

المنصفات في المثلث

Bisectors of Triangle

فيما سبق:

درست منصف القطعة
المستقيمة ومنصف
الزاوية.

لماذا؟

والآن:

- أعرف الأعمدة المنصف
في المثلثات وأستعملها.
- أعرف منصفات الزوايا
في المثلثات وأستعملها.

المفردات:

العمود المنصف

perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية

concurrent lines

نقطة التلاقي

point of concurrency

مركز الدائرة التي تمر

برؤوس المثلث

circumcenter

مركز الدائرة الداخلية

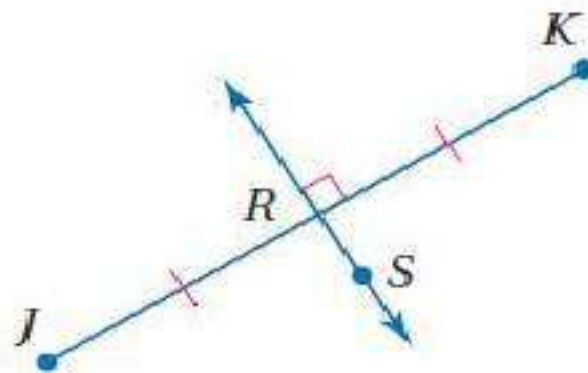
للمثلث

incenter

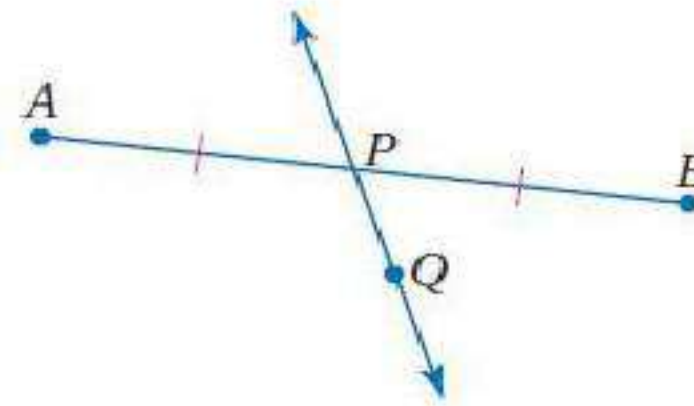


إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما
في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛
وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة
البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كل من
الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال
الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث.

الأعمدة المنصفة: تعلمت سابقاً أن منصف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة
عند نقطة منتصفها. وإذا كان المنصف عمودياً على القطعة سُمي **عموداً منصفاً**.



$\overleftrightarrow{RS}$ عمود منصف لـ $\overline{JK}$

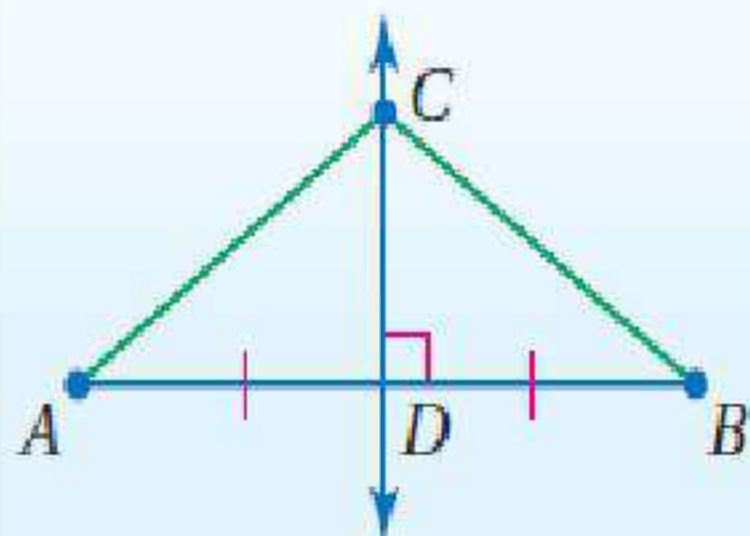


$\overleftrightarrow{PQ}$ منصف لـ $\overline{AB}$

تذكر أن المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطاً معيناً، فالعمود المنصف لقطعة مستقيمة هو المحل
الهندسي لمجموعة نقاط في المستوى تقع كل منها على بُعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة. وهذا
يقود إلى النظريتين الآتيتين:

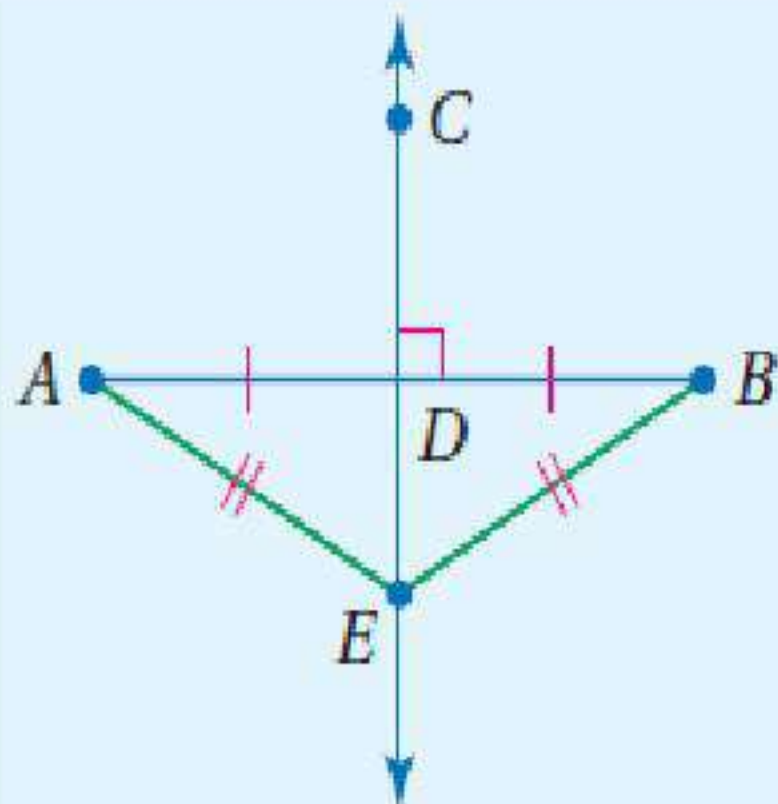
4.1 نظرية العمود المنصف

كل نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة.
مثال: إذا كانت $\overline{CD}$ عموداً منصفاً لـ $\overline{AB}$ ، فإن $AC = BC$.



4.2 عكس نظرية العمود المنصف

كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصف لتلك القطعة.
مثال: إذا كان $AE = BE$ ، فإن E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$ ، وهو العمود المنصف لـ $\overline{AB}$.



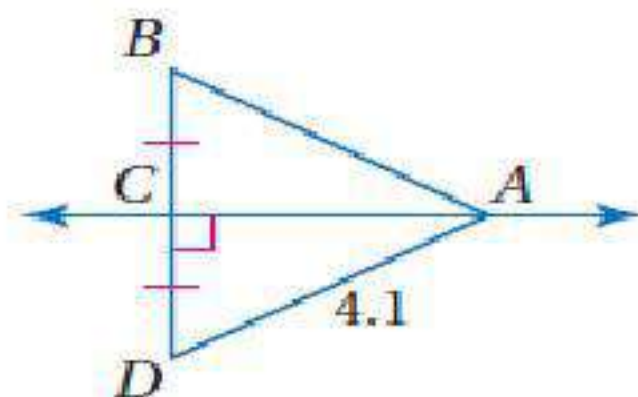
أوجد كل قياس مما يأتي :

(a) AB

من المعطيات في الشكل المجاور ، نعلم أن
 $\vec{CA}$ عمود منصف لـ $\vec{BD}$.

نظرية العمود المنصف $AB = AD$

بالتعويض $AB = 4.1$

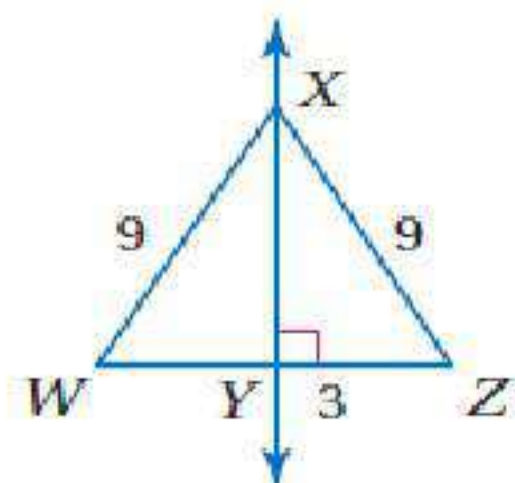


(b) WY

بما أن $WX = ZX$ ، $\vec{XY} \perp \vec{WZ}$ فإن $\vec{XY}$

عمود منصف لـ $\vec{WZ}$ بحسب عكس نظرية العمود المنصف.

ومن تعريف منصف القطعة المستقيمة ينتج أن
 $WY = YZ$. وبما أن $YZ = 3$ ، فإن $WY = 3$.



(c) RT

$\vec{SR}$ عمود منصف لـ $\vec{QT}$.

نظرية العمود المنصف

$RT = RQ$

بالتعويض

$4x - 7 = 2x + 3$

بطرح $2x$ من الطرفين

$2x - 7 = 3$

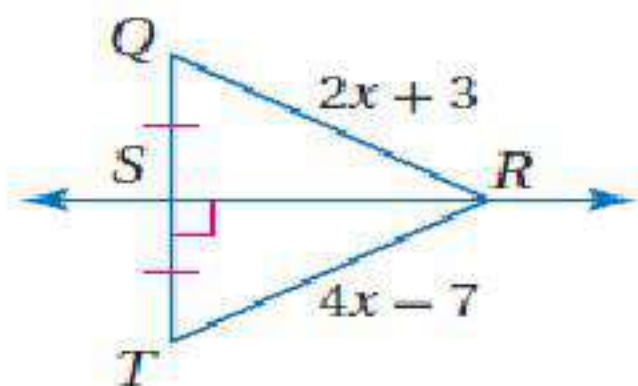
بإضافة 7 إلى الطرفين

$2x = 10$

بقسمة الطرفين على 2

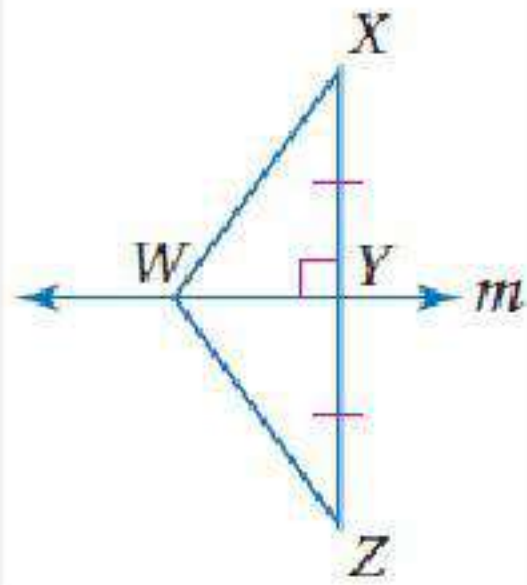
$x = 5$

إذن $RT = 4(5) - 7 = 13$



تحقق من فهمك

(1A) إذا كان $WX = 25.3$, $YZ = 22.4$, $WZ = 25.3$ ، فأوجد طول XY .



22.4

(1B) إذا كان m عموداً منصفاً لـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$ ، فأوجد طول WX .

14.9

(1C) إذا كان m عموداً منصفاً لـ $\overline{XZ}$ ، $WX = 4a - 15$ ، $WZ = a + 12$ ، فأوجد طول $\overline{WX}$.

21

العمود المنصف

ليس من الضروري أن

يمر العمود المنصف

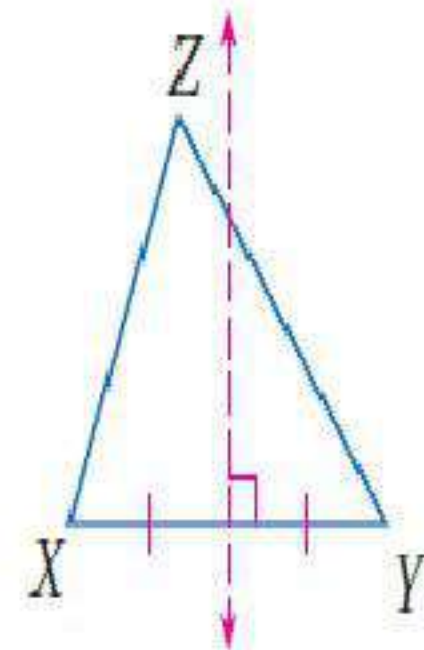
بضلع مثلث برأس

المثلث المقابل .

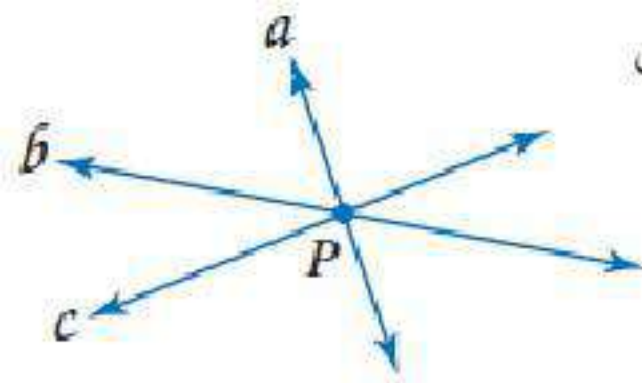
فمثلًا في $\triangle XYZ$ أدناه

العمود المنصف لـ $\overline{XY}$

لا يمر بالرأس Z .



عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة فإن هذه المستقيمات تسمى مستقيمات متلاقية. وتسمى النقطة التي تلتقي فيها المستقيمات **نقطة التلاقي**. وبما أن لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإن له ثلاثة أعمدة منصفة. وهذه الأعمدة المنصفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصفة **بمركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث**.



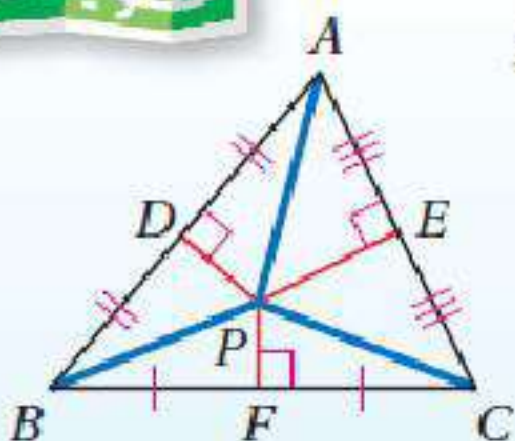
تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P .

نظرية 4.3

نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصفة لأضلاع مثلث في نقطة تسمى مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعاد متساوية من الرؤوس.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$ ، فإن $PA = PB = PC$.

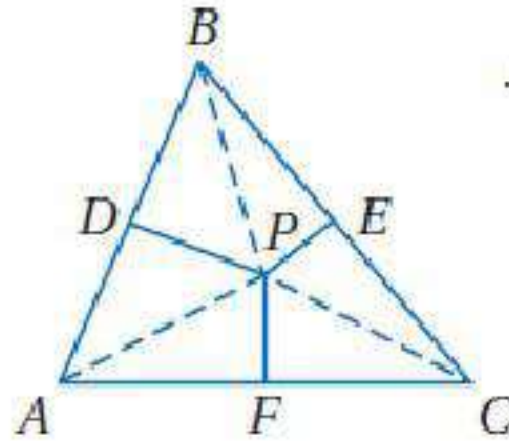


نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

المعطيات: PD, PF, PE أعمدة منصفة للأضلاع AB, AC, BC على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

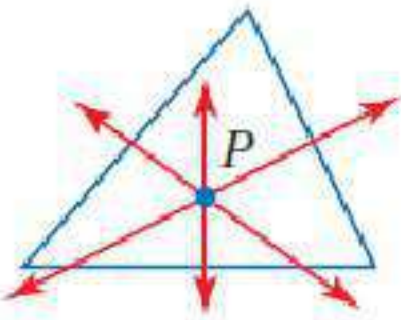
برهان حر:



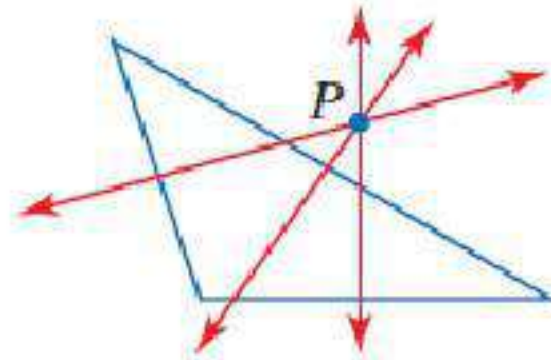
بما أن P تقع على العمود المنصف لـ AC فإنها متساوية البعد عن A, C . وبحسب تعريف تساوي البعد يكون $AP = CP$. والعمود المنصف لـ BC يمر أيضًا بالنقطة P . لذلك يكون $CP = BP$ ، وتبعًا لخاصية التعدي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$ ؛ إذن $AP = CP = BP$.

أضف إلى مطوبتك

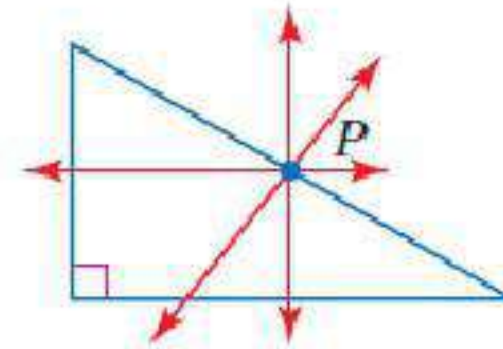
يمكن أن يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزاوية

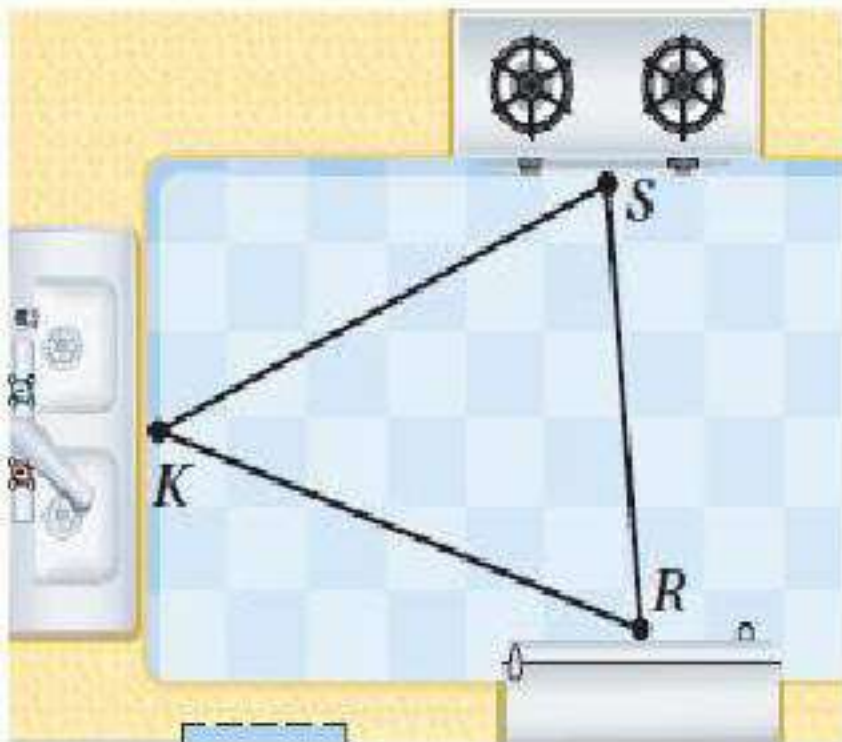


مثلث قائم الزاوية



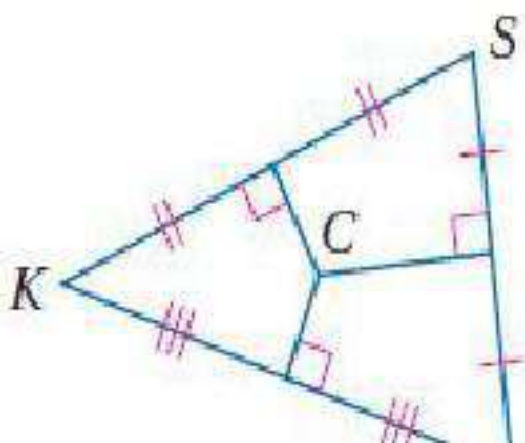
استعمال نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

مثال 2 من واقع الحياة



تصميم داخلي: وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R .

بحسب نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المتصفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.



انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المتصفة لأضلاعه، فتكون النقطة C مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle SKR$. وهي النقطة المطلوبة.

الربط مع الحياة

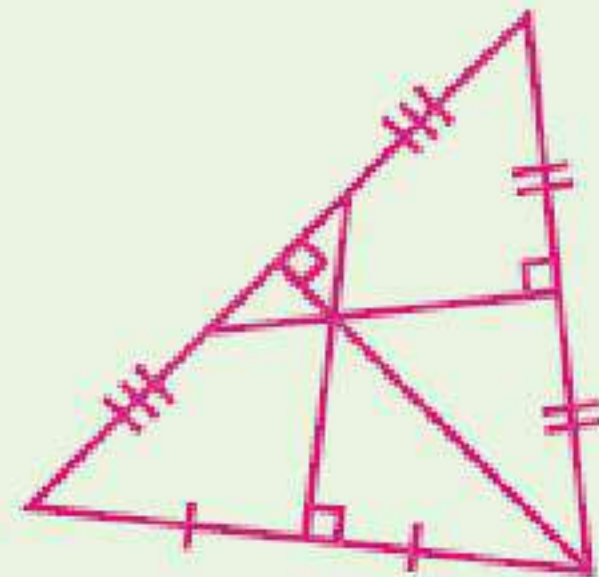
يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاث مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب أن لا يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتار.

تحقق من فهمك

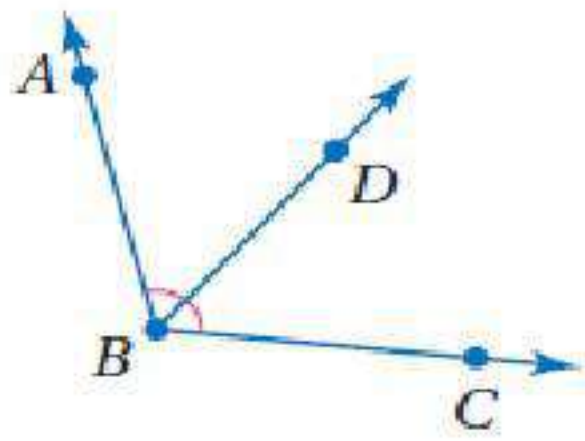
(2) يريد علي أن يضع مرشّة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقة المثلثة الشكل .
فأين يتعين عليه وضع المرشّة؟



(2) يتعين على علي وضع المرشّ عند مركز الدائرة
الخارجية للمثلث الذي يمثل شكل الحديقة.



منصفات الزوايا: تعلم أن منصف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين. ويمكن أن يكون منصف الزاوية مستقيمًا أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم. كما يمكن أن يوصف منصف الزاوية بأنه المحل الهندسي للنقاط الواقعة داخل الزاوية، وتكون على أبعاد متساوية من ضلعيها. ويقود هذا الوصف إلى النظريتين الآتيتين.



$\overrightarrow{BD}$ منصف $\angle ABC$.

نظريتان

منصفات الزوايا

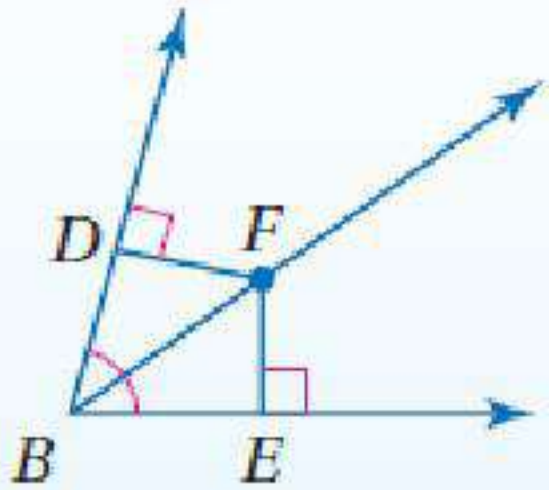
أضف إلى

مطويتك

4.4 نظرية منصف الزاوية

كل نقطة تقع على منصف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

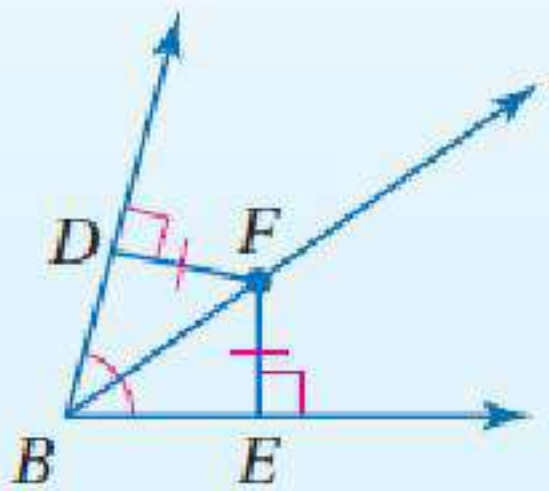
مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصفًا لـ $\angle DBE$ ، وكان $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ فإن $DF = FE$.



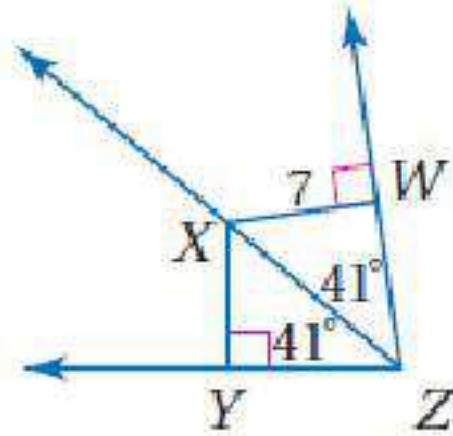
4.5 عكس نظرية منصف الزاوية

كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ ، $DF = FE$ فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$.



أوجد كل قياس مما يأتي :



(a) XY

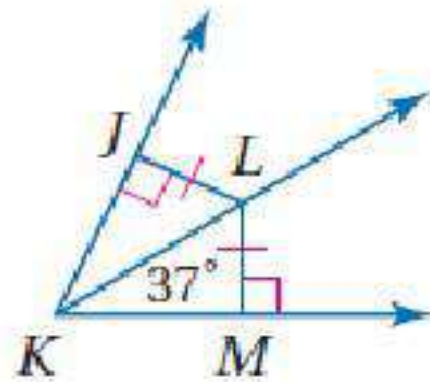
نظرية منصف الزاوية

$$XY = XW$$

بالتعويض

$$XY = 7$$

(b) $m\angle JKL$



بما أن $\overline{LJ} \perp \overline{KM}$, $\overline{LM} \perp \overline{KM}$, $\overline{LJ} = \overline{LM}$ فإن L على بعدين متساويين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظرية منصف الزاوية، فإن $\overline{KL}$ ينصف $\angle JKM$.

تعريف منصف الزاوية

$$\angle JKL \cong \angle LKM$$

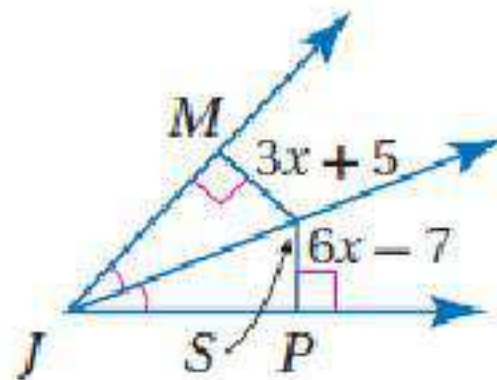
تعريف الزوايا المتطابقة

$$m\angle JKL = m\angle LKM$$

بالتعويض

$$m\angle JKL = 37^\circ$$

(c) SP



نظرية منصف الزاوية

$$SP = SM$$

بالتعويض

$$6x - 7 = 3x + 5$$

نطرح $3x$ من الطرفين

$$3x - 7 = 5$$

بإضافة 7 إلى الطرفين

$$3x = 12$$

بقسمة الطرفين على 3

$$x = 4$$

$$\text{إذن } SP = 6(4) - 7 = 17$$

تحقق من فهمك

(3A) إذا كان: $BC = 5$, $DC = 5$, $m\angle BAC = 38^\circ$, فأوجد $m\angle DAC$

38°

(3B) إذا كان: $DC = 10$, $m\angle DAC = 40^\circ$, $m\angle BAC = 40^\circ$, فأوجد BC

10

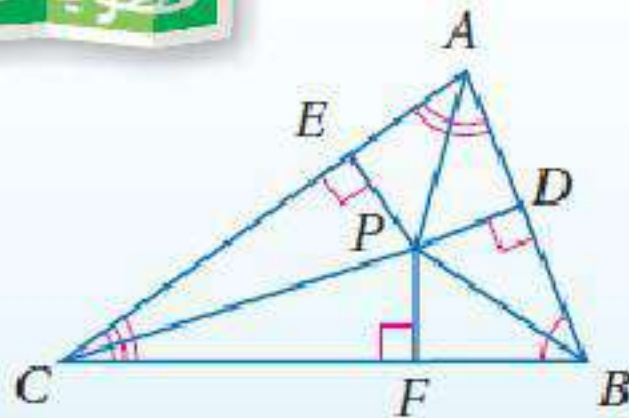
(3C) إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle DAB$ ، و $BC = 4x + 8$, $DC = 9x - 7$ فأوجد BC

20

نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

التعبير اللفظي: تتقاطع منصفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمى مركز الدائرة الداخلية للمثلث وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

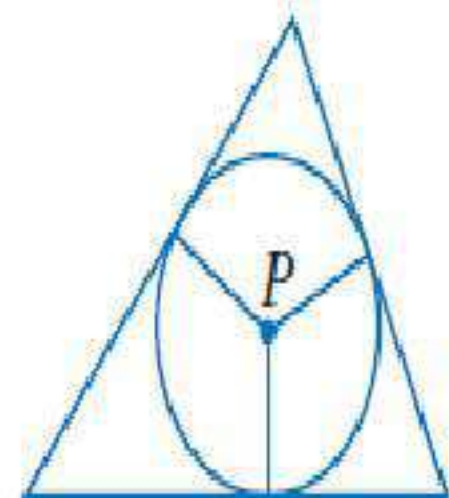
مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC ، فإن $PD = PE = PF$.



مركز الدائرة

الداخلية للمثلث

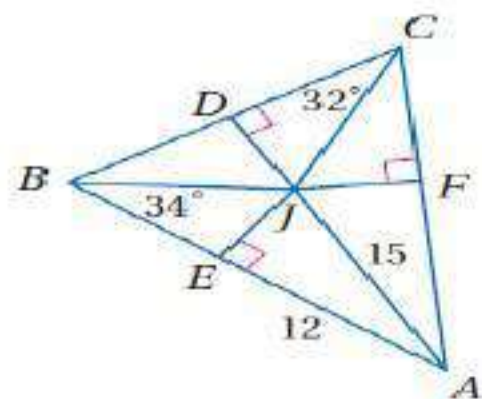
هو مركز الدائرة التي تقطع (تماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع دائماً داخل المثلث.



استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

مثال 4

أوجد كلاً من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$. JF (a)



بما أن J على أبعاد متساوية من أضلاع $\triangle ABC$ بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فإن $JF = JE$ ؛ لذا أوجد JE باستعمال نظرية فيثاغورس.

نظرية فيثاغورس

$$a^2 + b^2 = c^2$$

بالتعويض

$$JE^2 + 12^2 = 15^2$$

$$12^2 = 144, 15^2 = 225$$

$$JE^2 + 144 = 225$$

ب طرح 144 من الطرفين

$$JE^2 = 81$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$JE = \pm 9$$

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالباً؛ لذا تأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط. وبما أن $JE = JF$ فإن $JF = 9$.

 $\angle JAC$ (b)

بما أن $\overrightarrow{BJ}$ ينصف $\angle CBE$ ، فإن $m\angle CBE = 2m\angle JBE$ ؛ إذن $m\angle CBE = 2(34^\circ) = 68^\circ$ ، وبالمثل؛ $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$ ؛ إذن $m\angle DCF = 2(32^\circ) = 64^\circ$.

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180^\circ$$

$$m\angle CBE = 68^\circ; m\angle DCF = 64^\circ$$

$$68^\circ + 64^\circ + m\angle FAE = 180^\circ$$

بالتبسيط

$$132^\circ + m\angle FAE = 180^\circ$$

ب طرح 132 من الطرفين

$$m\angle FAE = 48^\circ$$

وبما أن $\overrightarrow{AJ}$ ينصف $\angle FAE$ ، فإن $2m\angle JAC = m\angle FAE$ ، وهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2}m\angle FAE$ ، إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(48^\circ) = 24^\circ$.

تحقق من فهمك

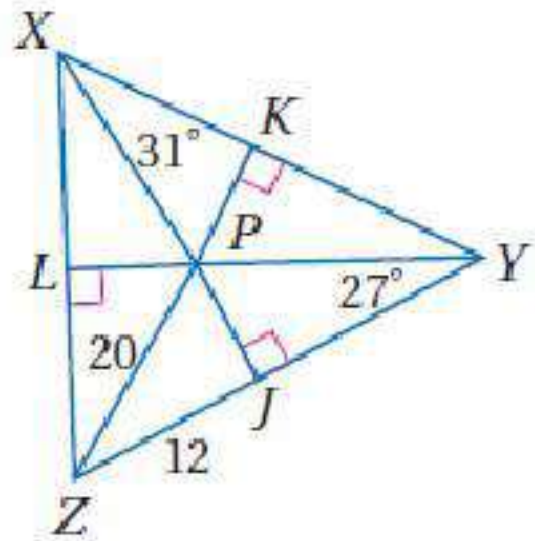
إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$ ، فأوجد القياسين الآتيين:

PK (4A)

18

$\angle L郑$ (4B)

37°



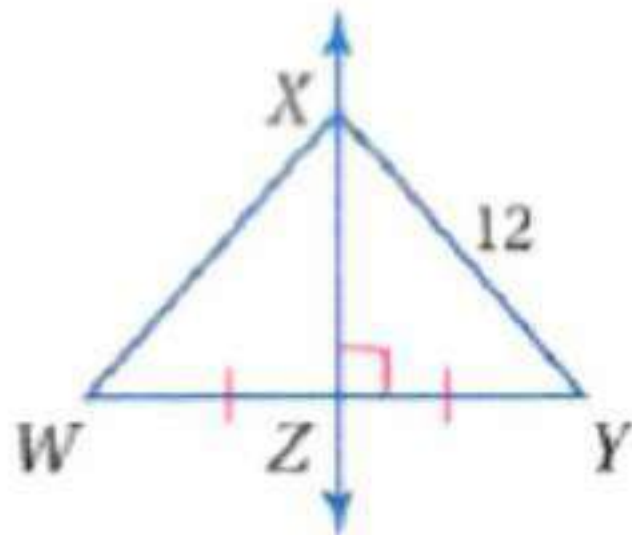
٤-١ المنصفات في المثلث Bisectors of Triangles

تأكد

المثال ١

أوجد قياس كل مما يأتي :

(١) XW



بما أن ZX عمود منصف لـ WY
إذن $12 = WX = XY$ (حسب نظرية العمود المنصف)

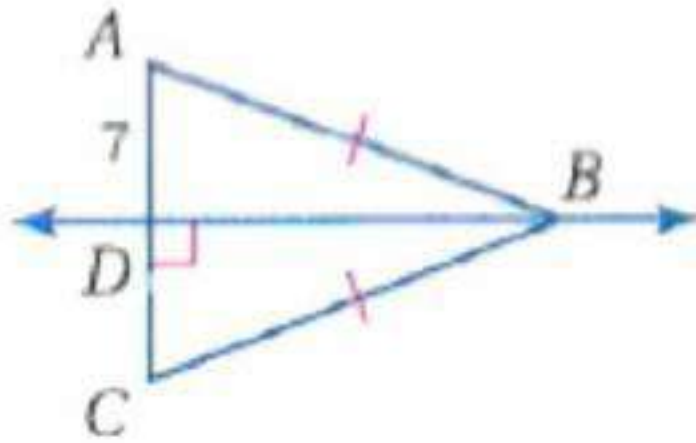
٤-١ المنصفات في المثلث Bisectors of Triangles

لا تأكد

المثال ١

أوجد قياس كل مما يأتي :

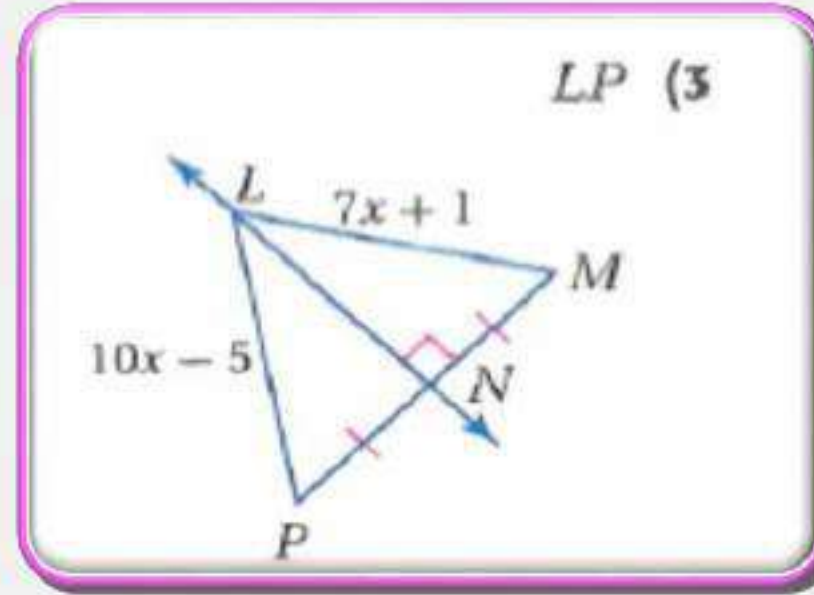
٢ AC



بما أن $AB = BC$ و $BD \perp AC$ إذن BD عمود منصف لـ AC
 إذن $7 = AD = DC$ (حسب عكس نظرية العمود المنصف)
 $14 = 7 + 7 = AD + DC = AC$

أوجد قياس كل مما يأتي :

المثال ١



بما أن LN عمود منصف ل PM إذن $LP = LM$ (نظرية العمود المنصف)

$$10X - 5 = 7X + 1$$

$$10X - 7X = 1 + 5$$

$$3X = 6$$

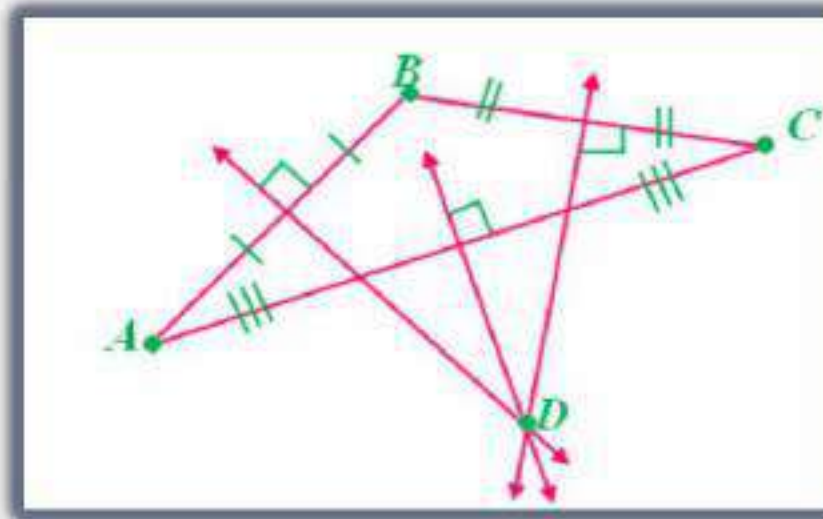
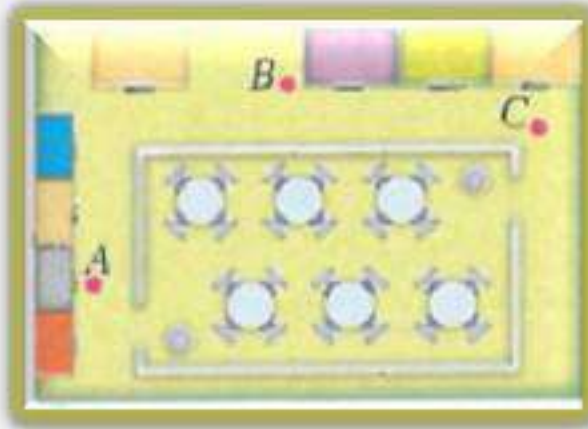
$$X = 2$$

$$LP = 10 \times 2 - 5$$

$$LP = 15$$

المثال ٢

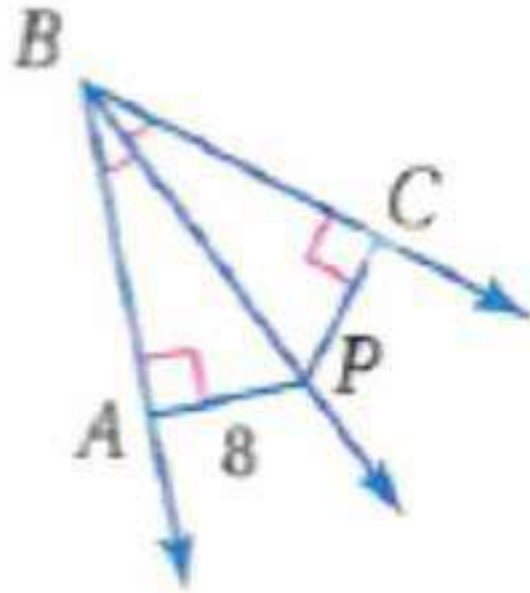
(4) **إعلانات:** يقوم أربعة أصدقاء بتوزيع إعلانات على الناس في ساحة سوق تجاري. فحمل ثلاثة منهم ما يستطيعون من الإعلانات وأخذوا مواقعهم كما في الصورة المجاورة. أما الرابع فكان يزودهم بالإعلانات. انسخ المواقع A, B, C في دفترك، ثم عيّن مكان الصديق الرابع D على أن يكون على أبعاد متساوية من أصدقائه الثلاثة.



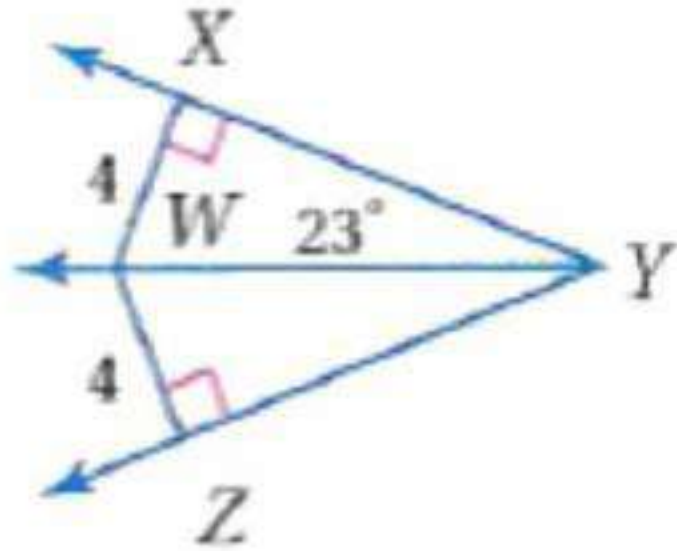
أوجد كل قياس مما يلي

المثال ٣

CP (5)

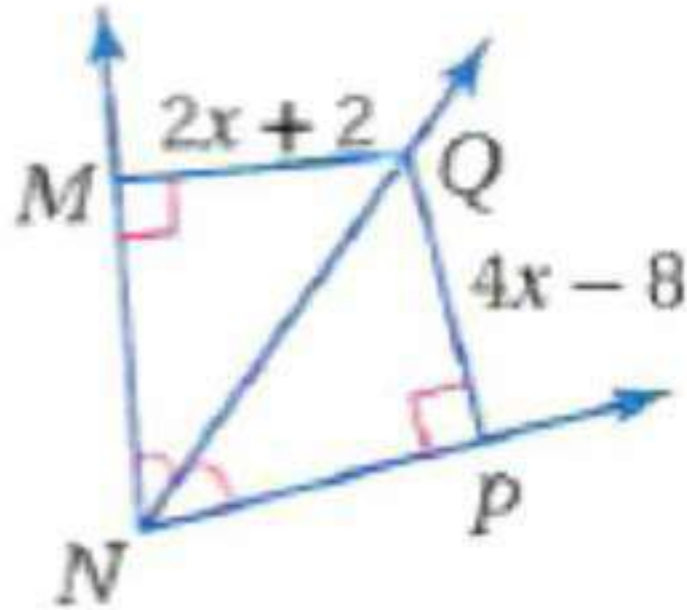


بما أن $\overrightarrow{PB}$ منصفاً لـ $\angle CBA$ و $PA \perp BA$, $PC \perp BC$ (نظرية منصف الزاوية)
فإن $PA = PC = 8$

(6) $\angle WYZ$ 

بما أن $WX = WZ$ و $WZ \perp ZY$ و $WX \perp XY$ فإن $\overline{WY}$ ينصف $\angle XYZ$ (حسب عكس نظرية منصف الزاوية)
 إذن $\angle WYZ = 23^\circ$

QM (7



بما أن $\overline{NQ}$ منصفاً لـ $\angle MNP$ و $QM \perp MN$ ، $QP \perp PN$ (حسب نظرية
 منصف الزاوية)
 فإن $QP = QM$

$$4x - 8 = 2x + 2$$

$$4x - 2x = 2 + 8$$

$$2x = 10$$

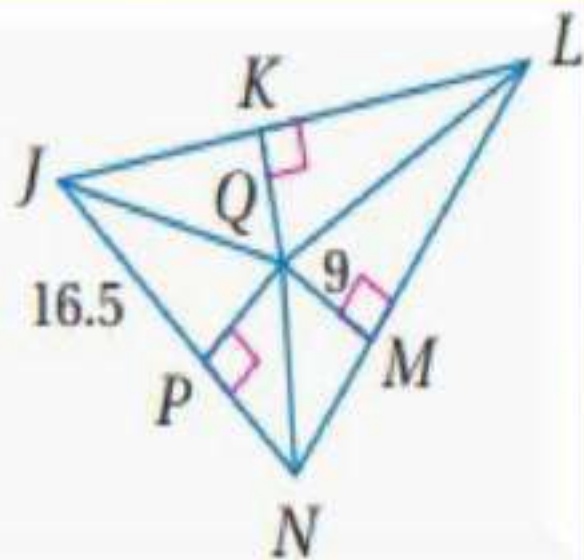
$$x = 5$$

$$QM = 2x + 2 = 2 \times 5 + 2$$

$$QM = 12$$

المثال ٤

(8) إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$ ، فأوجد طول $\overline{JQ}$.



بما أن Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$

إذن $9 = QP = QM = QK$ وبالتالي يمكن حساب JQ بنظرية فيثاغورث.

$$(QJ)^2 = (QP)^2 + (PJ)^2$$

$$(QJ)^2 = (9)^2 + (16.5)^2$$

$$QJ \approx 18.8$$

تدرب وحل المسائل ✓

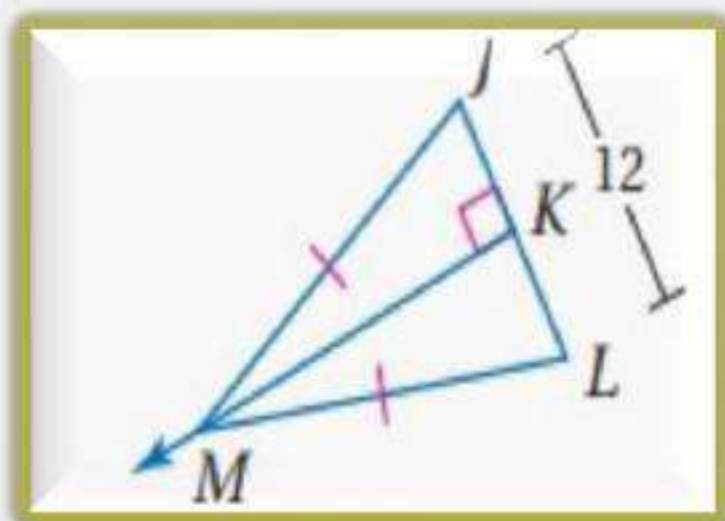
المثال ١

أوجد كل قياس مما يأتي

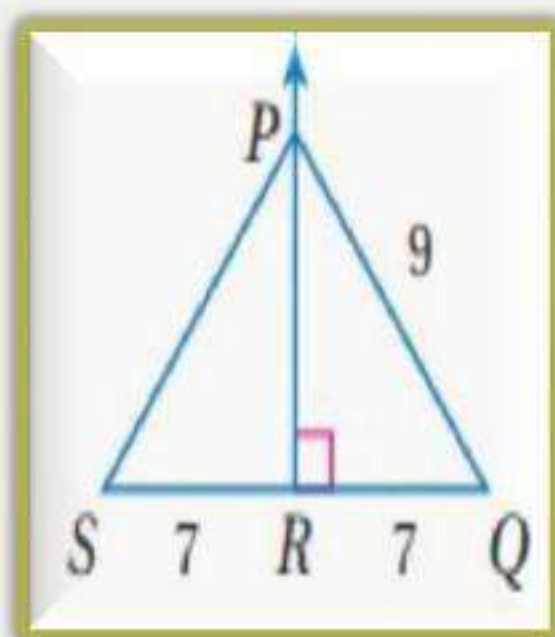
KL (11

PS (10

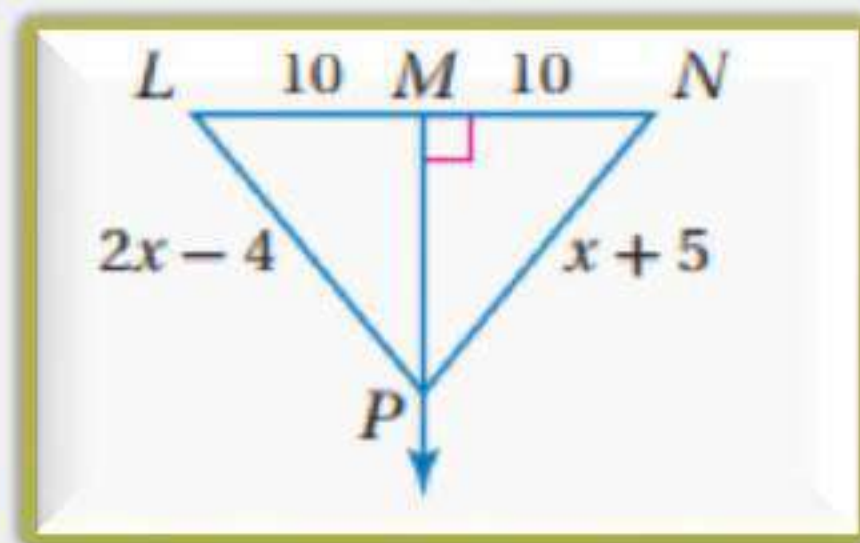
NP (9



6



9



14



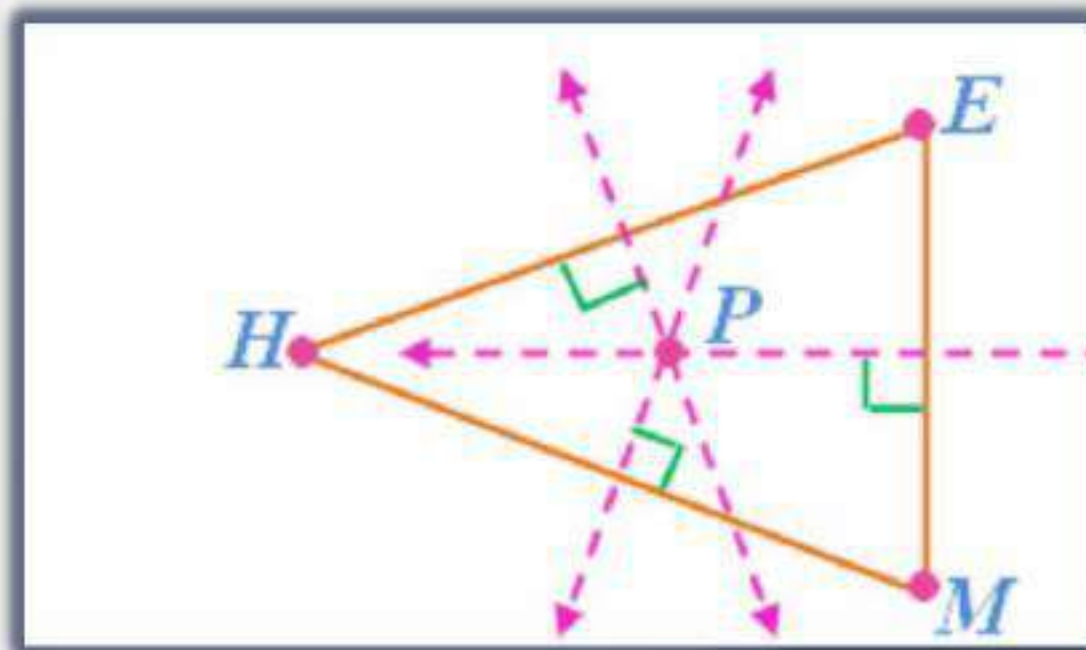
(12) **مدرسة:** يتكون مجمع مدارس من مدرسة ابتدائية E ومدرسة متوسطة M ومدرسة ثانوية H في المواقع المبينة في الصورة المجاورة. انسخ مواقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عيّن موقع موقف الحافلات، على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث.

المثال ٢

الحل



وضع نقطة تعبر عن الحافلة ولتكن P مركز الدائرة الداخلية للمثلث $\triangle HEM$ (حسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث) إذن سيكون بعد النقطة عن كل ضلع من أضلاع المثلث متساوي

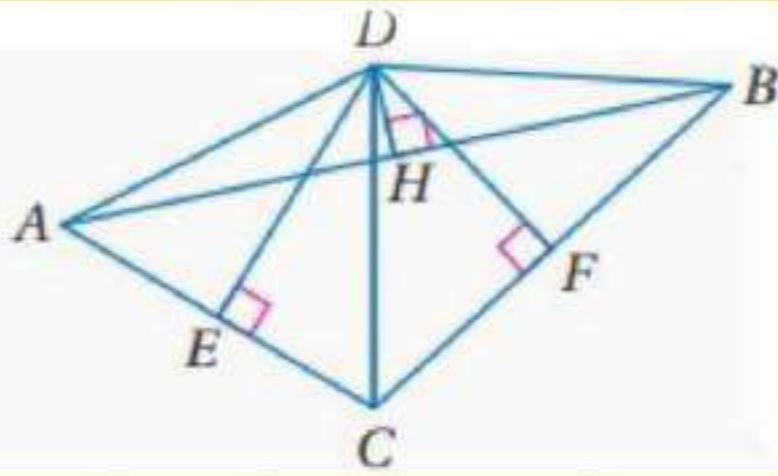


النقطة D مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس $\triangle ABC$. اكتب القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:

$\overline{AH}$ (14)

$\overline{AD}$ (13)

المثال ٢



(13) بما أن D هي مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس $\triangle ABC$ إذن حسب نظرية مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس المثلث:

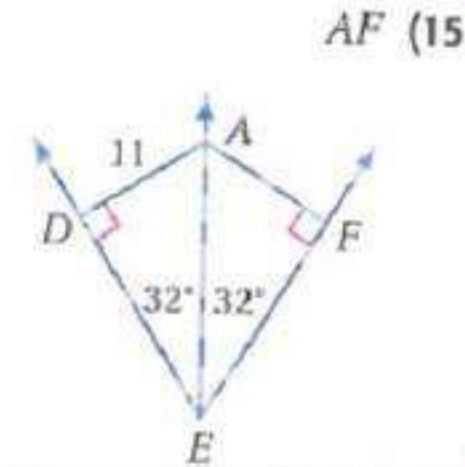
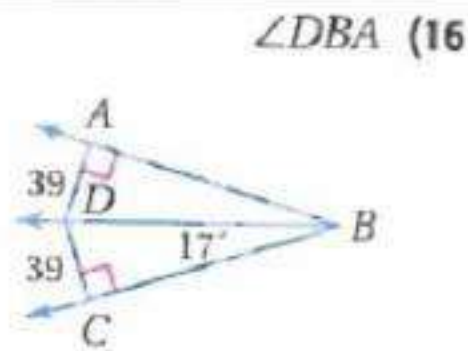
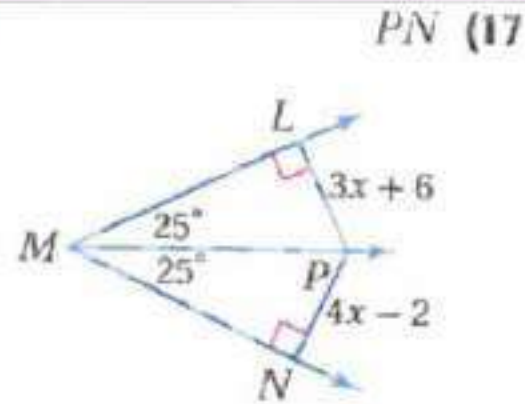
$$\overline{BD} \cdot \overline{DC} \cong \overline{AD}^2$$

(14) $\overline{DH}$ عمودي وينصف $\overline{AB}$

$$\overline{HB} \cong \overline{AH}$$

المثال ٣

أوجد قياس كل مما يلي



بما أن $\overline{AF} \perp \overline{EF}$ و $\angle AEF = \angle AED$ إذن $AD = AF$
إذن $AF = 11$

بما أن $\overline{DA} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{DC} \perp \overline{CB}$ و $DC = AD$ إذن $\angle DBC = \angle ABD$
حسب عكس نظرية منصف الزاوية .
إذن $\angle ABD = 17^\circ$

بما أن $\overline{PL} \perp \overline{LM}$ ، $\overline{PN} \perp \overline{MN}$ و $\angle PMN = \angle LMP$ إذن $PN = LP$
حسب نظرية منصف الزاوية .

$$4x - 2 = 3x + 6$$

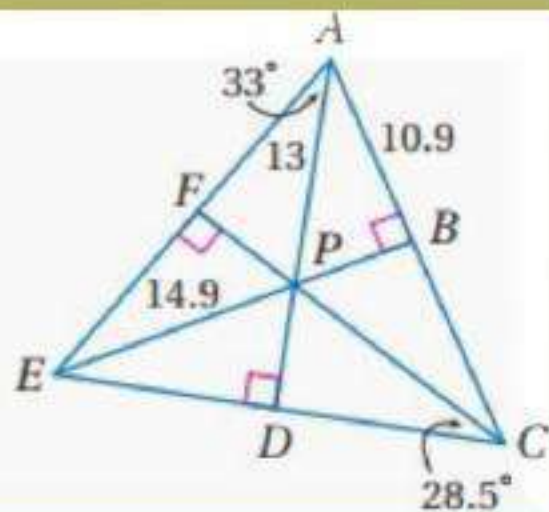
$$4x - 3x = 6 + 2$$

$$x = 8$$

$$PN = 4 \times 8 - 2$$

$$PN = 30$$





إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$ ، فأوجد كلاً من القياسات الآتية :

PB (18)

DE (19)

المثال ٤

(18)

بما أن النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$ ، إذن $PB = PD = PF$ يمكن إيجاد PB حسب نظرية فيثاغورث:

$$(AP)^2 = (AB)^2 + (PB)^2$$

$$(13)^2 = (10.9)^2 + (PB)^2$$

$$PB \approx 7.1$$

الحل

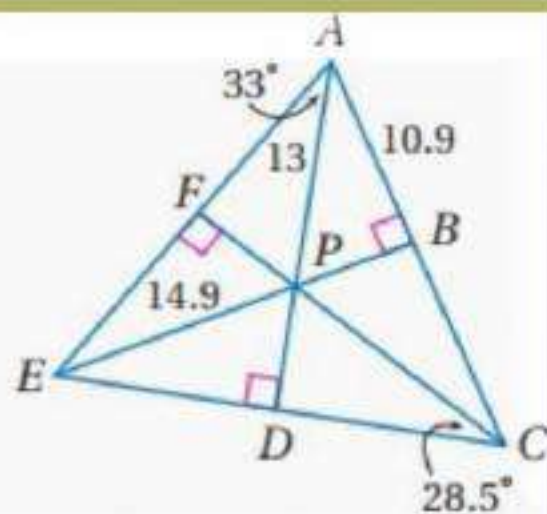
(19)

بما أن $PB = PD$ إذن باستعمال فيثاغورث:

$$(EP)^2 = (PD)^2 + (ED)^2$$

$$(14.9)^2 = (7.1)^2 + (ED)^2$$

$$ED \approx 13.1$$



$\angle DAC$ (20

$\angle DEP$ (21

المثال ٤

الحل

(20

بما أن $\overline{AD} \perp \overline{EC}$ وينصف $\angle CAE$ إذن $\angle DAC = 33$

(21

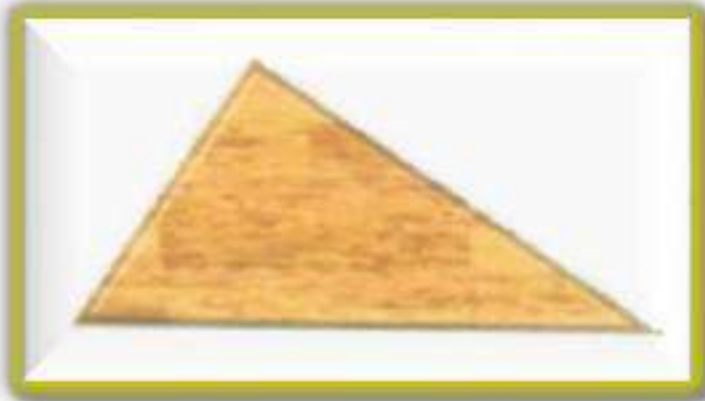
بما أن $\overline{FC} \perp \overline{AE}$ وينصف $\angle ACE$ إذن $\angle ACE = 28.5 \times 2 = 57$
 $\angle CAE + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$26 + 57 + \angle AEC = 180^\circ$$

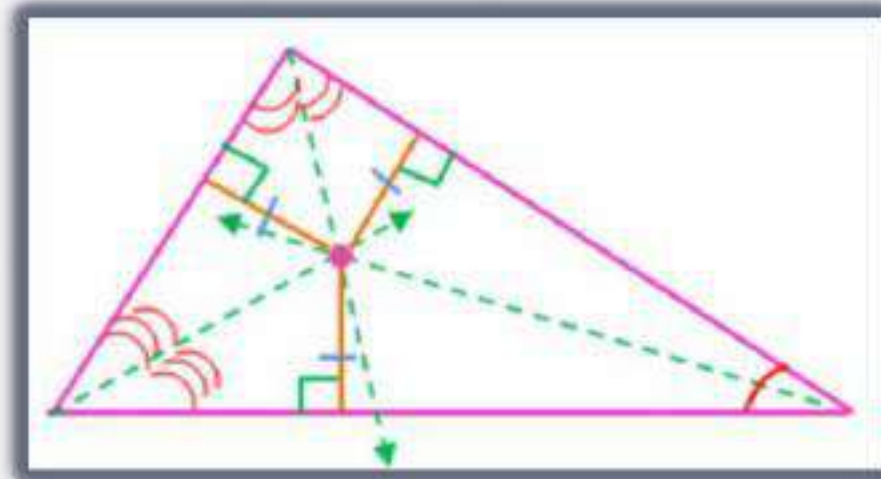
$$\angle AEC = 97$$

بما أن $\overline{EP} \perp \overline{AC}$ وينصف $\angle AEC$ إذن $\angle DEB = \frac{97}{2} = 48.5$

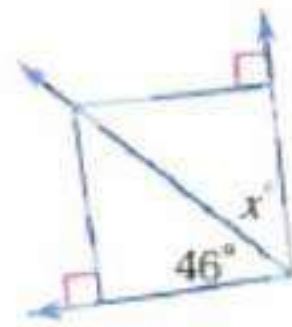
(22) **تصميم داخلي:** توضع زهرية فضيَّة عند مركز سطح الطاولة المبيَّنة في الشكل أدناه، بحيث تكون على أبعاد متساوية من حوافه. انسخ الرسم المجاور في دفترك، وبيِّن أين ستضع الزهرية. وضح إجابتك.



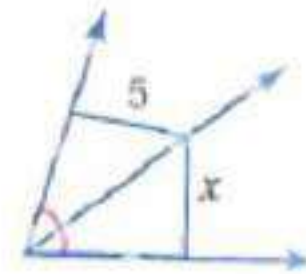
أجد نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث التي تمثل مركز الدائرة الداخلية للمثلث وتبعد أبعادا متساوية عن أضلاع المثلث.



حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x . وضح إجابتك.



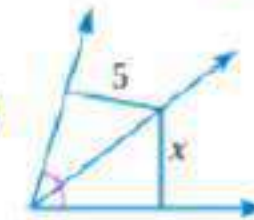
(24)



(23)

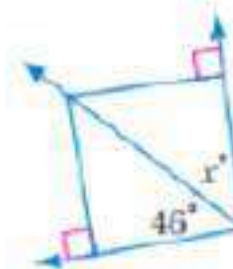


لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان عموديتين على ضلعي الزاوية.

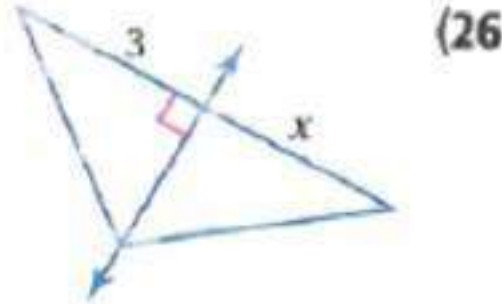
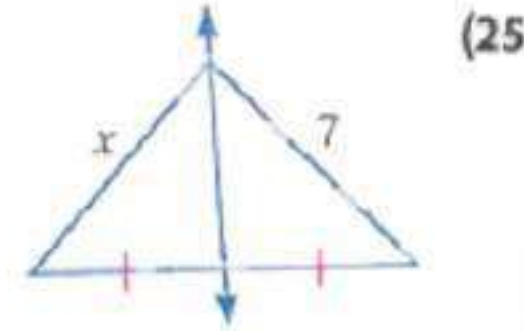


(23)

لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان العموديتان على ضلعي الزاوية متساويتان أم لا.



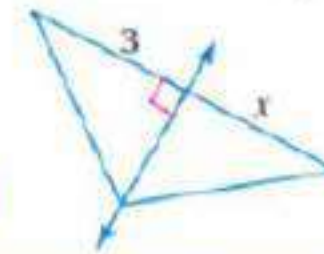
(24)



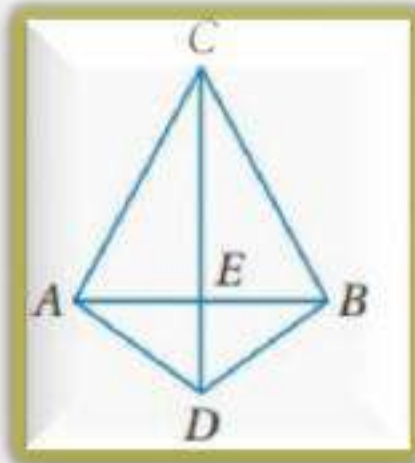
(25)

لا، يجب أن تعرف إن كان منتصف القاعدة عموديا عليها.

(26)



لا، يجب أن تعرف إن كان الوتران متساويين أم لا.



برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لكل من النظريتين الآتيتين:

(27) النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

المطلوب: النقطتان C, D تقعان على

العمود المنتصف لـ $\overline{AB}$



البرهان: العبارات (المبررات)

(1) $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ (معطى)

(2) $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة).

(3) $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (SSS)

(4) $\angle ACD \cong \angle BCD$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(5) $\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة)

(6) $\triangle CEA \cong \triangle CEB$ (SAS)

(7) $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(8) E نقطة منتصف $\overline{AB}$ (تعريف نقطة المنتصف)

(9) $\angle CEA \cong \angle CEB$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(10) $\angle CEA, \angle CEB$ متجاورتان على مستقيم

(11) $\angle CEB, \angle CEA$ متكاملتان (نظرية الزاويتين المتجاورتين على مستقيم)

(12) $m\angle CEA + m\angle CEB = 180^\circ$ (تعريف التكامل)

(13) $m\angle CEA + m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

(14) $2m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

(15) $m\angle CEA = 90^\circ$ (خاصية القسمة)

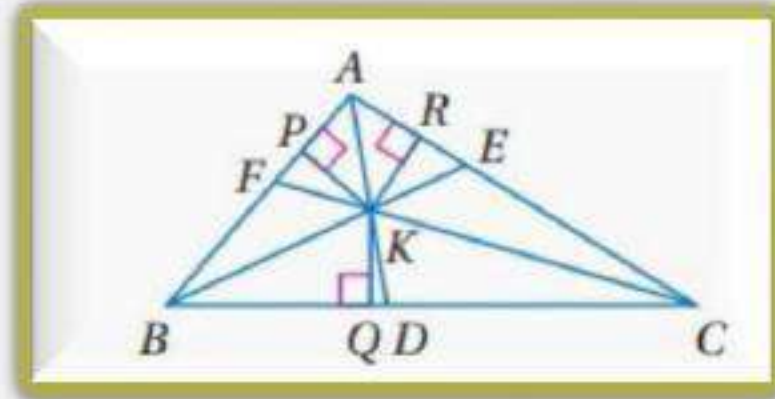
(16) $\angle CEB, \angle CEA$ قائمتان (تعريف الزاوية القائمة)

(17) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (تعريف المستقيمين المتعامدين)

(18) $\overline{CD}$ عمود منصف $\overline{AB}$ (تعريف العمود المنصف)

(19) C, D واقعتان على العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ (تعريف النقطة الواقعة على

مستقيم).



(28) النظرية 4.6

المعطيات: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ منصفات لزوايا $\triangle ABC$,

$$\overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KQ} \perp \overline{BC}$$

$$\overline{KR} \perp \overline{AC}$$

المطلوب: $KP = KQ = KR$



البرهان: العبارات (المبررات)

(1) $\overline{CF}$, $\overline{BE}$, $\overline{AD}$ منصفات لزوايا $\triangle ABC$,

(معطيات) $\overline{KR} \perp \overline{AC}$, $\overline{KP} \perp \overline{AB}$, $\overline{KQ} \perp \overline{BC}$

(2) $KP = KQ$, $KQ = KR$, $KP = KR$ (كل نقطة على منصف الزاوية تكون

على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية)

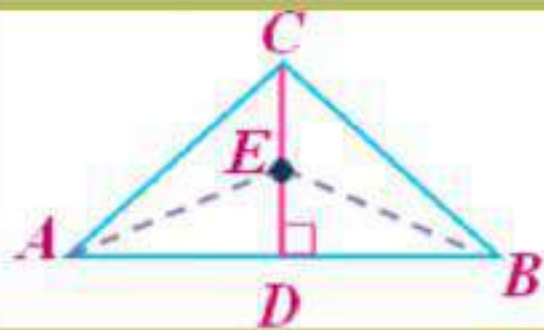
(3) $KP = KQ = KR$ (خاصية التعدي)

برهان: اكتب برهاناً حرّاً لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

(29) النظرية 4.1

(30) النظرية 4.5

الحل



(29)

المعطيات: $\overline{CD}$ عمود منتصف $\overline{AB}$.

E نقطة على $\overline{CD}$.

المطلوب: $EA = EB$

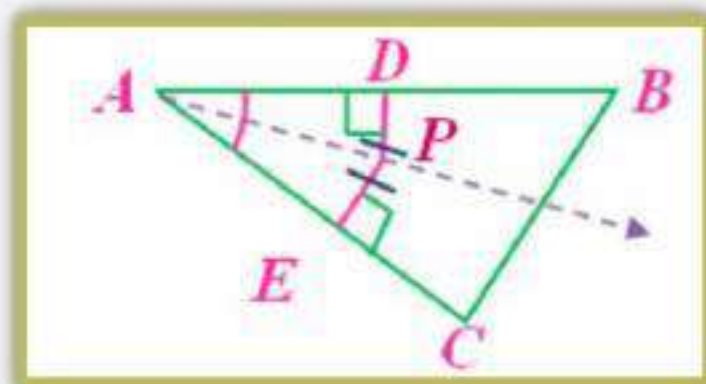
البرهان: $\overline{CD}$ عمود منتصف $\overline{AB}$ ومن تعريف المنصف فإن D نقطة منتصف $\overline{AB}$.
لذلك $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ حسب نظرية نقطة المنتصف.

$\angle CDA$ ، $\angle CDB$ قائمتان حسب تعريف العمود. وبما أن جميع الزوايا القائمة

متطابقة فإن $\angle CDA \cong \angle CDB$. وبما أن E نقطة على $\overline{CD}$

فإن $\angle EDA$ ، $\angle EDB$ قائمتان ومتطابقتان. وحسب خاصية الانعكاس $\overline{ED} \cong \overline{ED}$

إذن $\triangle EDA \cong \triangle EDB$ حسب S.A.S. وتكون $\overline{EA} \cong \overline{EB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف التطابق ينتج أن $EA = EB$.



(30)

المعطيات:

P نقطة داخل $\angle BAC$.

بعد النقطة P عن AB يساوي بعدها عن AC .

المطلوب: AP منصف $\angle BAC$.

البرهان: النقطة P تقع في داخل الزاوية $\angle BAC$ ، و $PD = PE$. ومن تعريف
التطابق $PD \cong EP$ ، $PD \perp AB$ و $PE \perp AC$ لأن المسافة من نقطة إلى
مستقيم تقاس على القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من النقطة.

$\angle AEP$ ، $\angle ADP$ قائمتان حسب تعريف المستقيمين المتعامدين

والمثلثان AEP ، ADP قائما الزاوية حسب تعريف المثلث قائم الزاوية. وحسب

خاصية الانعكاس $AP \cong AP$

. إذن، $\triangle AEP$ ، $\triangle ADP$ متطابقان حسب LL.

لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة و

AP منصف $\angle BAC$ حسب تعريف منصف الزاوية.

31 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي إحداثيات نقطتي طرفيها هما $A(-3, 1)$, $B(4, 3)$. ووضح إجابتك.



$$A(-3, 1), B(4, 3)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{4 - (-3)} = \frac{2}{7}$$

إذن ميل القطعة المستقيمة $= \frac{2}{7}$ لذلك فميل العمود المنصف $= -\frac{7}{2}$

$$\text{نقطة المنتصف} = \left(\frac{-3 + 4}{2}, \frac{1 + 3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 2 \right)$$

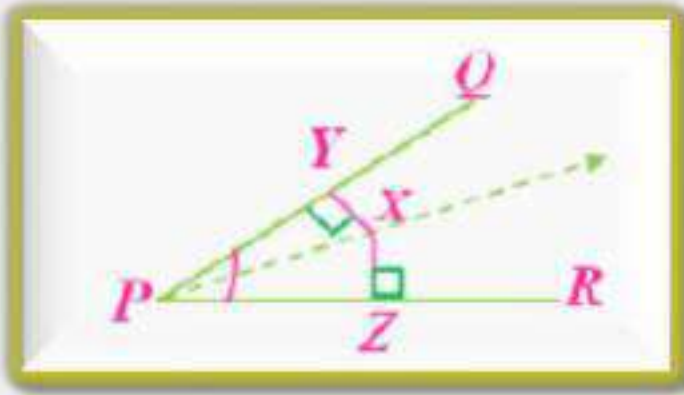
$$y = mx + b$$

$$2 = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{2} + b$$

$$b = 2 - \frac{-7}{4} = \frac{15}{4}$$

إذن معادلة المستقيم هي: $y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$

(32) برهان، اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 4.4.



المعطيات: PX تنصف $\angle QPR$.

$$\overline{XY} \perp \overline{PQ}, \overline{XZ} \perp \overline{PR}$$

المطلوب: إثبات أن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$

البرهان: العبارات (المبررات)

(1) PX تنصف $\angle QPR$ ، $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ ، $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$ (معطيات)

(2) $\angle YPX \cong \angle ZPX$ (تعريف منصف الزاوية)

(3) $\angle PYN$ ، $\angle PZN$ قائمتان (تعريف التعامد)

(4) $\angle PYN \cong \angle PZN$ (الزاويا القائمة متطابقة)

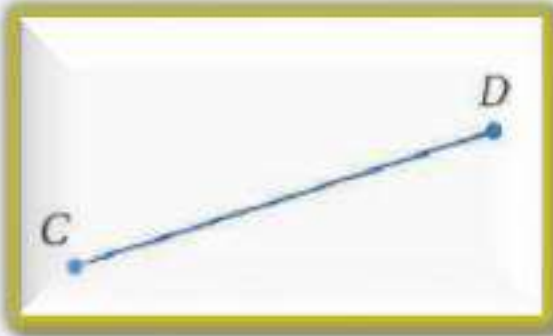
(5) $\overline{PX} \cong \overline{PX}$ (خاصية الانعكاس)

(6) $\triangle PYN \cong \triangle PZN$ (A.A.S)

(7) $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(33) هندسة إحداثية، أوجد إحداثي مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(0, 0)$, $B(0, 6)$, $C(10, 0)$. وضح إجابتك.

معادلة أحد الأعمدة المنصفة هي $x = 3$ ومعادلة عمود منصف آخر هي $x = 5$. ويتقاطع هذان العمودان عند النقطة $(5, 3)$ لذلك فمركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث يقع عند النقطة $(5, 3)$

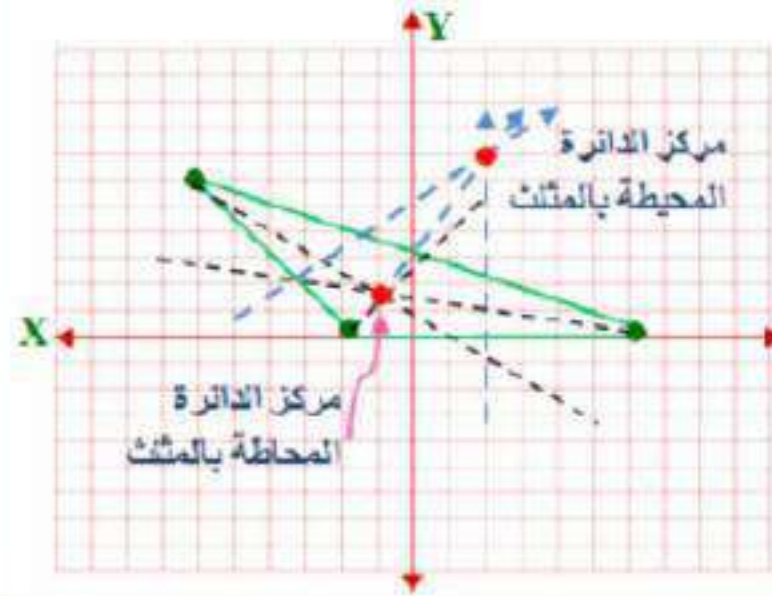


(34) المحل الهندسي، انظر إلى القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ ، ووصف مجموعة النقاط في الفضاء التي يبعد كلٌّ منها بُعدين متساويين عن C , D

مستوى يعامد المستوى الذي تقع فيه القطعة $\overline{CD}$ وينصف $\overline{CD}$.



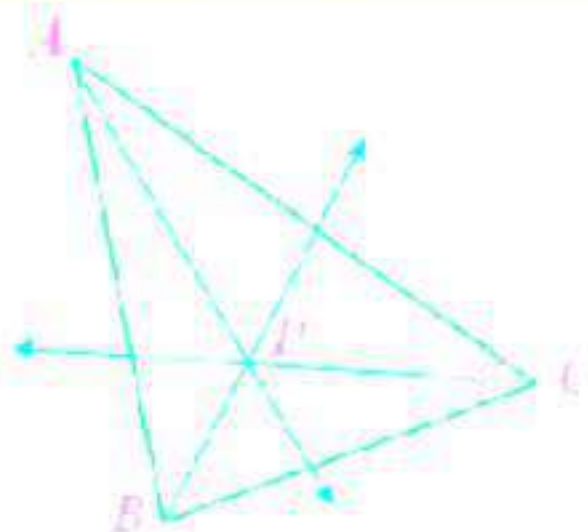
(35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا، على أن يقع مركز الدائرة الداخلية له داخله، و يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوسه خارجه. برّر صحة رسمك باستعمال مسطرة غير مدرجة وفرجار لإيجاد نقطتي التلاقي.



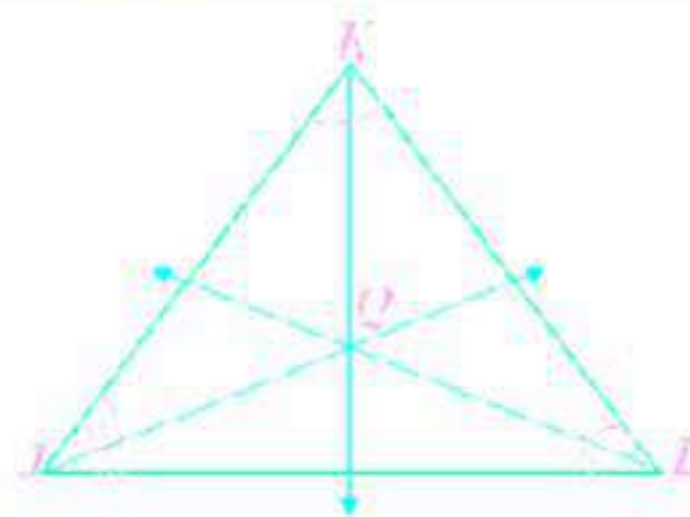
تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً أو ليست صحيحة أبداً. وبرّر إجابتك.

(36) تتقاطع منصفات زوايا المثلث عند نقطة تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.

(36) **صحيحة أحياناً** إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإن هذه العبارة تكون صحيحة ولكن إذا كان المثلث متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع فإن العبارة خاطئة.



$$JQ = KQ = LQ$$

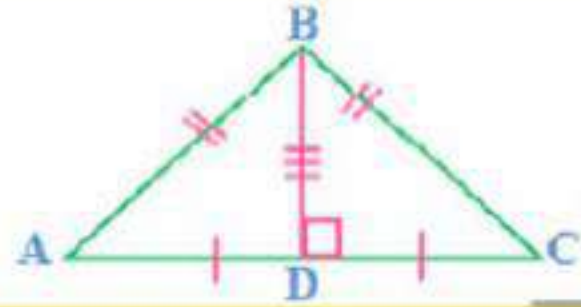


$$AP = BP = CP$$

(37) في المثلث المتطابق الضلعين، يكون العمود المنصف للقاعدة منصفًا لزاوية الرأس المقابلة للقاعدة.

(37) صحيحة دائماً.

الحل



المعطيات: $\triangle ABC$ متطابق الضلعين فيه

$$\overline{AB} \cong \overline{BC}$$

$\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$

البرهان: العبارات (المبررات)

(1) $\triangle ABC$ متطابق الضلعين فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (معطى)

(2) $\overline{AB} = \overline{BC}$ (تعريف المثلث متطابق الضلعين)

(3) $\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$

(4) D نقطة منتصف $\overline{AC}$ (تعريف منتصف القطعة المستقيمة)

$$\overline{AD} \cong \overline{DC} \quad (5)$$

(6) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)

(7) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS)

(8) $\angle ABD \cong \angle CBD$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

(9) $\overline{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$ (تعريف منصف الزاوية)

(38) **اكتب:** قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث ومنصّفات زواياه مبينًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف. وقارن بين نقطتي التلاقي.



(38)
ينصف كل منهما شيئاً ما ولكن الأعمدة المنصّفة تنصف القطع المستقيمة في حين تنصف منصفات الزوايا. وتتقاطع كل منها عند نقطة. ونقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة هي مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث. أما نقطة تلاقي منصفات الزوايا فهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث والتي تقع دائماً داخل المثلث. أما مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث فيمكن أن يقع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.

٤-٢ القطع المتوسط والارتفاعات في المثلث Medians and Altitudes of triangle

لماذا؟

فيما سبق:

درست الأعمدة المنصّفة
ومنصفات الزوايا في
المثلث واستعمالها.

والآن:

- تعرّف القطع المتوسط في المثلث وأستعملها.
- تعرّف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

المفردات:

القطعة المتوسطة

median

مركز المثلث

centroid

الارتفاع

altitude

ملتقى ارتفاعات المثلث

orthocenter

صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يتزن على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو بحاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها. ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسط، وتعيين نقطة تقاطعها.

القطع المتوسط: القطعة المتوسطة لمثلث قطعة مستقيمة طرفيها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة تُسمى **مركز المثلث**، وتقع دائماً بداخله.

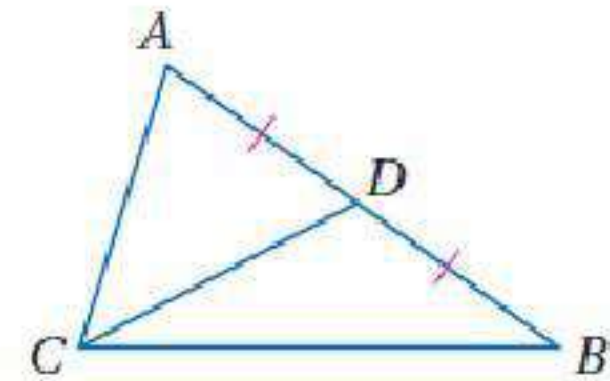
نظرية 4.7

نظرية مركز المثلث

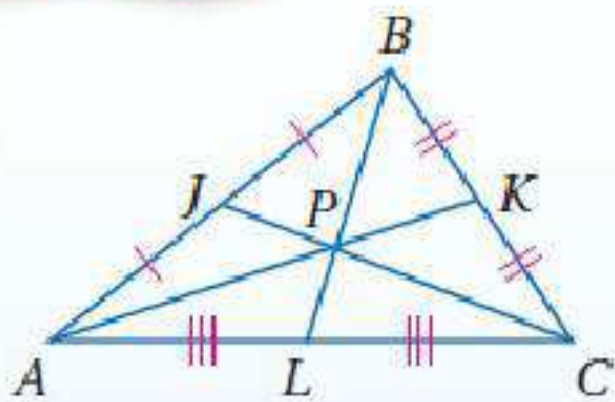
يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإن

$$AP = \frac{2}{3} AK, BP = \frac{2}{3} BL, CP = \frac{2}{3} CJ$$



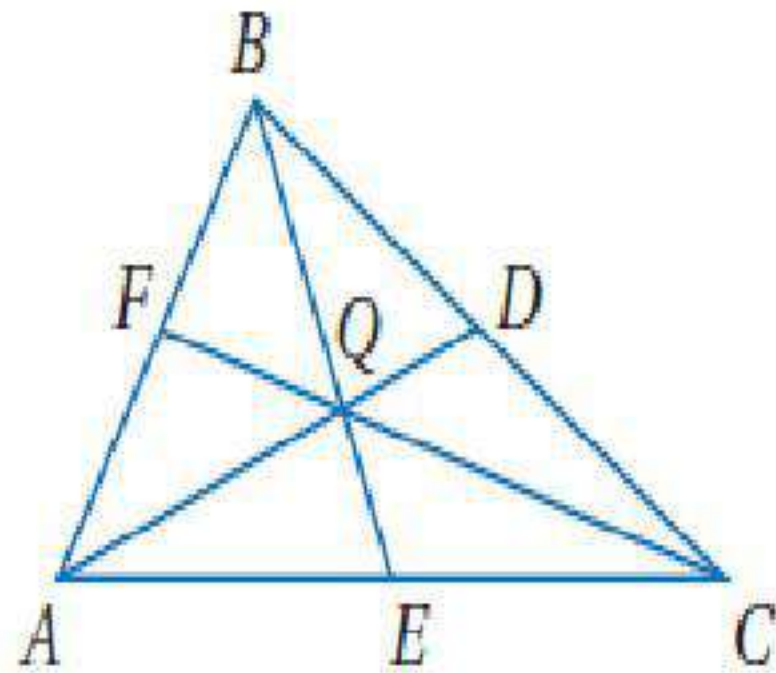
أضف إلى
مطويتك



٢-٤ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث Medians and Altitudes of triangle

مثال 1

استعمال نظرية مركز المثلث



إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$ ، $BE = 9$.
فأوجد كلاً من BQ ، QE .

نظرية مركز المثلث

$$BQ = \frac{2}{3} BE$$

$$BE = 9$$

$$= \frac{2}{3} (9) = 6$$

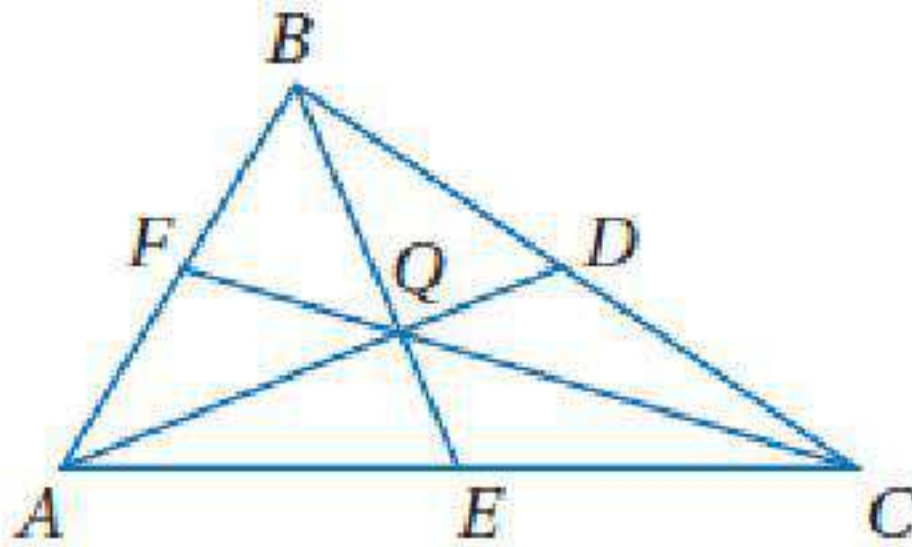
جمع القطع المستقيمة $BQ + QE = 9$

$$BQ = 6 \quad 6 + QE = 9$$

بطرح 6 من الطرفين

$$QE = 3$$

تحقق من فهمك



في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين :

FQ (1A)

5

QC (1B)

10

٢-٤ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث Medians and Altitudes of triangle

إرشادات للدراسة

استعمال الحس العددي

في المثال 2 ، يمكنك

أيضا استعمال الحس

العددي لإيجاد KT .

بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$ ،

فإن $PT = \frac{1}{3}KT$

وكذلك $KP = 2PT$ ؛

لذا فإذا كان $PT = 2$

فإن $KP = 2(2) = 4$.

مثال 2

استعمال نظرية مركز المثلث

في $\triangle JKL$ ، إذا كان $PT = 2$ ، فأوجد KP .

بما أن $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ ، فإن R نقطة منتصف $\overline{JK}$ ، وتكون $\overline{LR}$ قطعة متوسطة في $\triangle JKL$. وبالمثل نستنتج أن S ، T نقطتا منتصف $\overline{KL}$ ، $\overline{LT}$ على الترتيب ؛ لذا فإن $\overline{JS}$ ، $\overline{KT}$ قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$. لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

نظرية مركز المثلث

$$KP = \frac{2}{3}KT$$

جمع القطع المستقيمة والتعويض

$$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$$

$$PT = 2$$

$$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$$

خاصية التوزيع

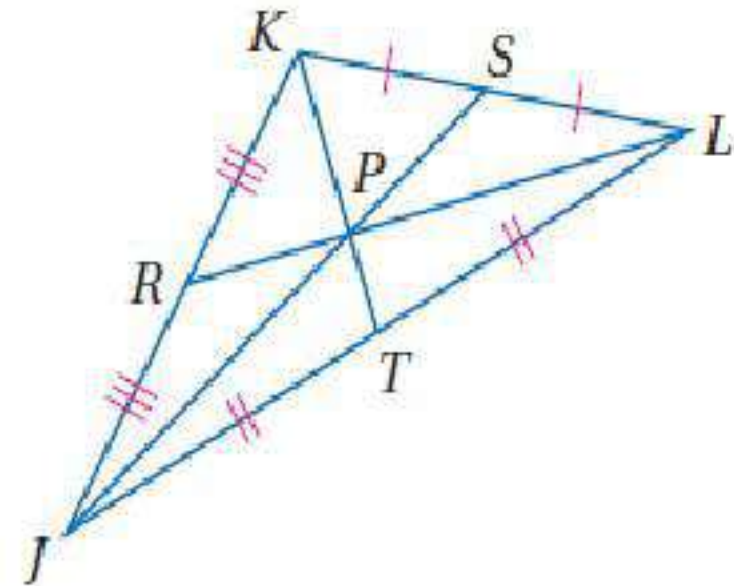
$$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$$

ب طرح $\frac{2}{3}KP$ من الطرفين

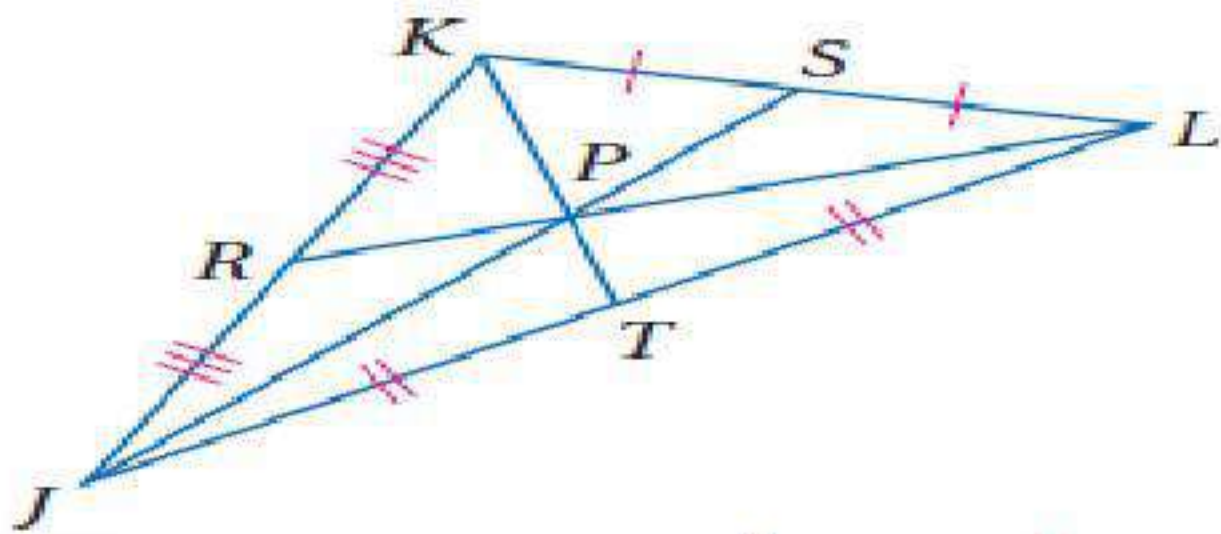
$$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$$

ب ضرب الطرفين في 3

$$KP = 4$$



تحقق من فهمك



في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $JP = 9$ ، $RP = 3.5$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين:

PL (2A)

7

PS (2B)

4.5

٢-٤ القطع المتوسط والارتفاعات في المثلث Medians and Altitudes of triangle

إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

مثال 3 من واقع الحياة

فن الأداء: يُخطط عبدالعزیز في مهرجان رياضي لاتزان قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور. وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(1, 10)$, $(5, 0)$, $(9, 5)$. فما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزیز أن يثبت المثلث عندها حتى يحفظه متوازنًا؟ وضح إجابتك.

افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة. وستكون هذه هي النقطة التي سيتزن عندها المثلث.

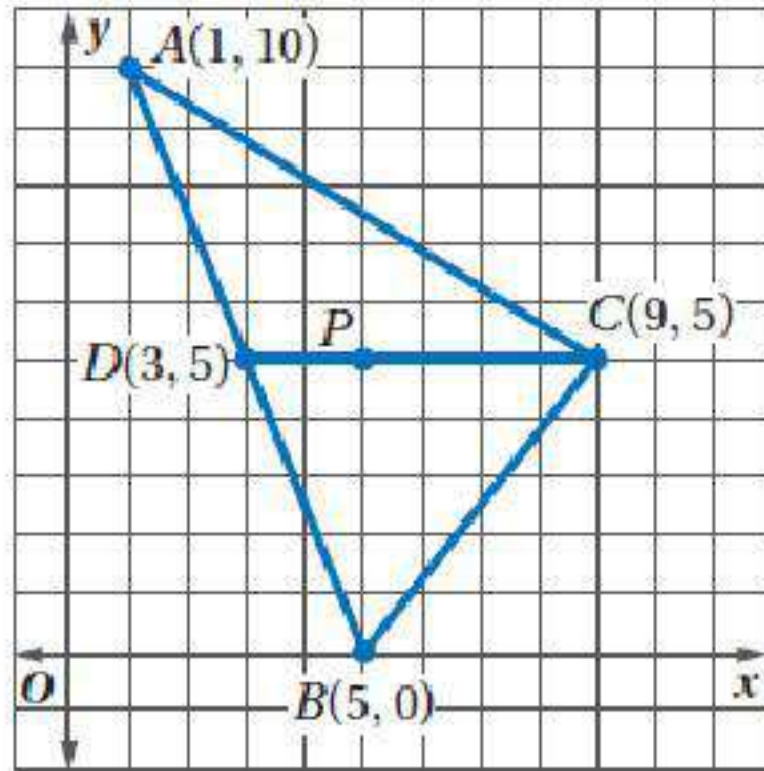
خطك: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$, $C(9, 5)$. وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تتلاقى عندها القطع المتوسط للمثلث؛ لذا استعمل نظرية نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعًا على القطعة المتوسطة وعلى بُعد من الرأس يساوي ثلثي طول القطعة المتوسطة.

٢-٤ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث Medians and Altitudes of triangle

قراءة الرياضيات

ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.



حل: مثل $\triangle ABC$ بيانًا .

أوجد نقطة المنتصف D للضلع AB الذي طرفاه

$$A(1, 10), B(5, 0)$$

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عين النقطة D ، ولاحظ أن DC أفقية. والمسافة من

$$D(3, 5) \text{ إلى } C(9, 5) \text{ تساوي } 9 - 3, \text{ أي}$$

6 وحدات.

فإذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإن $PC = \frac{2}{3}DC$ ؛ ولذا يقع المركز على بُعد $\frac{2}{3}(6)$ ، أو 4 وحدات إلى اليسار من C . وتكون إحداثيات P هي $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحّة إجابتك. بما أن نقطة منتصف الضلع AC

$$\text{هي } F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right) \text{ أو } F(5, 7.5), \text{ وأن } \overline{BF} \text{ رأسية فإن المسافة من } B \text{ إلى } F \text{ تساوي}$$

$$7.5 - 0, \text{ أي } 7.5 \text{ وحدات. وعلى ذلك يكون } \overline{PB} \text{ يساوي } \frac{2}{3}(7.5) \text{ أي } 5, \text{ إذن } P \text{ تقع على}$$

بعد 5 وحدات إلى الأعلى من B .

وتكون إحداثيات P هي $(5, 0 + 5)$ أي $(5, 5)$. ✓

تحقق من فهمك

(3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(0, 4)$ ، $(6, 11.5)$ ، $(12, 1)$

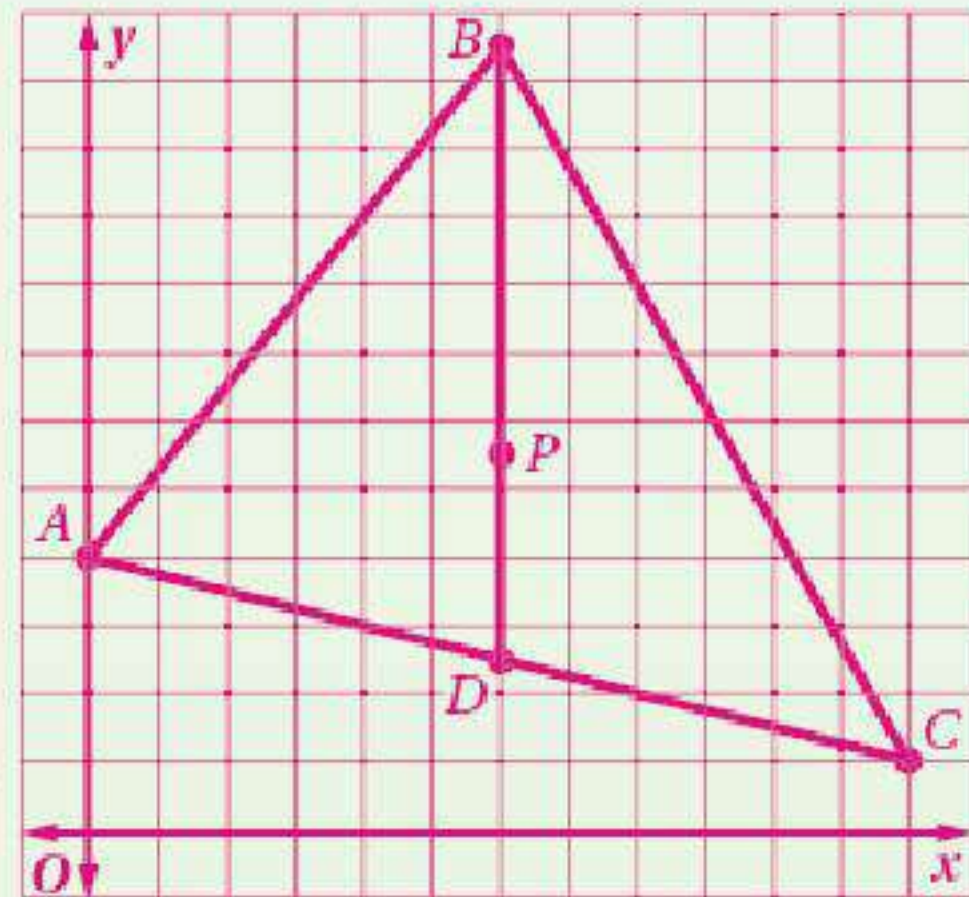
فما إحداثيات النقطة التي يترن عنده هذا المثلث؟ وضع إجابتك.

(3) $(6, 5.5)$

نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي

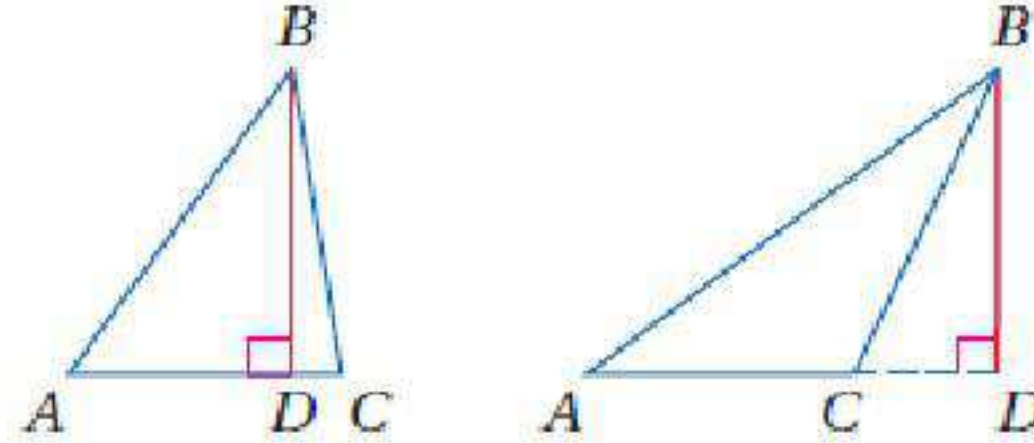
$$D\left(\frac{0+12}{2}, \frac{4+1}{2}\right) \text{ أو } D(6, 2.5)$$

وبما أن $\overline{BD}$ رأسية، فإن المسافة من B إلى D تساوي $9 = 11.5 - 2.5$ ،
وبما أن P هي نقطة تقاطع $\overline{BD}$ و $\overline{AC}$ ، فإن P تبعد
6 وحدات أسفل B ؛ إذن إحداثيات
النقطة P هي $(6, 11.5 - 6)$
أو $(6, 5.5)$.



Medians and Altitudes of triangle

ارتفاعات المثلث: ارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس. ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



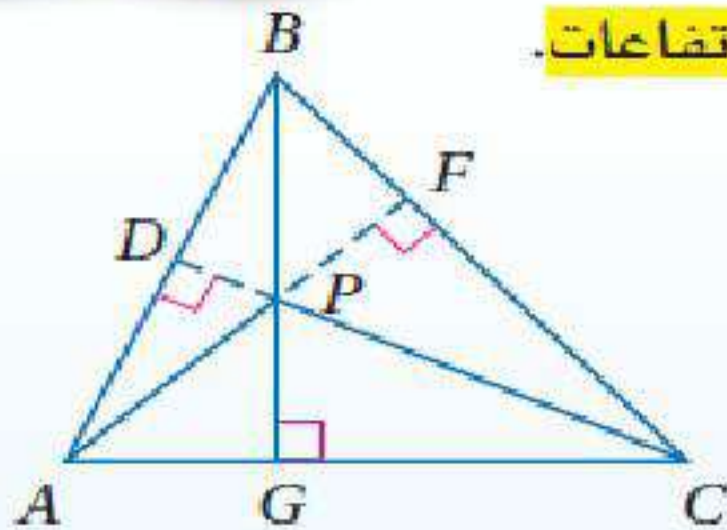
$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقى المستقيمات التي تحتويها في نقطة مشتركة.

مفهوم أساسي

ملتقى الارتفاعات

تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أي مثلث في نقطة تُسمى **ملتقى الارتفاعات**.



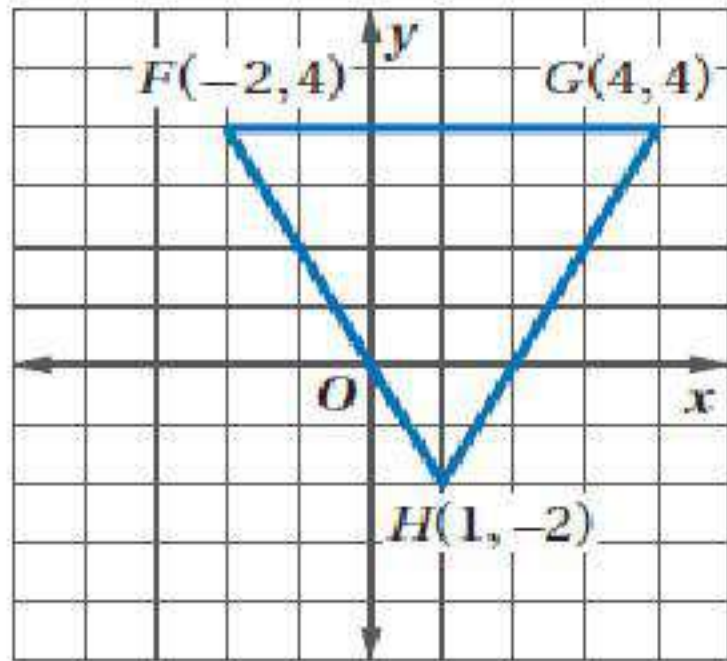
تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات
مثال: $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P ، وهي ملتقى الارتفاعات
للمثلث ABC .

٢-٤ القطع المتوسط والارتفاعات في المثلث Medians and Altitudes of triangle

مثال 4

إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

هندسة إحداثية: إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2, 4)$, $G(4, 4)$, $H(1, -2)$ ، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1: مثل $\triangle FGH$ بيانيًا. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من F إلى $\overline{GH}$.

$$\text{بما أن ميل } \overline{GH} \text{ يساوي } \frac{4 - (-2)}{4 - 1} = 2$$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$.

صيغة النقطة والميل

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(x_1, y_1) = F(-2, 4), m = -\frac{1}{2}$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$$

بالتبسيط

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

خاصية التوزيع

$$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$$

بإضافة 4 إلى الطرفين

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى $\overline{FH}$.

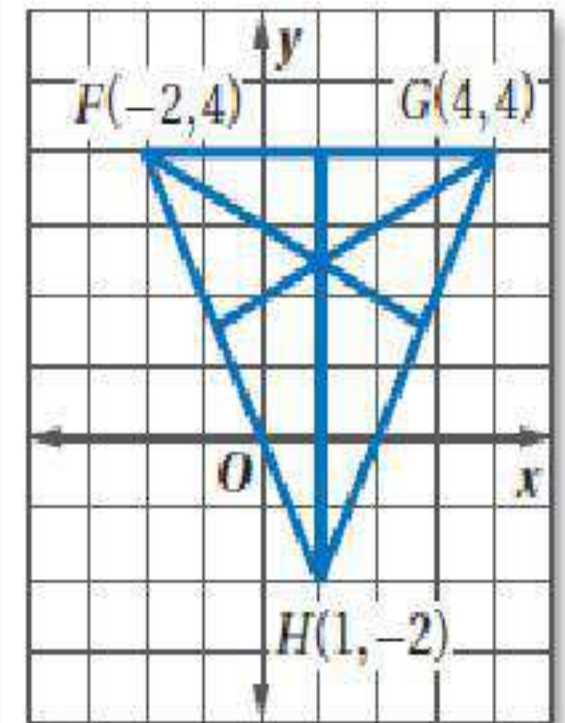
بما أن ميل $\overline{FH}$ يساوي $\frac{-2 - 4}{1 - (-2)} = -2$ ، فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{FH}$ يساوي $\frac{1}{2}$.

٢-٤ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث Medians and Altitudes of triangle

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

استعمل ركن ورقة لرسم
الارتفاع لكل ضلع من
أضلاع المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريباً
عند $(1, 2\frac{1}{2})$
لذا فالجواب معقول.

صيغة النقطة والميل

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(x_1, y_1) = G(4, 4), m = \frac{1}{2}$$

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

خاصية التوزيع

$$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$$

بإضافة 4 إلى الطرفين

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج
لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلتين لتحذف x ، فينتج أن $2y = 5$ ، ومن ثم فإن $y = \frac{5}{2}$.

معادلة الارتفاع من G

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$$

$$1 = x$$

الفصل الرابع

$$y = \frac{5}{2}$$

ب طرح $\frac{4}{2}$ ، أو 2 من الطرفين

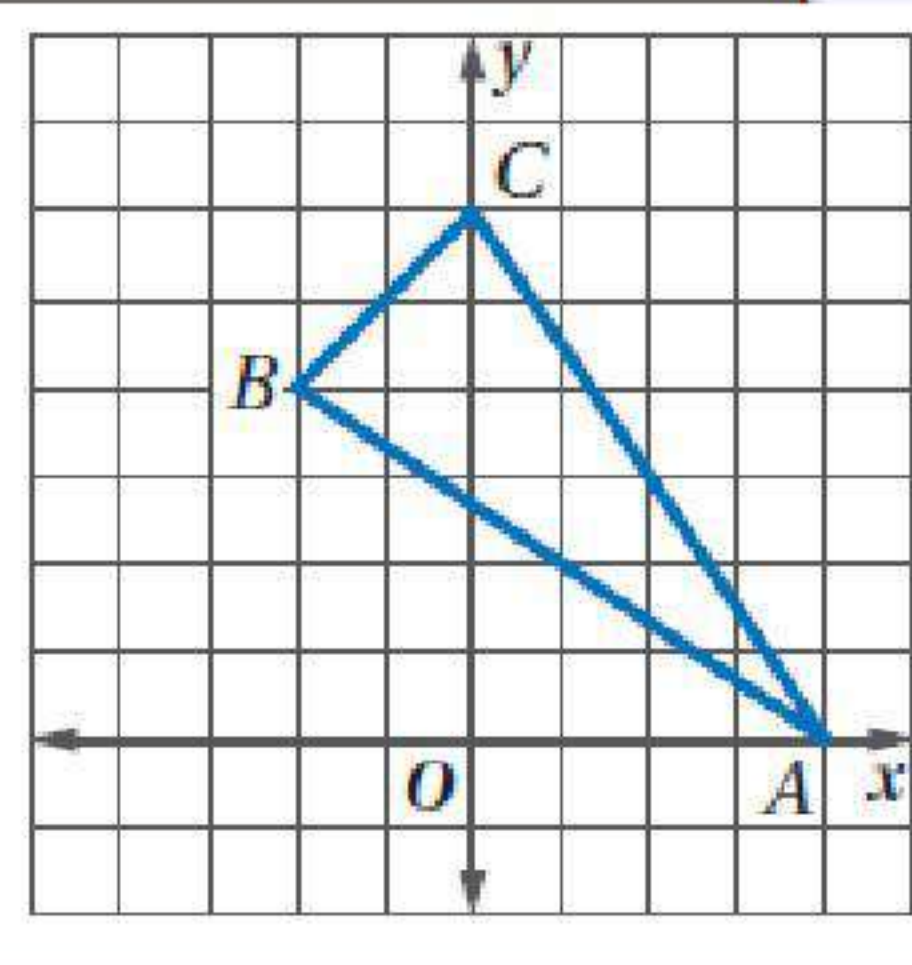
بضرب الطرفين في 2

إذن إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle JKL$ هي $(1, \frac{5}{2})$ أو $(1, 2\frac{1}{2})$.

تحقق من فهمك

(4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.

$$\left(-\frac{4}{5}, 4\frac{4}{5}\right)$$



٢-٤ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

Medians and Altitudes of triangle

أضف إلى

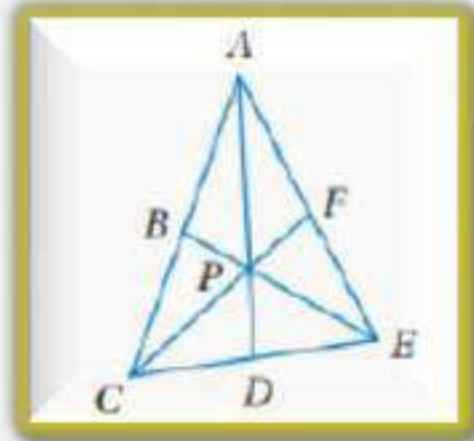
مطوبتك

ملخص المفاهيم

قطع مستقيمة ونقاط خاصة في المثلث

المفهوم	مثال	نقطة التلاقي	الخاصية	مثال
العمود المنصف		مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث	P مركز الدائرة التي تمر برؤوس ΔABC ، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	
منصف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية للمثلث	Q مركز الدائرة الداخلية في ΔABC ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	
القطعة المتوسطة		مركز المثلث	R مركز ΔABC ، وتبعد عن كل رأس ثلثي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنصف الضلع المقابل له.	
الارتفاع		ملتقى الارتفاعات	تلتقي المستقيمات التي تحوي ارتفاعات ΔABC عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	

٢-٤ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث Medians and Altitudes of triangle



إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$ ، $AD = 15$ ، $PF = 6$ ،
فأوجد كل طول مما يأتي:

(1) PC

(2) AP

لا تأكد

المثالات

١ ، ٢

الحل

$$AP = \frac{2}{3}AD$$

$$AP = \frac{2}{3} \times 15$$

$$AP = 10$$

بما أن P هي مركز $\triangle ACE$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$PC = \frac{2}{3}CF$$

$$PC = \frac{2}{3}(PF + CP)$$

$$PC = \frac{2}{3}(6 + CP)$$

$$PC = 4 + \frac{2}{3}CP$$

$$PC - \frac{2}{3}CP = 4$$

$$\frac{1}{3}CP = 4$$

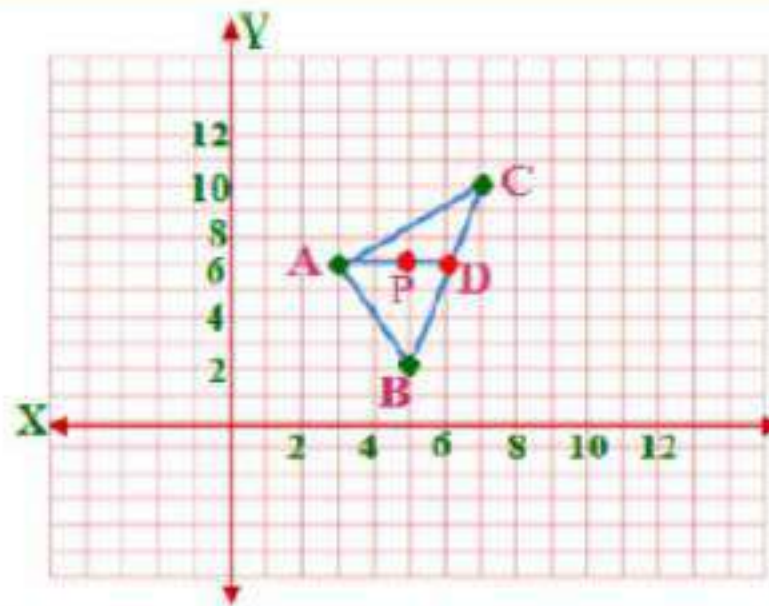
$$CP = 12$$



(3) تصميم داخلي: بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث عند النقاط $(3, 6)$, $(5, 2)$, $(7, 10)$ فعند أي نقطة ستوضع الدعامة؟

المثال ٣

الحل



بفرض ان اسماء نقاط المثلث هي ABC
 $A(3, 6), B(5, 2), C(7, 10)$

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع BC
 $B(5, 2), C(7, 10)$

$$D\left(\frac{5+7}{2}, \frac{2+10}{2}\right) = D(6, 6)$$

المسافة من $D(6, 6)$ إلى $A(3, 6)$ تساوي $3 - 6$ أي ٣ وحدات.

وإذا كانت P هي مركز $\triangle ABC$ فإن $AP = \frac{2}{3}AD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$3 \times \frac{2}{3}$ أو ٢ وحدة إلى اليمين من A وتكون إحداثيات P هي $(5, 6)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 6)$

(4) هندسة إحداثية، أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه:
 $A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$

المثال ٤



$$A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$$

أوجد معادلة ارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{-1 + 3} = \frac{4}{2} = 2 \text{ يساوي } \overline{AB}$$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$C(3, 3), m = -\frac{1}{2}$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow 1$$

معادلة الارتفاع من A إلى $\overline{BC}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 7}{3 + 1} = \frac{-4}{4} = -1$$

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي -1

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{BC}$ يساوي 1

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$A(-3, 3), m = 1$$

$$y - 3 = 1(x + 3)$$

$$y - 3 = x + 3$$

$$y = x + 6 \rightarrow 2$$

بطرح المعادلتين ١ و ٢

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$y = x + 6$$

$$0 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}x = -\frac{3}{2}$$

$$x = -1$$

$$y = x + 6$$

$$y = -1 + 6$$

$$y = 5$$

إن إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث هي $(-1, 5)$

٧ تدريب وحل المسائل

في $\triangle SZU$ ، إذا كان $ZT = 18$ ، فأوجد كل طول مما يأتي :

SJ (6

YJ (5

SV (8

YU (7

ZJ (10

JT (9

المثالات

١ ، ٢



6

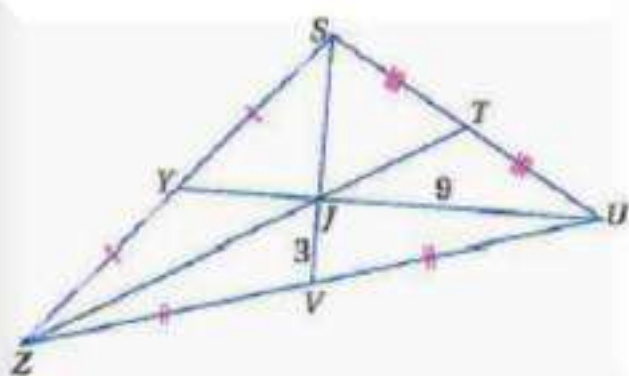
4.5

9

13.5

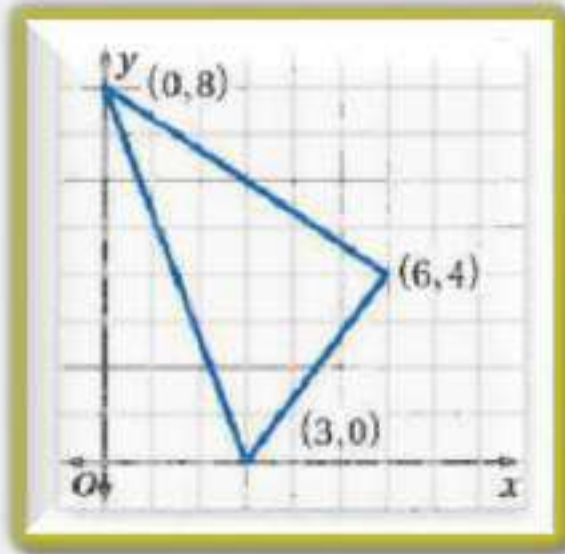
12

6



المثال ٣

11) **تصميم داخلي:** صنعت كوثر لوحةً مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه لتضع عليها صور معالم مشهورة. وأرادت أن تعلقها في سقف حجرتها على أن تكون موازية له. فعند أي نقطة يجب أن تُثبت الخيط؟



(3,4)

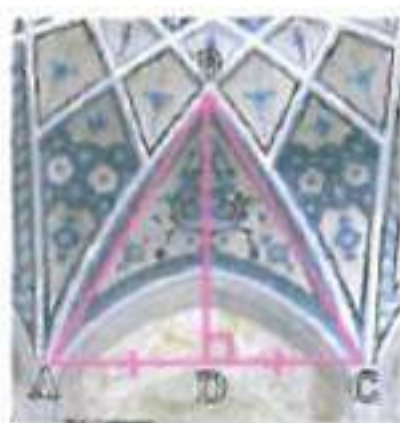


12) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه:
 $J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$

(5,-1)



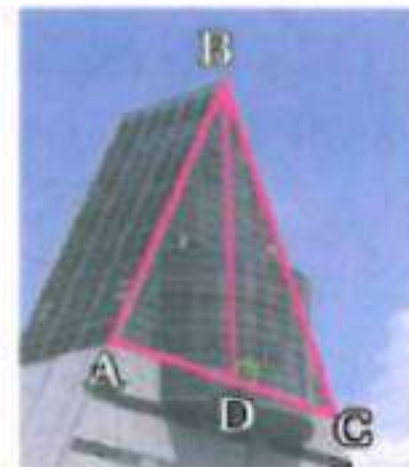
صنف $\overline{BD}$ في كلٍّ من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصف:



(15)



(14)

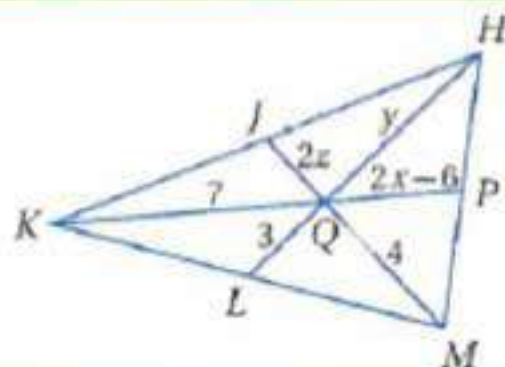


(13)

عمود منصف

قطعة متوسطة

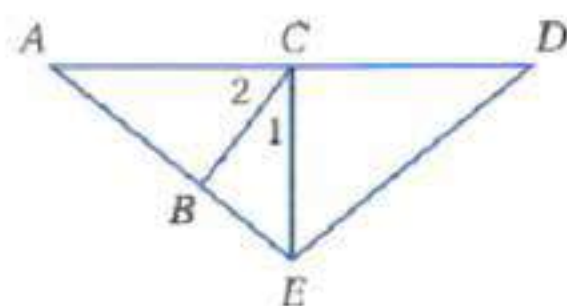
ارتفاع



(16) **جبر** في الشكل المجاور، إذا كانت J, P, L نقاط منتصفات $\overline{KH}, \overline{HM}, \overline{MK}$ على الترتيب، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y, z .

$$\begin{aligned} X &= 4.75, \\ Y &= 6, \\ Z &= 1 \end{aligned}$$



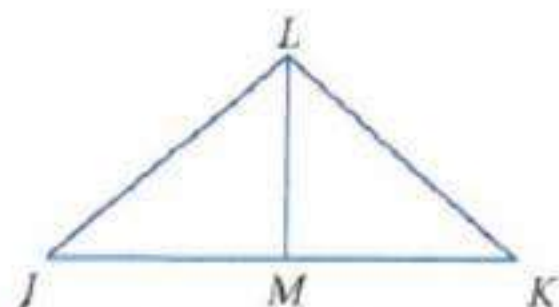


(17) **جبراً** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{EC}$ ارتفاعاً لـ $\triangle AED$ ،
 $m\angle 1 = (2x + 7)^\circ$ ، $m\angle 2 = (3x + 13)^\circ$ ، فأوجد كلا من
 $m\angle 1$ ، $m\angle 2$

$$m\angle 1 = 35^\circ, m\angle 2 = 55^\circ$$



في الشكل المجاور، حدد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عموداً منصفاً، أو قطعة متوسطة، أو ارتفاعاً لـ $\triangle JKL$ في كل حالة مما يأتي:



$$\triangle JLM \cong \triangle KLM \quad (19)$$

$$\overline{LM} \perp \overline{JK} \quad (18)$$

$$\overline{LM} \perp \overline{JK}, \overline{JL} \cong \overline{KL} \quad (21)$$

$$\overline{JM} \cong \overline{KM} \quad (20)$$



**عمود منصف وقطعة متوسطة
وارتفاع**

ارتفاع

**عمود منصف وقطعة متوسطة
وارتفاع**

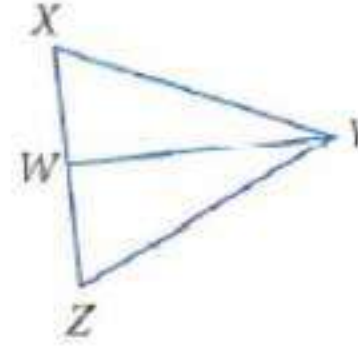
قطعة متوسطة

(22) برهان. اكتب برهاناً حرّاً.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فيه

$\overline{XY} \cong \overline{ZY}$ ، $\angle Y$ تنصف $\overline{WY}$

المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.



البرهان: بما أن $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$ ومن تعريف منتصف الزاوية تعلم أن $\angle XYW \cong \angle ZYW$ كما أن $\overline{YW} = \overline{YW}$ حسب خاصية الانعكاس. لذلك وبحسب SAS يكون $\triangle XYW \cong \triangle ZYW$.

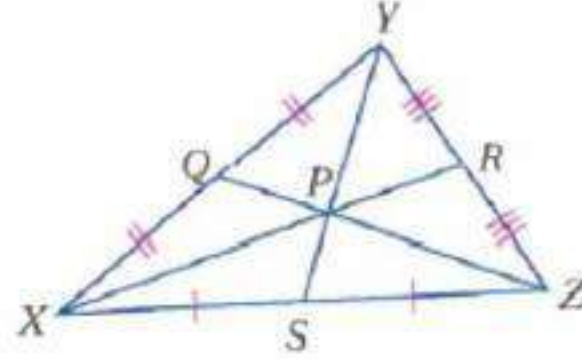
إذن $\overline{XW} \cong \overline{ZW}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة وحسب نقطة المنتصف تكون W نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ومن تعريف القطعة المتوسطة تكون $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

(23) برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XR}$, $\overline{YS}$, $\overline{ZQ}$

قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$



العبارات (المبررات)

(1) $\overline{XR}$, $\overline{YS}$, $\overline{ZQ}$ قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$ (معطيات)

(2) $XP = \frac{2}{3}XR$ (نظرية مركز المثلث)

(3) $XR = XP + PR$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

(4) $XP = \frac{2}{3}(XP + PR)$ (بالتعويض)

(5) $XP = \frac{2}{3}XP + \frac{2}{3}PR$ (خاصية التوزيع)

(6) $\frac{1}{3}XP = \frac{2}{3}PR$ (خاصية الطرح)

(7) $XP = 2PR$ (خاصية الضرب)

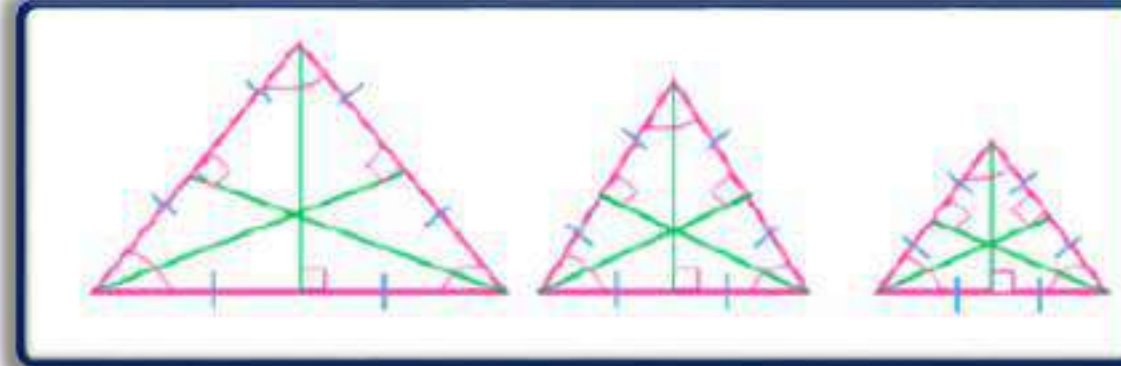
(8) $\frac{XP}{PR} = 2$ (خاصية القسمة)

(24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف مواقع نقاط التلاقي لأي مثلث متطابق الأضلاع.

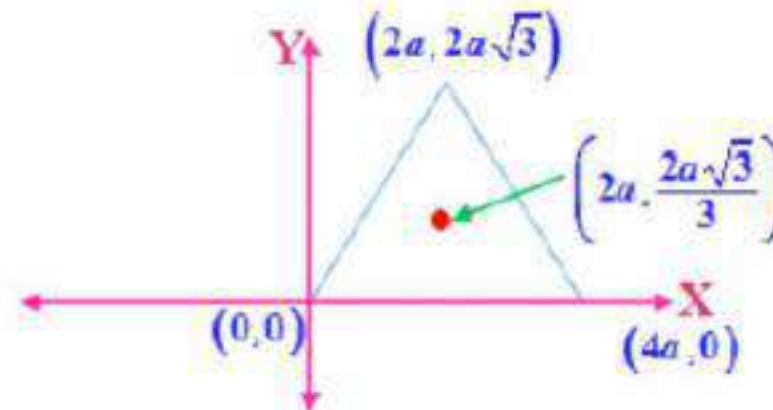
(a) **عملياً:** أنشئ ثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع ومختلفة بعضها عن بعض على ورق سهل الطي، ثم قصها. واطور كل مثلث لتحديد موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات.

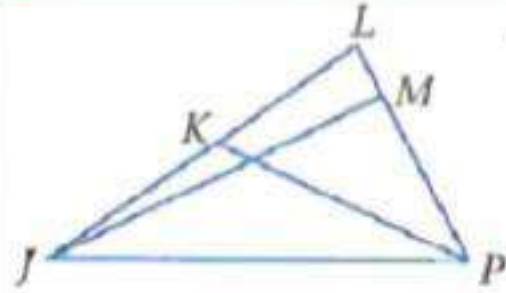
(b) **نظرياً:** خمن العلاقات بين نقاط التلاقي الأربع لأي مثلث متطابق الأضلاع.

(c) **بيانياً:** ارسم مثلثاً متطابق الأضلاع في مستوى إحداثي، وعين مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. وحدد إحداثيات كل نقطة منها.



نقطة التلاقي الأربع للمثلث متطابق الأضلاع هي النقطة نفسها.





جبر، في $\triangle JLP$ ، $LK = 5y - 8$ ، $JK = 3y - 2$ ، $m\angle JMP = (3x - 6)^\circ$.

(25) إذا كانت $\overline{JM}$ ارتفاعاً لـ $\triangle JLP$ ، فأوجد x .

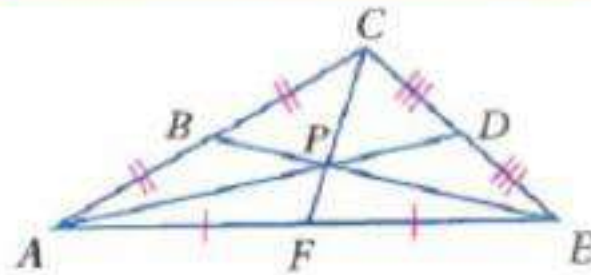
(26) إذا كانت $\overline{PK}$ قطعة متوسطة، فأوجد LK .

32

7



مهارات
التفكير العليا



(27) **اكتشف الخطأ.** قال صفوان: إن $\frac{2}{3}AP = AD$ في الشكل المجاور.

ولكن عبد الكريم لم يوافق في ذلك، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟
وضح إجابتك.

إجابة عبد الكريم هي الصحيحة فحسب نظرية مركز المثلث $AP = \frac{2}{3}AD$ وقد بدلت
أطوال القطع المستقيمة.

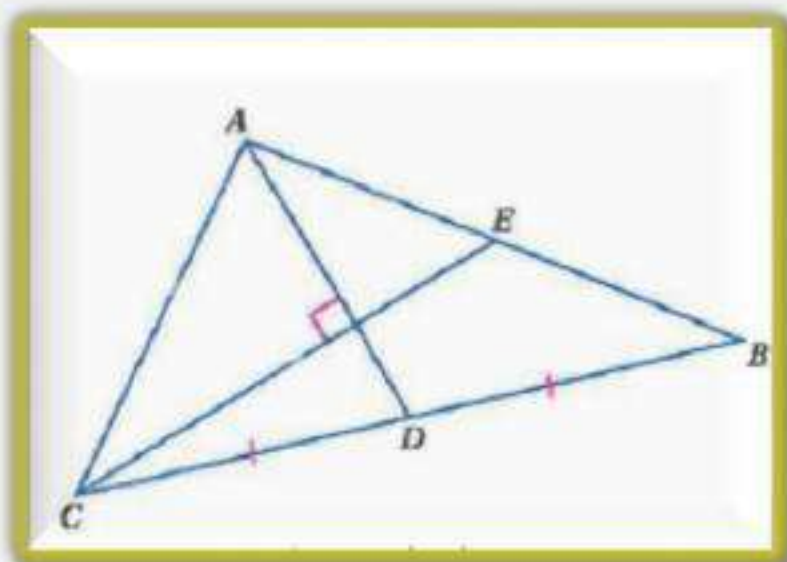


(28) **تبرير:** هل العبارة التالية صحيحة أم خطأ؟ وضح إجابتك إذا كانت صحيحة، وإلا فأعطِ مثالاً مضاداً.
”ملتقى ارتفاعات المثلث القائم الزاوية تقع عند رأس الزاوية القائمة“.

صحيحة؛ إجابة ممكنة: في المثلث قائم الزاوية، يكون الارتفاعان المرسومان من رأسي الزاويتين الحادتين هما ساقى المثلث اللذين يتقاطعان عند رأس الزاوية القائمة.

وبما أن الارتفاع إلى وتر المثلث يبدأ من الرأس فإن الارتفاعات الثلاثة تتقاطع عند رأس الزاوية القائمة. لذلك فـرأس الزاوية القائمة هو دائماً ملتقى الارتفاعات.





(29) **تحذّر:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{AD}$ ، $\overline{CE}$ قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $CE = 9$ ، $AB = 10$ ، $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ ، فأوجد CA

$$2\sqrt{13}$$

الحل

(30) **اكتب:** استعمل المساحة لتفسر لماذا يكون مركز المثلث هو نقطة اتزانه، ثم استعمل هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.

إجابة ممكنة: بما أن كل قطعة متوسطة تقسم المثلث إلى مثلثين متساويين في المساحة، فيمكن أن يتزن المثلث على أي قطعة متوسطة. ولما وزنة مثلث على نقطة، عليك أن تجد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط الاتزان الثلاثة.

ونقطة الاتزان لمستطيل هي نقطة تقاطع القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان بين منتصفى ضلعين متقابلين فيه، لأن كل قطعة واصله بين منتصفى ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين متساويين في المساحة.

الحل