: $(-1, 1), (-1, -7)$ $(h, k\pm a)$

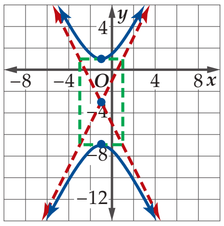
البؤرتان: $(-1, -3+2\sqrt{5})$ $(h, k\pm c)$

$(-1, -3-2\sqrt{5})$

خطا التقارب: $y+3=2(x+1)$ $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

وَ $y+3=-2(x+1)$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية (الصفحات 198 - 201)

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

(35 $x^2-4y^2-6x-16y-11=0$

(36 $4y^2-x-40y+107=0$

(37 $9x^2+4y^2+162x+8y+732=0$

مثال 4

اكتب المعادلة $3x^2+3y^2-12x+30y+39=0$ **على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله.**

$$3x^2+3y^2-12x+30y+39=0$$

$$3(x^2-4x+{\color{purple}\blacksquare})+3(y^2+10y+{\color{cyan}\blacksquare})=-39+3({\color{purple}\blacksquare})+3({\color{cyan}\blacksquare})$$

$$3(x^2-4x+{\color{purple}4})+3(y^2+10y+{\color{cyan}25})=-39+3({\color{purple}4})+3({\color{cyan}25})$$

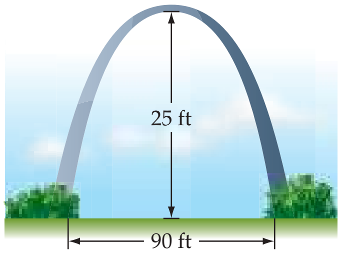
$$3(x-2)^2+3(y+5)^2=48$$

$$(x-2)^2+(y+5)^2=16$$

بما أن المعادلة على الصورة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ فإنها معادلة دائرة مركزها $(2, -5)$.

تطبيقات ومسائل

38) **أقواس:** يوضح الشكل المجاور قوسًا على شكل قطع مكافئ مقامًا عند بوابة متنزّه. **(الدرس 4-1)**



a) اكتب معادلة القطع المكافئ التي يمكن أن يمثّلها هذا القوس بصورة تقريبية.

b) أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ.

39) **حركة الماء:** أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموّجات على شكل دوائر متسعة متحدة المركز. افترض أن أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل 3 بوصات في الثانية. **(الدرس 4-2)**

a) اكتب معادلة الدائرة المتشكِّلة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضًا أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل.

b) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $x^2 + y^2 = 225$. بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكونت هذه الدائرة؟

40) **طاقة:** تكون أبراج تبريد محطات توليد الطاقة على شكل مجسّم ناشئ عن دوران قطع زائد، والمقطع العرضي لهذا المجسّم هو قطع زائد. **(الدرس 4-3)**

a) اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 ft، وعرضه عند أضيق نقطة 30 ft.

b) إذا زادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه عند أضيق نقطة، فكيف تتأثر معادلة المقطع العرضي له؟

41) **ضوء:** ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكِّلًا قطعًا مخروطيًّا. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$. حدّد نوع القطع. **(الدرس 4-4)**

اختبار الفصل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

1) الرأسان $(-3, -4)$, $(7, -4)$ ، والبؤرتان $(-2, -4)$, $(6, -4)$.

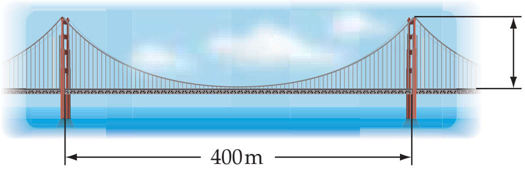
2) البؤرتان $(-2, -9)$, $(-2, 1)$ ، وطول المحور الأكبر 12.

3) **اختيار من متعدد:** ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ دائرةً؟

A -8 **C** 4

B -4 **D** 8

4) **جسور:** يمثّل الشكل أدناه جسرًا معلقًا ، تظهر أسلاكه على شكل قطوع مكافئة .



افترض أن أدنى نقطة لحزمة الأسلاك تقع على ارتفاع 5 m عن سطح الطريق، وأن البؤرة ترتفع عن الرأس مسافة 373 m تقريبًا . اكتب معادلة القطع المكافئ.

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

5) الرأسان $(-3, 0)$, $(3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{2}{3}x$.

6) البؤرتان $(8, 8)$, $(8, 0)$ ، والرأسان $(8, 6)$, $(8, 2)$

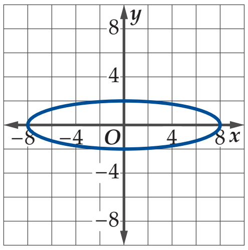
مثّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته في السؤالين 7 وَ 8:

7) $\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

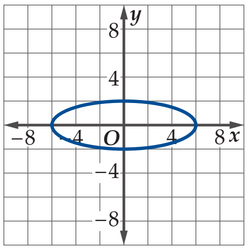
8) $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1$

9) **اختيار من متعدد:** أيّ قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي؟

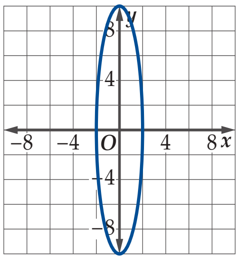
A



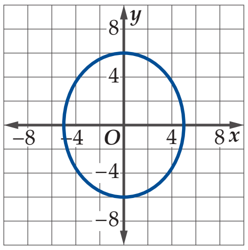
B



C



D



مستعملًا البؤرة *F* والرأس *V*، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا.

10) $F(2, 8)$, $V(2, 10)$

11) $F(2, 5)$, $V(-1, 5)$

مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل من السؤالين الآتيين:

12) $\frac{(x-5)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

13) $(x+3)^2 + \frac{(y+6)^2}{81} = 1$

الصيـغ

العمليات على الدوال

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	**الضرب**	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$

الدوال الأسية واللوغاريتمية

خاصية لوغاريتم القوة	$\log_b x^p=p\log_b x$	**الربح المركب**	$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$
صيغة تغيير الأساس	$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$	**خاصية الضرب في اللوغاريتمات**	$\log_b xy=\log_b x+\log_b y$
خاصية القسمة في اللوغاريتمات	$\log_b \frac{x}{y}=\log_b x-\log_b y$		

القطوع المخروطية

القطع المكافئ	$(y-k)^2=4p(x-h)$ أو $(x-h)^2=4p(y-k)$	**الدائرة**	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ أو $x^2+y^2=r^2$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	**القطع الزائد**	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$	$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$	$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}$
	$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$	$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$	$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec\theta=\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
	$\csc\theta=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\cot\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\cos(-\theta)=\cos\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$	$\sec(-\theta)=\sec\theta$	$\csc(-\theta)=-\csc\theta$

متطابقات المجموع والفرق	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$	$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$
	$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$	$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$
	$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$	$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$	$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$
		$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

الصيغ

الهندسة الإحداثية

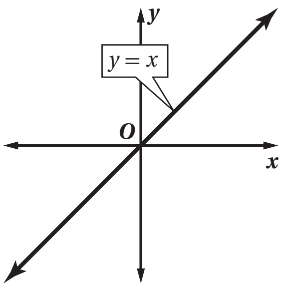
المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	**نقطة المنتصف**	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$		

كثيرات الحدود

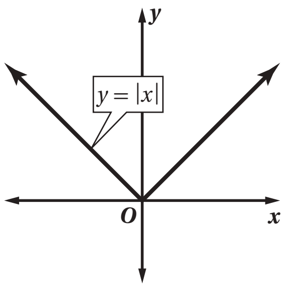
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	**مربع الفرق**	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
مربع المجموع	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	**الفرق بين مربعين**	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

التمثيل البياني للدوال الرئيسة (الأم)

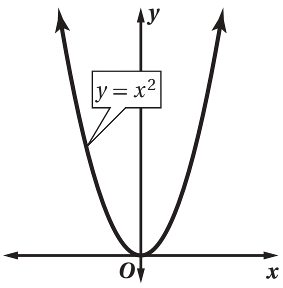
الدالة المحايدة



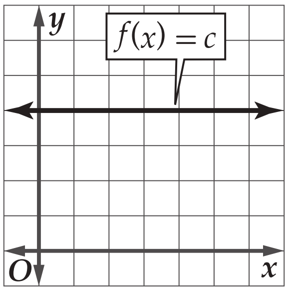
دالة القيمة المطلقة



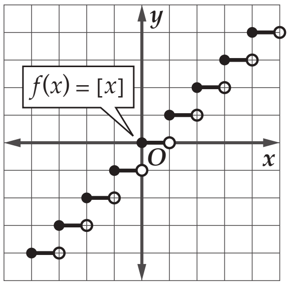
الدالة التربيعية



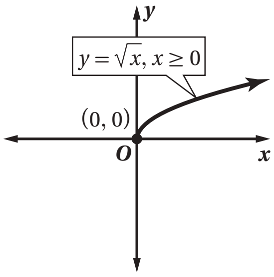
الدالة الثابتة



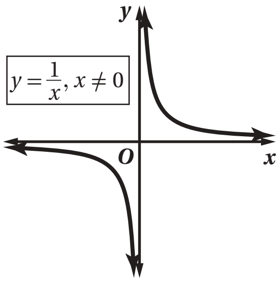
دالة أكبر عدد صحيح



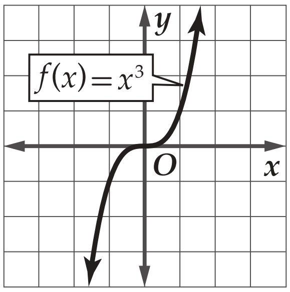
دالة الجذر التربيعي



دالة المقلوب



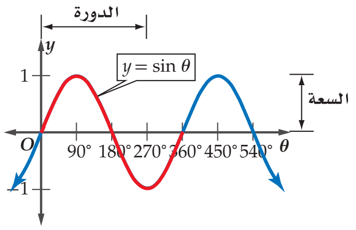
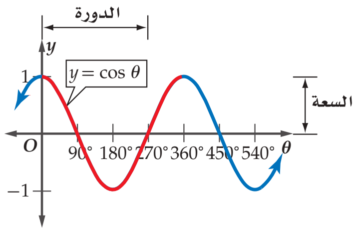
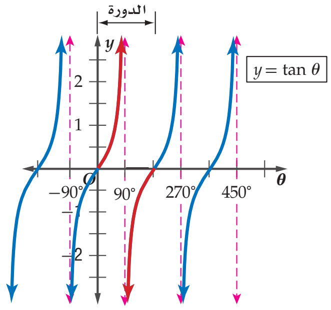
الدالة التكعيبية



قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	**الزاوية**
0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	**sin θ**
−1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	**cos θ**
0	غير معرّف	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	**tan θ**

التمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية

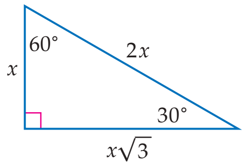
الدالة	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$	$y = \tan\theta$
التمثيل البياني			

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

90°، 60°، 30°

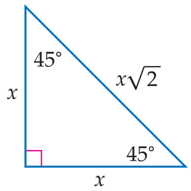
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\qquad \tan 60° = \sqrt{3}$



90°، 45°، 45°

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \tan 45° = 1$

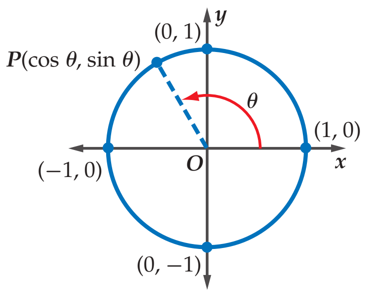


دوال في دائرة الوحدة

إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$،

فإن $\cos\theta = x, \sin\theta = y$، أي أن: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت $\theta = 120°$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$
مصفوفة الوحدة	I
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
الحدث المتمم	A'
احتمال الحدث A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B \mid A)$
عدد تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
عدد توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$sin\ x$
دالة جيب التمام	$cos\ x$
دالة الظل	$tan\ x$
دالة مقلوب الظل	$\cot x$
دالة مقلوب الجيب	$\csc x$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec x$
دالة معكوس الجيب	$\sin^{-1} x$
دالة معكوس جيب التمام	$\cos^{-1} x$
دالة معكوس الظل	$\tan^{-1} x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة المتعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	$\boldsymbol{i}$
تركيب الدالتين f وَ g	$[f \circ g](x)$
الدالة العكسية للدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\mathrm{A}_{m \times n}$
العنصر في الصف i والعمود j من المصفوفة A	a_{ij}
محددة المصفوفة A	$\lvert \mathrm{A} \rvert$
المجال	D
المدى	$\mathcal{R}$