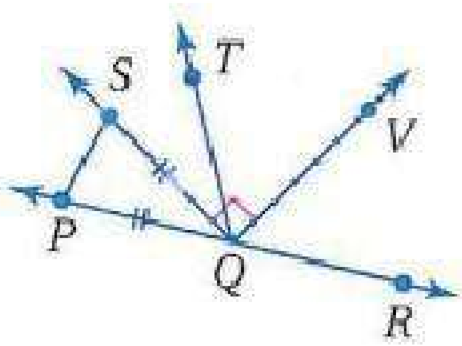
صنف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادة أو منفرجة:



1) $\angle VQS$ زاوية قائمة

2) $\angle TQV$ زاوية حادة

3) $\angle PQV$ زاوية منفرجة

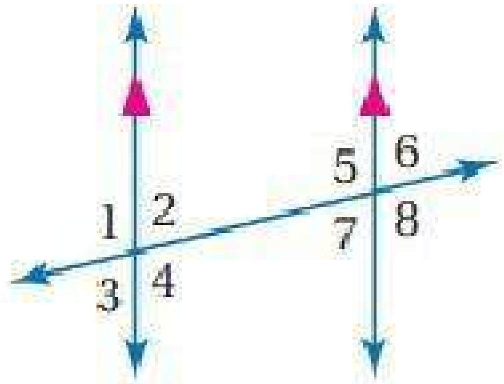
4) **تصاميم ورقية:**

$\angle 1$ قائمة

$\angle 2$ حادة

$\angle 3$ منفرجة

جبر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغير المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:



5)

$\angle 3 = \angle 6$

$x - 12 = 72$

$x = 72 + 12$

$x = 84^{\circ}$

$\angle 3, \angle 6$ متبادلتين خارجياً.

6)

$\angle 4 = \angle 5$

$2y + 32 = 3y - 3$

$-y = -3 - 32$

$y = 35^{\circ}$

$\angle 4, \angle 5$ متبادلتين داخلياً.

أوجد المسافة بين النقطتين في كل مما يأتي:

7)

$X(-2,5),\ Y(1,11)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (11-5)^2}$$

$$\sqrt{9+36} = \sqrt{45} \approx 6.7$$

المسافة بين النقطتين $x, y = 6.7$ وحدة

8)

$R\left(8,0\right),\ S\left(-9,6\right)$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(-9-8\right)^2+\left(6-0\right)^2}$$

$$\sqrt{289+36}=\sqrt{325}\approx 18.02$$

المسافة بين النقطتين $s\ ,r$ = 18.02 وحدة

خرائط:

9)

$\left(0,0\right),\ \left(5,2.2\right)$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(5-0\right)^2+\left(2.2-0\right)^2}$$

$$\sqrt{25+4.84}=\sqrt{29.84}\approx 5.46$$

$$5.46\times 35=191.1km$$

3-1 تصنيف المثلثات

تحقق

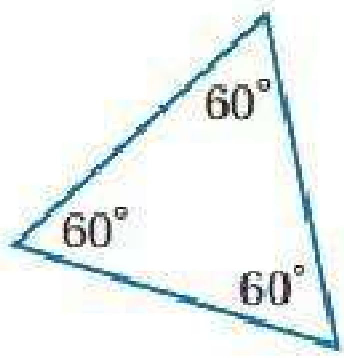
صفحة ١٤١

صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

(1A

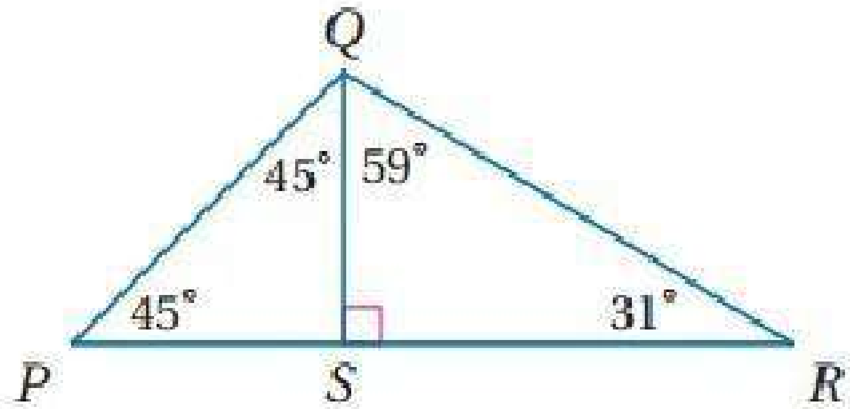
مثلث منفرج الزاوية لأنه يحتوي على زاوية = 97°

(1B



مثلث متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية.

(2

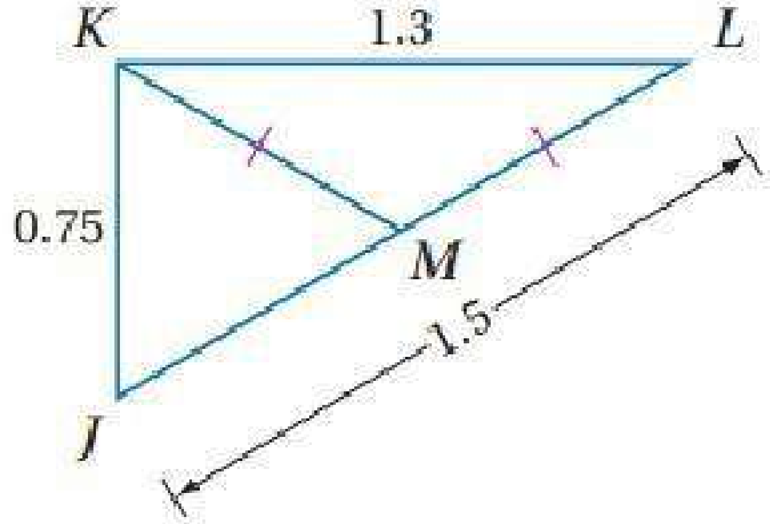


مثلث قائم الزاوية ، لأن الزاوية PQS قائمة = $45 + 45 = 90^\circ$

3) قيادة السيارة والسلامة:

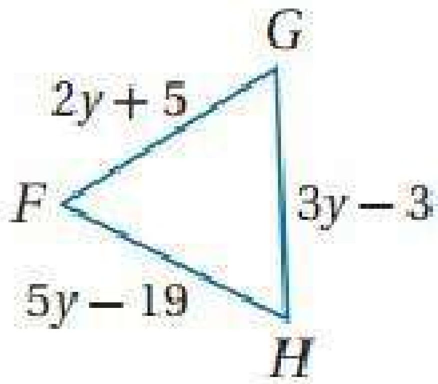
شكل زر ضوء الخطر مثلث متطابق الضلعين.

4)



ΔKML متطابق الضلعين لأن $KM = ML$

5)

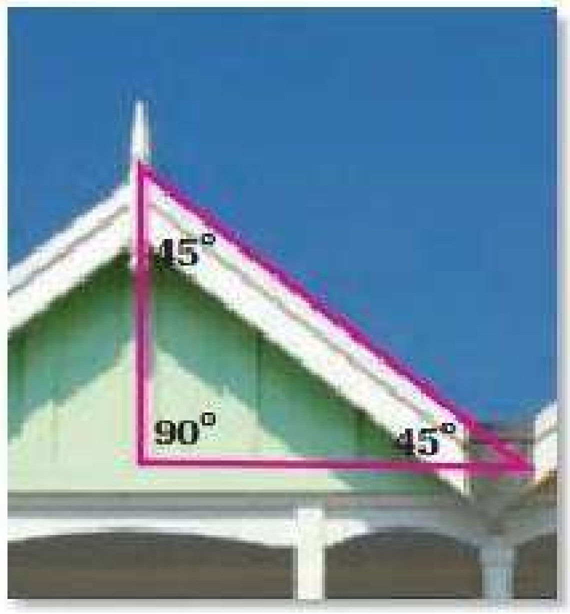


بما أن المثلث متطابق الأضلاع إذن أطوال أضلاعه جميعها متساوية

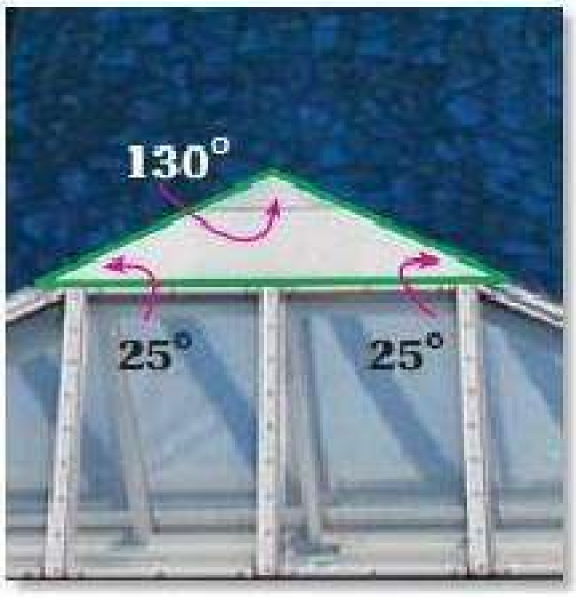
$$FG = GH$$
$$2y + 5 = 3y - 3$$
$$2y + 5 - 3y + 3 = 0$$
$$-y + 8 = 0$$
$$y = 8$$
$$FG = 2y + 5 = 2 \times 8 + 5 = 21$$
$$GH = 3y - 3 = 3 \times 8 - 3 = 21$$
$$FH = 5y - 19 = 5 \times 8 - 19 = 21$$

فن العمارة: المثال١

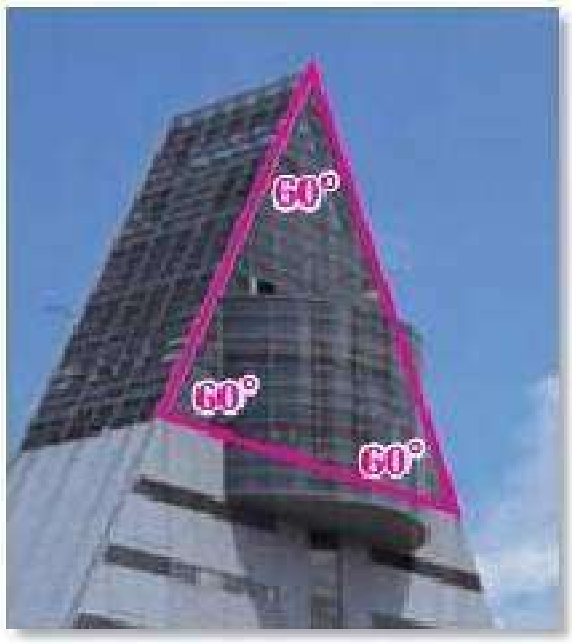
1) قائم الزاوية لأنه يحتوي على زاوية قياسها °90



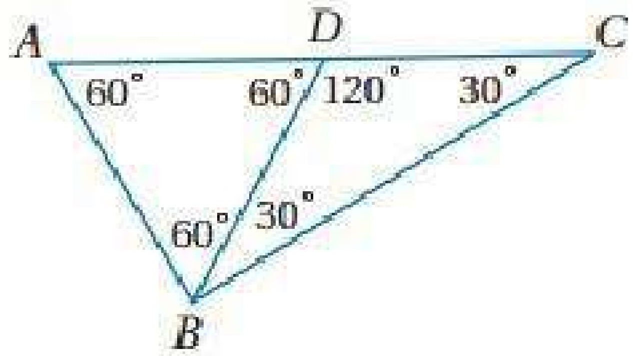
2) منفرج الزاوية لأن إحدى زواياه أكبر من °90



3) متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية



صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: المثال٢



4) $\triangle ABD$ متطابق الزوايا، **قياس كل زاوية = 60**

5) $\triangle BDC$ منفرج الزاوية، $\triangle ABD$

6) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، **لأن** $m\angle BDC = 90^\circ$

صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع: المثال٣

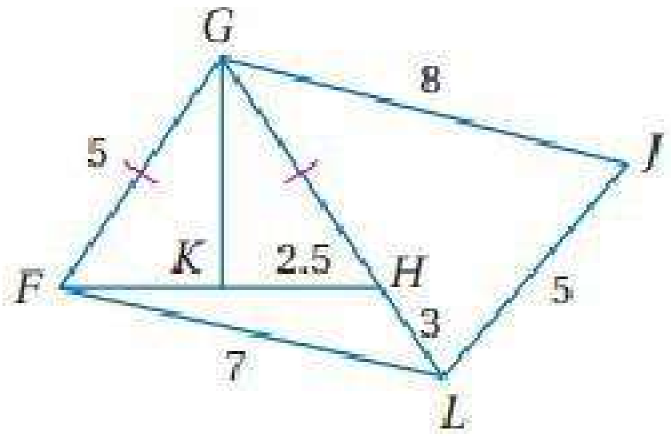
(7

متطابق الضلعين

(8

مختلف الأضلاع

إذا كانت النقطة K هي منتصف $\overline{FH}$، فصنف كلا من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع: مثال٤



9)

بما أن K في المنتصف، إذن $2.5 = FK = KH$

$$5 = 2.5 + 2.5 = FH$$

$$5 = FH = FG = HG$$

إذن المثلث ΔFGH متطابق الأضلاع لأن جميع أضلاعه متساوية.

10)

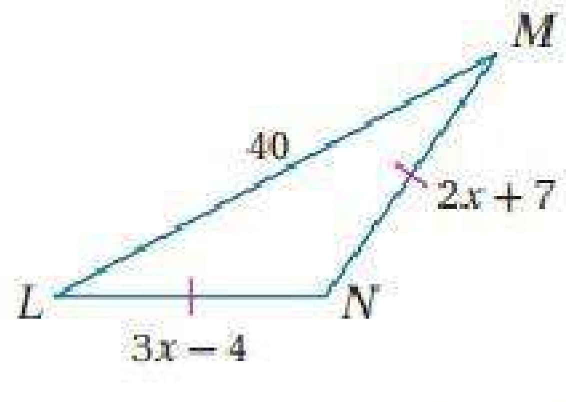
بما أن $5 = LJ = GL$ إذن ΔGJL متطابق الضلعين

11)

بما أن ΔFHL جميع أطوال أضلاعه غير متساوية إذن هو مختلف الأضلاع

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كل من المثلثين الآتيين:

12)



بما أن المثلث ΔLNM متطابق الضلعين إذن $LN = MN$

$LN = MN$

$2x + 7 = 3x - 4$

$2x - 3x = -4 - 7$

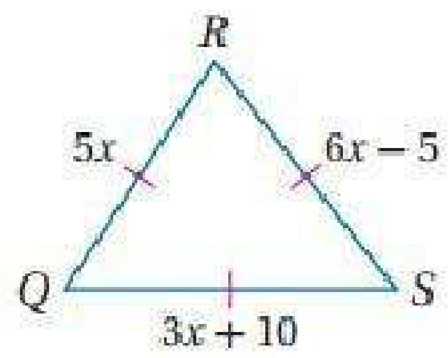
$-x = -11$

$x = 11$

$MN = 2 \times 11 + 7 = 29$

$LN = 3 \times 11 - 4 = 29$

(13



بما أن المثلث $\triangle QRS$ متطابق الأضلاع إذن $RS = QS = QR$

$6x - 5 = 5x$

$6x - 5x = 5$

$x = 5$

$QR = 5x = 5 \times 5 = 25$

$RS = 6x - 5 = 6 \times 5 - 5 = 25$

$QS = 3x + 10 = 3 \times 5 + 10 = 25$

14) مجوهرات:

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن:

$(4x - 0.8) = (3x + 0.2)$

$x = 0.8 + 0.2 = 1$

لتشكيل قرط واحد أحتاج إلى :

$$(4x-0.8)+(3x+0.2)+(2x+0.1)+1.5=$$

$$9x-0.5=9-0.5$$

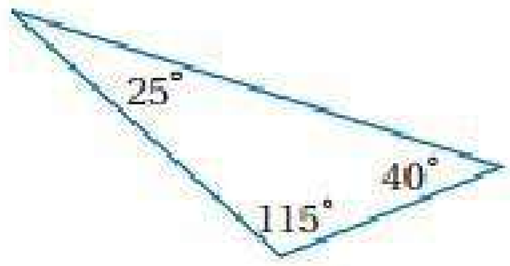
$$=8.5$$

إذن يمكن صنع قرط واحد سلك طوله ٨,٥

تدرب وحل المسائل

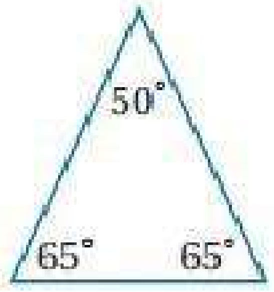
صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: المثال١

(15



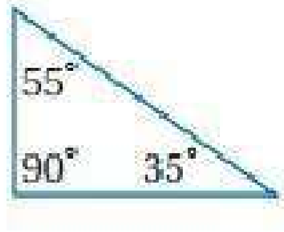
منفرج الزاوية لأنه يحتوي على زاوية أكبر من $90°$

(16



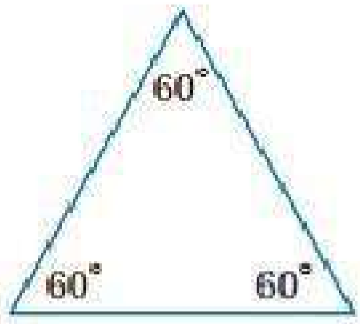
حاد الزوايا لأن جميع زواياه أقل من $90°$

(17



قائم الزاوية لأنه توجد زاوية قائمة $= 90°$

(18

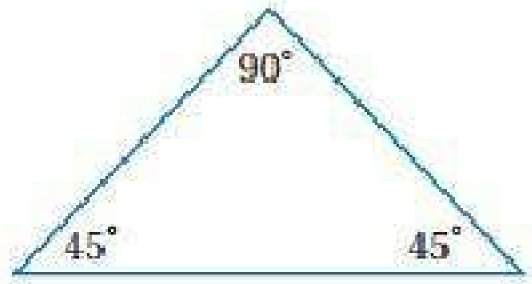


متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية

(19

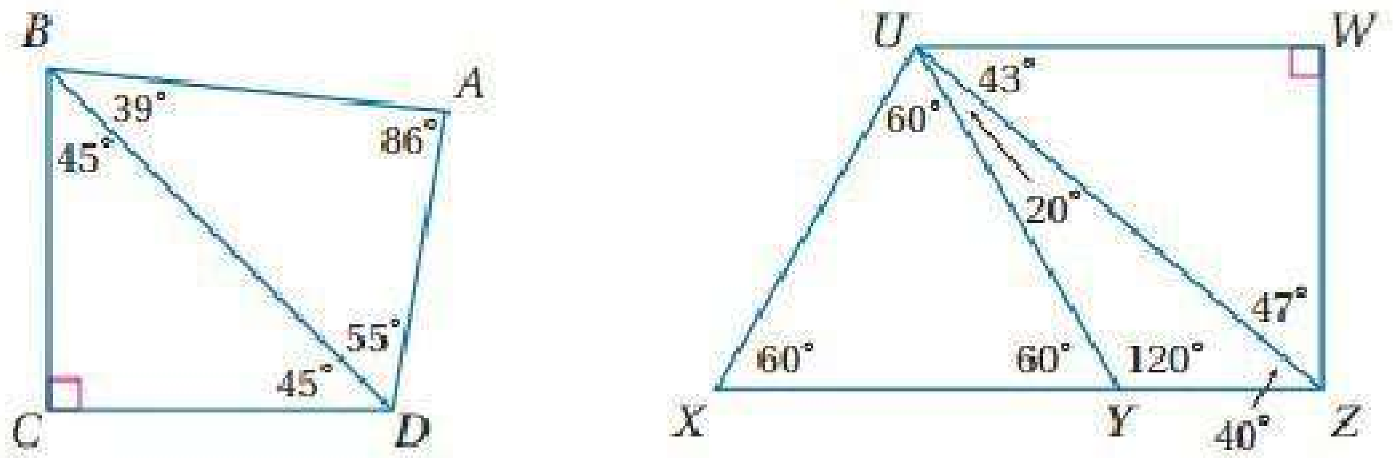
حاد الزوايا لأن جميع زواياه أقل من $90°$

(20



قائم الزاوية لأنه توجد زاوية قائمة = $90°$

صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: المثال٢



(21 ΔUYZ منفرج الزاوية، لأنه يحتوي زاوية أكبر من $90°$ وهي $120° = \angle UYZ$

(22 ΔBCD قائم الزاوية، لأنه يوجد زاوية قائمة = $90°$

(23 ΔBCD حاد الزوايا، لأن جميع زواياه أقل من $90°$

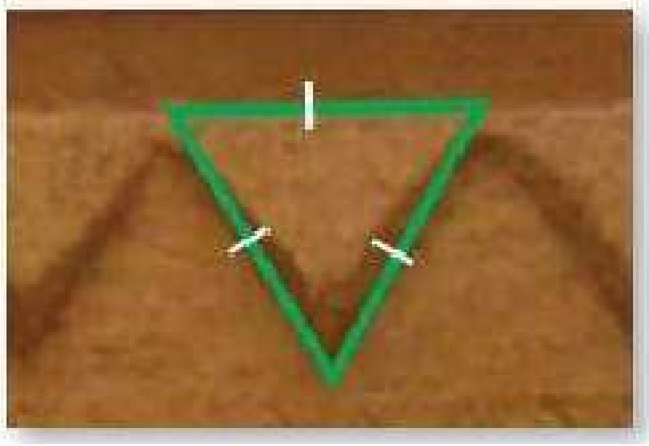
(24 ΔUXZ حاد الزوايا، لأن جميع زواياه أقل من $90°$

(25 ΔUWZ قائم الزاوية، لأنه يوجد زاوية قائمة = $90°$

(26 ΔUXY متطابق الزوايا، جميع زواياه متساوية.

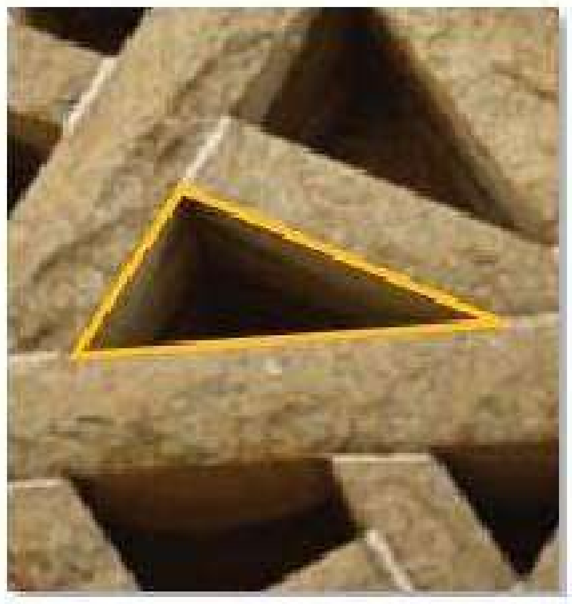
صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع: المثال٣

(27



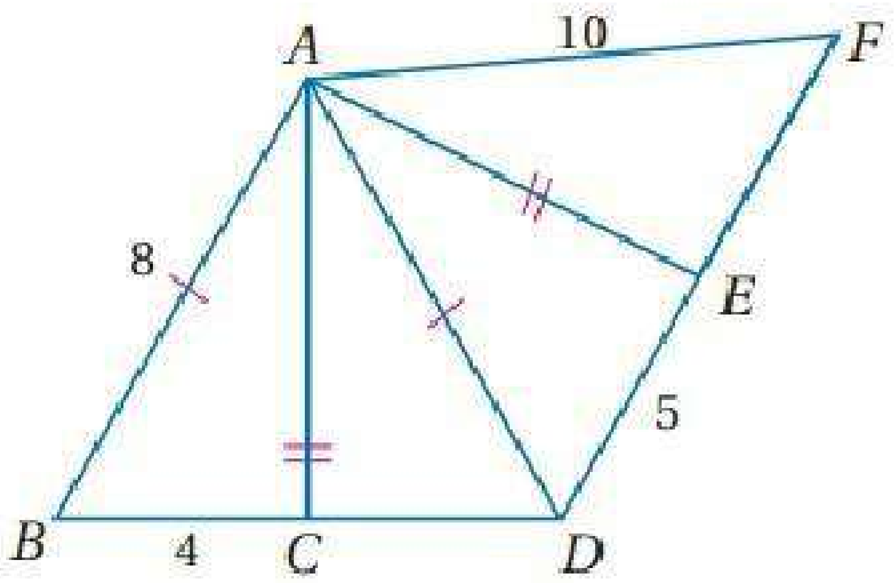
متطابق الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه متساوية.

(28



مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

إذا كانت C هي منتصف $\overline{BD}$ ، والنقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، فصنف كلا من المثلثات الآتية إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:



بما أن C هي نقطة منتصف $\overline{BD}$ إذن $\overline{BC} = \overline{CD} = 4$

وبما أن النقطة E منتصف $\overline{DF}$ إذن $\overline{EF} = \overline{ED} = 5$

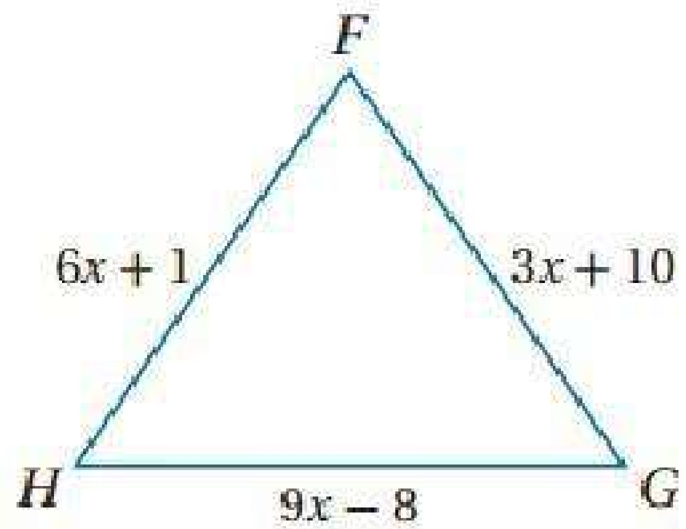
29) ΔABC **مختلف الأضلاع** لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

30) ΔADF **متطابق الضلعين** لأن $\overline{FD} = \overline{AF} = 10$.

31) ΔACD **مختلف الأضلاع** لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

32) ΔABD **متطابق الضلعين** لأن $\overline{AD} = \overline{AB} = 8$

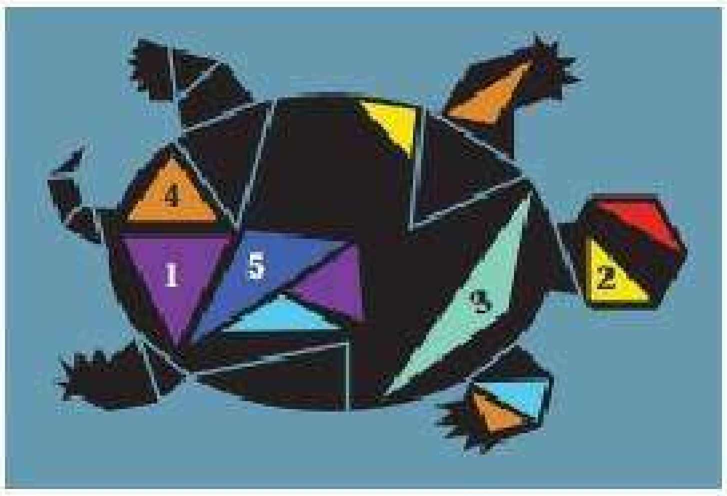
33) جبر: المثال٥



بما أن المثلث متطابق الأضلاع إذن جميع أطوال أضلاعه متساوية.

$$\overline{HF} = \overline{FG}$$
$$6x + 1 = 3x + 10$$
$$6x - 3x = 10 - 1$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$
$$\overline{HF} = 6x + 1 = 6 \times 3 + 1 = 19$$
$$\overline{FG} = 3x + 10 = 3 \times 3 + 10 = 19$$
$$\overline{HG} = 9x - 8 = 9 \times 3 - 8 = 19$$

34) فن تشكيلي:



$\Delta 1$: حاد الزوايا متطابق الضلعين

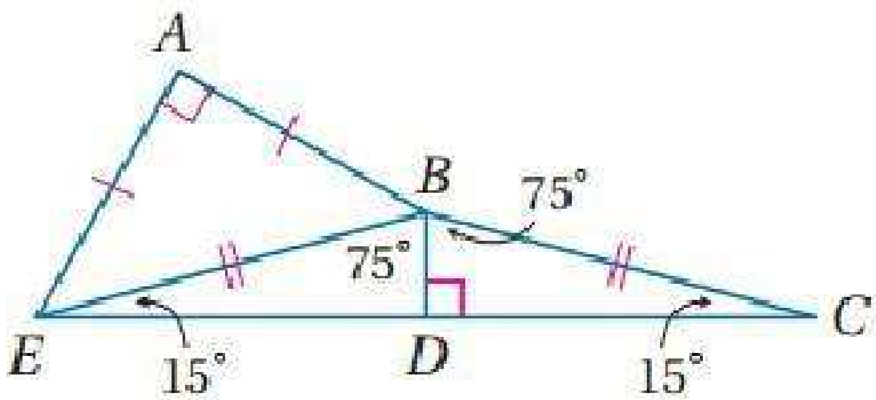
$\Delta 2$: قائم الزاوية مختلف الأضلاع

$\Delta 3$: منفرج الزاوية مختلف الأضلاع

$\Delta 4$: حاد الزوايا متطابق الأضلاع

$\Delta 5$: منفرج الزاوية مختلف الأضلاع

صنف كلا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:



35) ΔABE قائم الزاوية لأن $\angle BAE = 90°$ ومتطابق الضلعين لأن $\overline{AE} = \overline{AB}$

36) ΔEBC منفرج الزاوية لأن $\angle EBC = 150°$ ومتطابق الضلعين $\overline{BE} = \overline{BC}$

37) ΔBDC قائم الزاوية ومختلف الأضلاع

هندسة إحداثية:

38)

$X(-5,9),\ Y(2,1),\ Z(-8,3)$

$X(-5,9),\ Y(2,1)$

$$d_{(X,Y)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2-(-5))^2+(1-9)^2}$$

$$\sqrt{49+64}=\sqrt{113}$$

$Y(2,1),\ Z(-8,3)$

$$d_{(Y,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-8-2)^2+(3-1)^2}$$

$$\sqrt{100+4}=\sqrt{104}$$

$X(-5,9),\ Z(-8,3)$

$$d_{(X,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-8-(-5))^2+(3-9)^2}$$

$$\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

المثلث XYZ مختلف الأضلاع لأن جميع أطواله غير متساوية.

39)

$X(7,6),\ Y(5,1),\ Z(9,1)$

$X(7,6),\ Y(5,1)$

$d_{(X,Y)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-7)^2+(1-6)^2}$

$\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

$Y(5,1),\ Z(9,1)$

$d_{(Y,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(9-5)^2+(1-1)^2}$

$\sqrt{16+0}=\sqrt{4}$

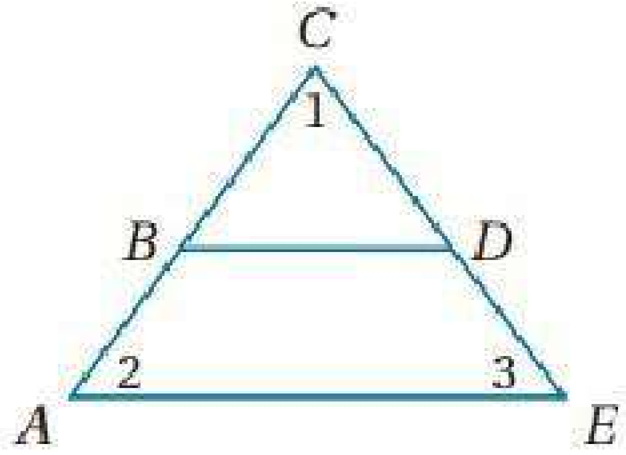
$X(7,6),\ Z(9,1)$

$d_{(X,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(9-7)^2+(1-6)^2}$

$\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

المثلث XYZ متطابق الضلعين لأن $\overline{XZ}=\overline{XY}$

40) برهان:



1) ΔACE متطابق الزوايا و $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ (معطيات)

2) $\angle 3 \cong \angle 2 \cong \angle 1$ (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

3) $\angle CBD \cong \angle 2$ و $\angle CDB \cong \angle 3$ (مسلمة الزاويتين المتناظرتين)

4) $\angle CDB \cong \angle CBD \cong \angle 1$

5) ΔBCD متطابق الزوايا(تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

جبر: أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كل مما يأتي:

(41

ΔFGH متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية

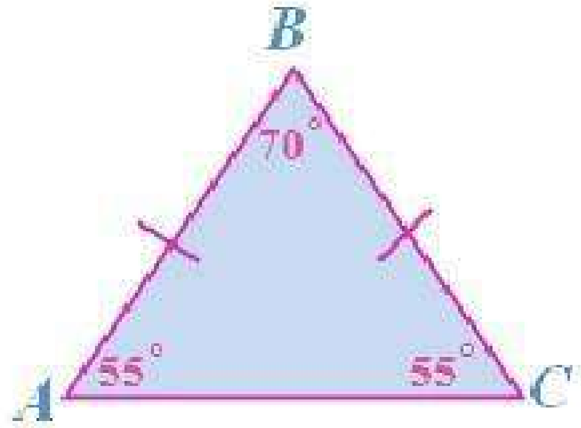
$$HF = GH$$
$$x + 20 = 2x + 5$$
$$x - 2x = 5 - 20$$
$$-x = -15$$
$$x = 15$$
$$HF = x + 20 = 15 + 20 = 35$$
$$GH = 2x + 5 = 2 \times 15 + 5 = 35$$
$$FG = 3x - 10 = 3 \times 15 - 10 = 35$$

(42

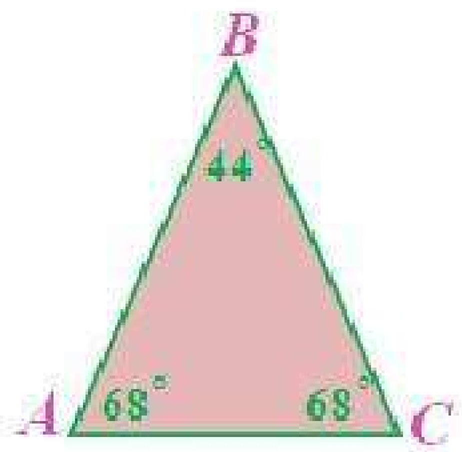
$\triangle RST$ متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية

$$RS = 4x + 3$$
$$ST = 2x + 7$$
$$TR = 5x + 1$$
$$RS = ST$$
$$4x + 3 = 2x + 7$$
$$4x - 2x = 7 - 3$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$
$$RS = 4x + 3 = 4 \times 2 + 3 = 11$$
$$ST = 2x + 7 = 2 \times 2 + 7 = 11$$
$$TR = 5x + 1 = 5 \times 2 + 1 = 11$$

43) تمثيلات متعددة:a) هندسيا:

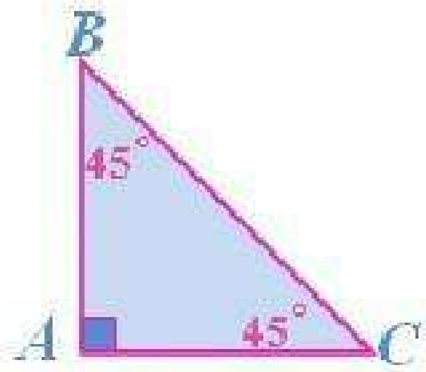


مثلث متطابق الأضلاع

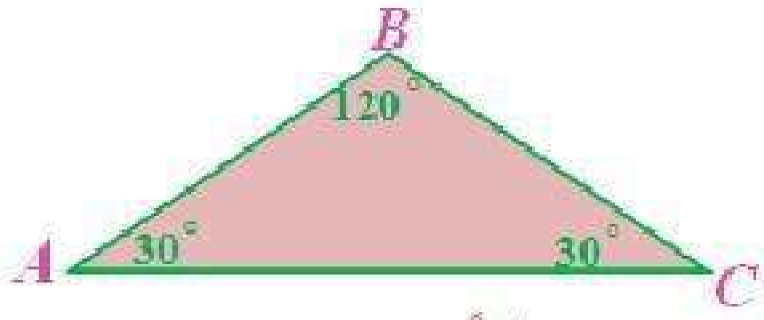


مثلث حاد الزوايا

مثلث قائم الزاوية



مثلث منفرج الزاوية



b) جدولياً:

مجموع قياسات الزوايا	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle A$
١٨٠	٧٠	٥٥	٥٥
١٨٠	٤٤	٦٨	٦٨
١٨٠	٩٠	٤٥	٤٥
١٨٠	١٢٠	٣٠	٣٠

c) لفظيا: الزاويتان المقابلتان للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين متطابقان، ومجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي $180°$

d) جبريا:

إذا كان للزاويتين المقابلتين للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين القياس نفسه وكان قياس إحداهما x، فان قياس الأخرى يساوي x وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي 180° فان قياس الزاوية الثالثة يساوي $180 - 2x$

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٤) اكتشف الخطأ:

ليلي إجابتها صحيحة، في أي مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل لذا فبحسب كلام نوال فان جميع المثلثات تصنف على أنها حادة الزوايا، وهذا غير صحيح، حيث تصنف المثلثات وفقا للزاوية الثالثة. فإذا كانت الزاوية الثالثة حادة، فالمثلث حاد الزوايا وإذا كانت منفرجة، فالمثلث منفرج الزاوية.

تبرير:

45) غير صحيحة أبدا، جميع المثلثات المتطابقة الزوايا فيها ثلاثة زوايا قياس كل منها 60 ولذلك فإنها لا تحتوى زاوية قياسها 90 فلا يمكن أن تكون قائمة الزاوية.

46) صحيحة دائما، المثلث المتطابق الأضلاع فيه ثلاثة أضلاع لها الطول نفسه والمثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان على الأقل لهما الطول نفسه ولذا فان جميع المثلثات المتطابقة الأضلاع تكون متطابقة الضلعين أيضا

47) تحد:

بما أن المثلث متطابق الأضلاع فان أطوال أضلاعه متساوية ويكون محيط المثلث المتطابق الأضلاع هو مجموع أطوال أضلاعه أو ثلاثة أمثال طول احد أضلاعه إذن محيط المثلث = $23 \times 3 = 69$

$$7x - 5 = 5x + 3$$

$$7x - 5x = 3 + 5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$7x - 5 = 7 \times 4 - 5 = 23$$

48) اكتب:

في المثلث الحاد الزوايا ثلاثة زوايا حادة والمثلث المتطابق الزوايا فيه ثلاث زوايا قياس كم منها 60 وبما أن الزوايا التي قياسها 60 هي زوايا حادة فان جميع المثلثات المتطابقة الزوايا هي مثلثات حادة الزوايا.

تدريب على الاختبار المعياري

49) C

$$84.50 \times \frac{40}{100} = 33.8$$

50) D

$$2x + y = 5$$
$$y = 5 - 2x$$
$$m = -2$$

مراجعة تراكمية

اوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين في كل مما يأتي:

51)

$(-2,0),(5,0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-(-2))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{49} = 7$$

52)

رسم مستقيم عمودي على المستقيمين المتوازيين ويمر بالنقطة $(0,-4)$وميله = -1

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \rightarrow y + 4 = -1(x - 0)$$
$$y = -x - 4$$
$$-x - 4 = x + 2$$
$$-2x = 6$$
$$x = -3$$
$$y = -x - 4$$
$$y = -(-3) - 4$$
$$y = -1$$

$$(-3, -1),\ (0, -4)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (-4 - (-1))^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

53) كرة قدم: المستقيمان العموديان على مستقيم آخر متوازيان.

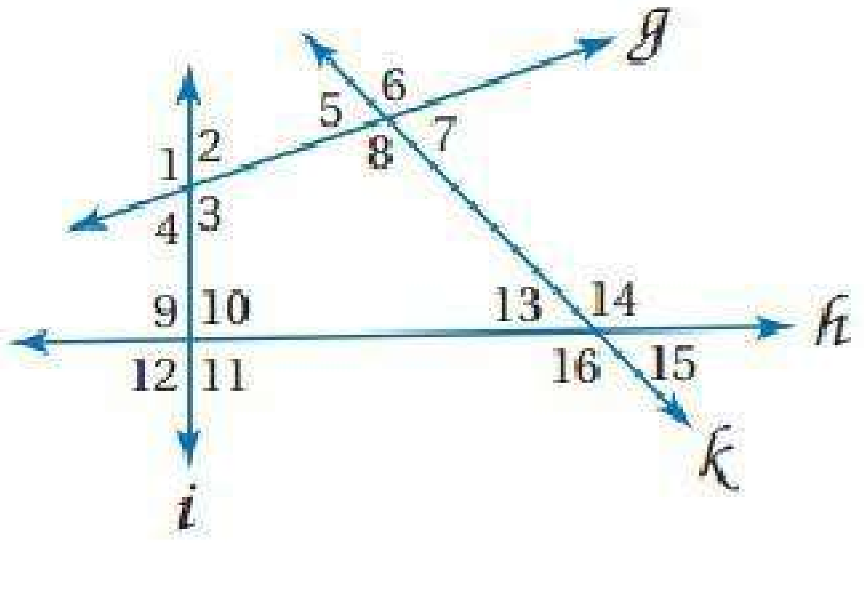
حدد الفرض والنتيجة في كل جملة شرطية فيما يأتي:

54) الفرض: كون الرجل كهلاً ، النتيجة: عمره 40 سنة على الأقل

55) الفرض: $2x + 6 = 10$ ، النتيجة: $x = 2$

استعد للدرس اللاحق

صنف كل زوج من الزوايا مما يأتي إلي متبادلتين داخليا أو متبادلتين خارجيا أو متناظرتين أو متخالفتين:



56) $\angle 5, \angle 3$: متبادلتان داخليا

57) $\angle 9, \angle 4$: متحالفتان داخليا

58) $\angle 11, \angle 13$: متبادلتان داخليا

59) $\angle 1, \angle 11$: متبادلتان خارجيا

زوايا المثلثات

حل النتائج:

1) زاوية مستقيمة أو خط مستقيم

2) 180°

3) $m\angle A + m\angle B$ يساوي قياس الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle C$

4) تختلف إجابات الطالب.

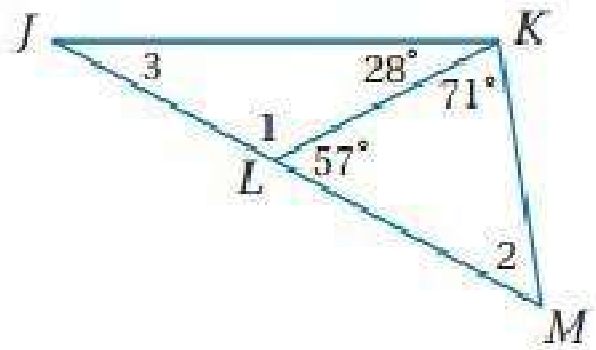
5) قياس الزاوية الخارجية يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين غير المجاورتين لها.

3-2 زوايا المثلثات

تحقق

صفحة ١٤٩

(1A



مجموع قياسات زوايا المثلث ΔLKM و ΔJKL = 180°

والزاويتان المتجاورتان على مستقيم = 180°

ΔLKM

$71^\circ + 57^\circ + \angle 2 = 180^\circ$

$\angle 2 = 180^\circ - 128$

$\angle 2 = 52^\circ$

$\angle 1 = 180^\circ - 57^\circ$

$\angle 1 = 123^\circ$

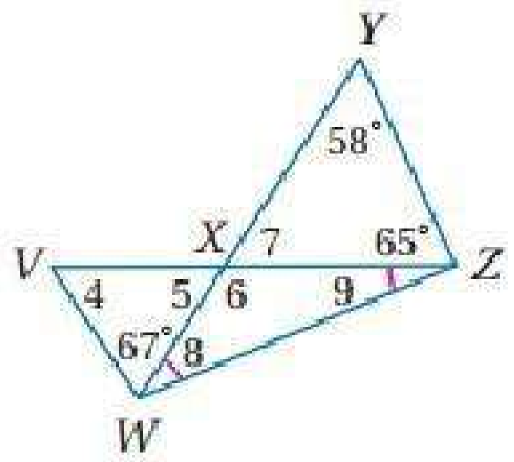
ΔJKL

$28^\circ + 123^\circ + \angle 3 = 180^\circ$

$\angle 3 = 180^\circ - 151^\circ$

$\angle 3 = 29^\circ$

(1B



ΔXYZ

$58^\circ + 65^\circ + \angle 7 = 180^\circ$

$123^\circ + \angle 7 = 180^\circ$

$\angle 7 = 57^\circ$

$\angle 7 = \angle 5 = 57^\circ$ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

ΔVXW

$67^\circ + 57^\circ + \angle 4 = 180^\circ$

$124^\circ + \angle 4 = 180^\circ$

$\angle 4 = 56^\circ$

$\angle 6 = 180^\circ - \angle 7$

$\angle 6 = 180^\circ - 57^\circ$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$\angle 6 = 123^\circ$

$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 9 + \angle 8)$

$123^\circ = 180^\circ - (\angle 9 + \angle 8)$

$\angle 9 = \angle 8$

$123^\circ = 180^\circ - (\angle 8 + \angle 8)$

$123^\circ = 180^\circ - 2\angle 8$

$2\angle 8 = 180^\circ - 123^\circ$

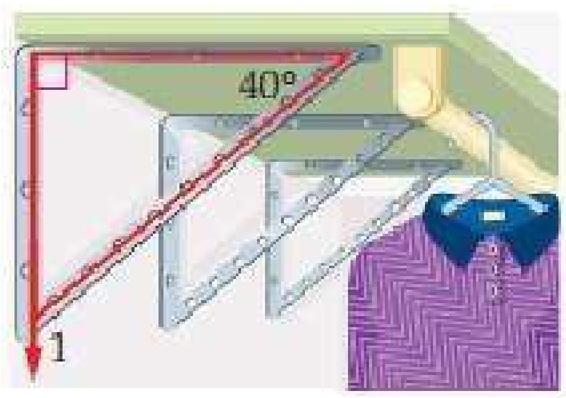
$2\angle 8 = 57^\circ$

$\angle 8 = 57^\circ \div 2$

$\angle 8 = 28.5^\circ$

$\angle 9 = 28.5^\circ$

2) تنظيم خزانة الملابس

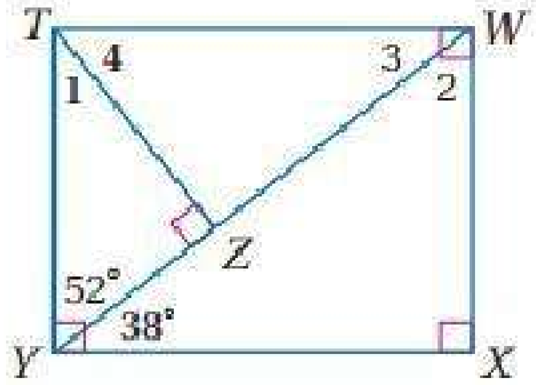


الزاوية الخارجة عن المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخلتين البعيدتين (نظرية الزاوية الخارجة)

$\angle 1 = 90^\circ + 40^\circ$

$\angle 1 = 130^\circ$

3A)



$\angle 2 + \angle WYX = 90^\circ$ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

$\angle 2 + 38^\circ = 90^\circ$

$\angle 2 = 52^\circ$

3B)

$\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$

$\angle 3 + 52^\circ = 90^\circ$

$\angle 3 = 90^\circ - 52^\circ$

$\angle 3 = 38^\circ$

3C)

$\angle 4 + \angle 3 = 90^\circ$ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

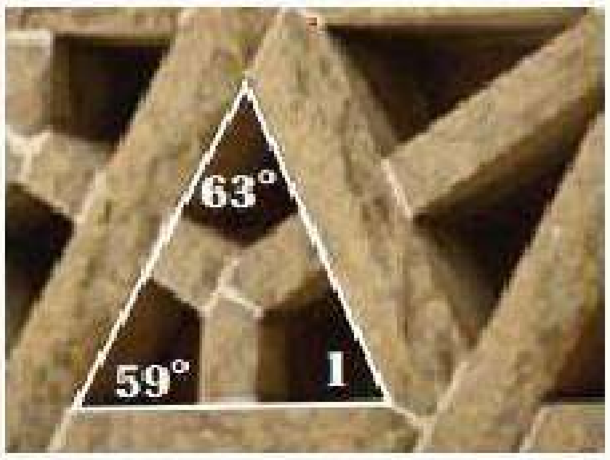
$\angle 4 + 38^\circ = 90^\circ$

$\angle 4 = 90^\circ - 38^\circ$

$\angle 4 = 52^\circ$

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين: المثال١

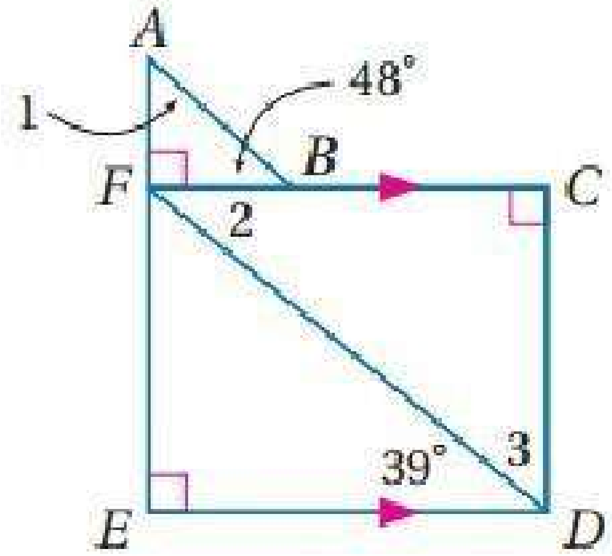
1)



بما أن زوايا المثلث الداخلة = 180° إذن:

$$\angle 1 = 180^\circ - (63^\circ + 59^\circ)$$
$$\angle 1 = 58^\circ$$

2)



$$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 48^\circ)$$
$$\angle 1 = 42^\circ$$

$\angle 2 = 39^\circ$ **نظرية الزاويتان المتبادلتان داخلياً**

$$\angle 3 = 90^\circ - 39^\circ$$
$$\angle 3 = 51^\circ$$

كراسي الشاطئ: المثال٢

3)

$\angle 2 + 53^\circ = 102^\circ$

نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$\angle 2 = 102^\circ - 53^\circ$

$\angle 2 = 49^\circ$

4)

$\angle 4 = 180 - 53^\circ$

$\angle 4 = 127^\circ$

5)

$\angle 1 = 180^\circ - 102^\circ$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 1 = 78^\circ$

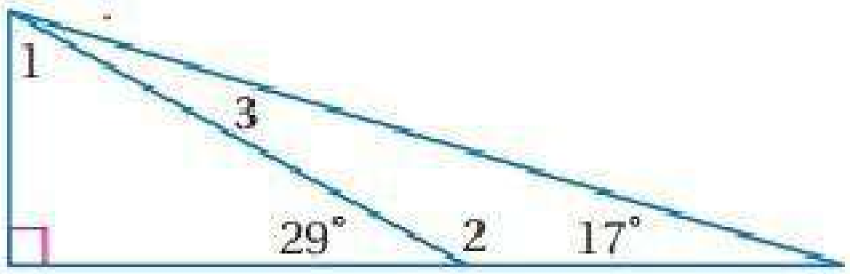
6)

$\angle 3 = 180 + \angle 3$

$\angle 3 = 180^\circ + 49^\circ$

$\angle 3 = 131^\circ$

معتمدا على الشكل المجاور أوجد القياسات التالية:



7)

$$\angle 1 = 180 - \left(90^\circ + 29^\circ\right)$$
$$\angle 1 = 61^\circ$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

8)

$$\angle 1 + \angle 3 = 180 - \left(90^\circ + 17^\circ\right)$$
$$61^\circ + \angle 3 = 73^\circ$$
$$\angle 3 = 12^\circ$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

9)

$$\angle 2 = 180 - \left(\angle 3 + 17^\circ\right)$$
$$\angle 2 = 180 - \left(12^\circ + 17^\circ\right)$$
$$\angle 2 = 151^\circ$$

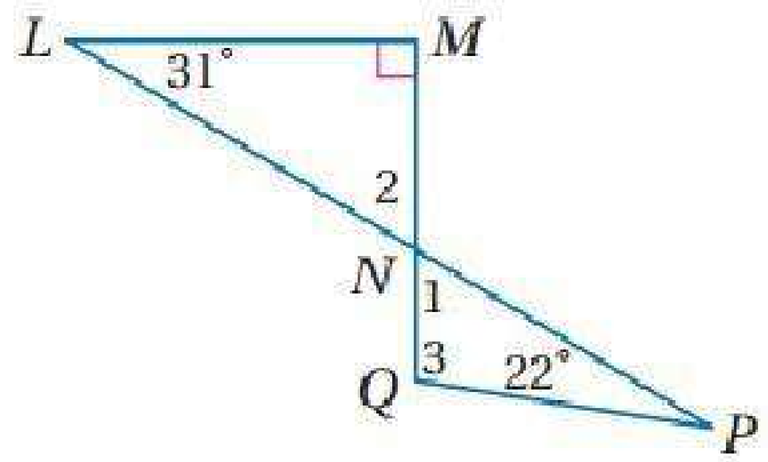
نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

تدرب وحل المسائل

أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين:

10)

$$\angle 1 = 180 - \left(59^\circ + 61^\circ\right)$$
$$\angle 1 = 60^\circ$$



11)

$\angle 2 = 180 - (31^\circ + 90^\circ)$

$\angle 2 = 59^\circ$

$\angle 2 = \angle 1 = 59^\circ$ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

$\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + 22)$

$\angle 3 = 180^\circ - (59 + 22)$

$\angle 3 = 99^\circ$

12) طائرات:

a) متطابق الضلعين، منفرج الزاوية

(b

بما أن زاوية الهبوط والإقلاع متطابقتين فإنهما متساويتان

وبما أن مجموع زوايا المثلث = °180 إذن:

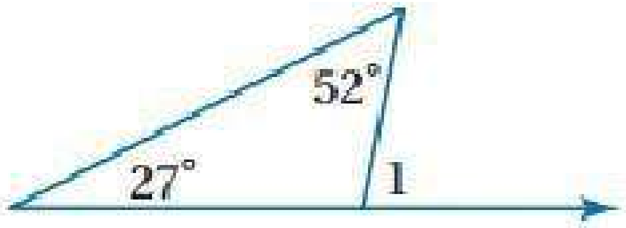
$7 = 180^\circ - 173^\circ$

$3.5 = 2 \div 7^\circ$

زاوية الهبوط والإقلاع = 3.5°

اوجد كلا من القياسات الآتية: المثال٢

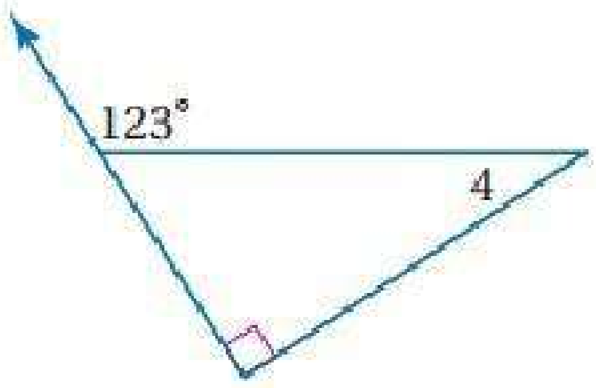
13)



$\angle 1 = 27^\circ + 52^\circ = 79^\circ$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

14)

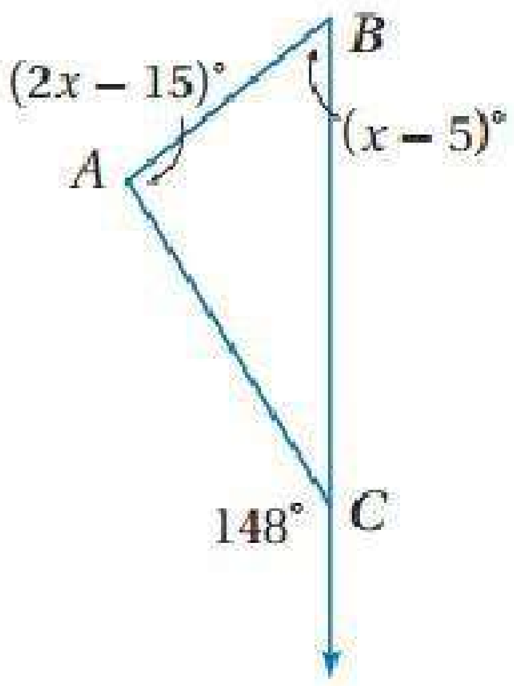


$123 = \angle 4 + 90^\circ$

$\angle 4 = 123^\circ - 90^\circ = 33^\circ$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

15)



$148 = (2x - 15) + (x - 5)$

$148 = 3x - 20$

$148 + 20 = 3x$

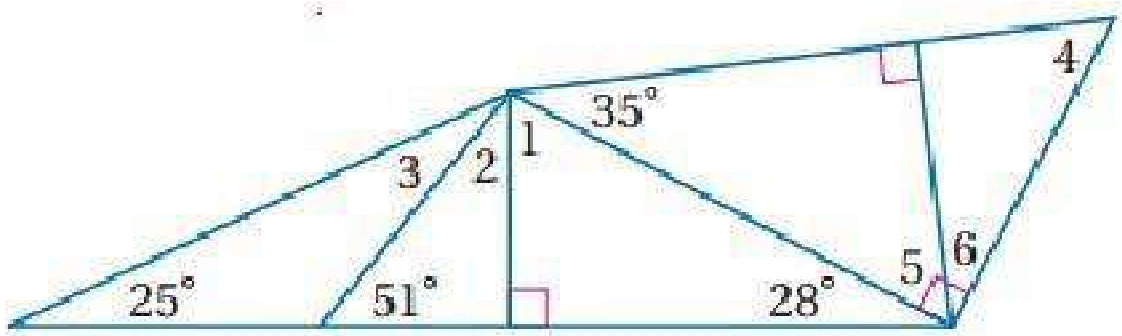
$168 = 3x$

$x = 56^\circ$

$\angle ABC = x - 5 = 56 - 5 = 51^\circ$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

اوجد كلا من القياسات الآتية: المثال٣



16)

$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 28^\circ)$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 1 = 62^\circ$

17)

$\angle 2 = 180^\circ - (90^\circ + 51^\circ)$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 2 = 39^\circ$

18)

$\angle 3 = 180^\circ - (129^\circ + 25^\circ)$

$\angle 3 = 26^\circ$

نظرية الزاويتان المتجاورتان للزاوية 51° ونظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

19)

$\angle 5 = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ)$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 5 = 55^\circ$

20) نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 4 = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ)$

$\angle 4 = 55^\circ$

21)

$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 4 + 90^\circ)$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 6 = 180^\circ - (55 + 90^\circ)$

$\angle 6 = 35^\circ$

22) بستنة:

$\angle A = 3\angle B,\ \angle A = 3\angle C$

$\angle A = 180 - (\angle B + \angle C)$ **مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°**

$3(\angle B) = 180 - (\angle B + \angle C)$

$3(\angle C) = 180 - (\angle B + \angle C)$

$3(\angle B) = 180 - \angle B - \angle C$

$4\angle B = 180 - C$

$4\angle B + C = 180 \rightarrow 1$

$3(\angle C) = 180 - \angle B - \angle C$

$4\angle C = 180 - B$

$4\angle C + B = 180 \quad \times -4$

$-4B - 16\angle C = -720 \rightarrow 2$

$\cancel{-}15\angle C = \cancel{-}540$

$\angle C = \dfrac{540}{15}$

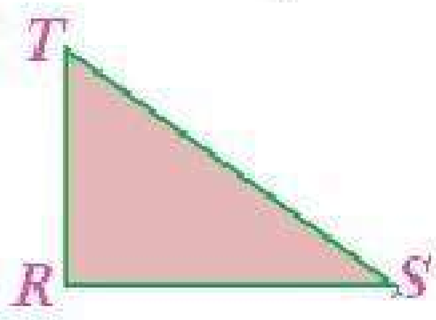
$\angle C = 36^\circ$ **بجمع المعادلتين ١ و ٢**

$\angle B = 36^\circ$

$\angle A = 3\angle B = 3 \times 36 = 108^\circ$

براهين: برهن كل مما يأتي مستعملا طريقة البرهان المذكورة:

23) النتيجة ٣,١ باستعمال البرهان التسلسلي.



$m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180^\circ$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle R$ زاوية قائمة

معطى

$m\angle R = 90^\circ$

تعريف الزاوية القائمة

$90 + m\angle S + m\angle T = 180^\circ$

بالتعويض

$m\angle S + m\angle T = 90^\circ$

خاصية الطرح للمساواة

$m\angle S, m\angle T$ زاويتان متتامتان

تعريف الزاويتان المتتامتان

٢٤) النتيجة ٣,٢ باستعمال البرهان الحر

البرهان:

ΔMNO فيه $\angle M$ قائمة.

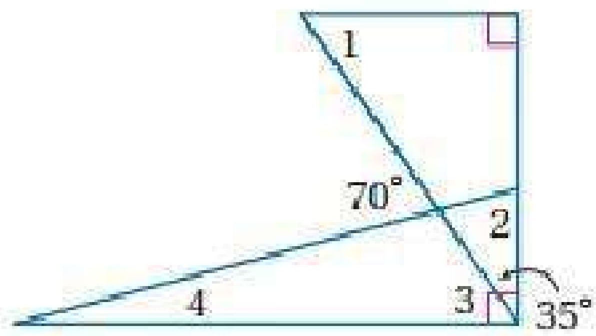
$m\angle O + m\angle N + m\angle M = 180^\circ$. $m\angle M = 90^\circ$، ولذلك فإن

$m\angle O + m\angle N = 90^\circ$. فإذا كانت N زاوية قائمة فسيكون

$m\angle O = 0^\circ$. وهذا مستحيل. لذلك لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان قائمتان.

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة فيما يأتي:

25)



$m\angle 1 = 180 - \left(35^\circ + 90^\circ\right)$

$m\angle 1 = 180^\circ + 125^\circ$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$m\angle 1 = 55^\circ$

الزاوية المجاورة ل 70° = 110° حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم.

وكذلك الزاوية لمجاورة ل $110^\circ = 70^\circ$ حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم.

$m\angle 2 = 180 - \left(70^\circ + 35^\circ\right)$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$m\angle 2 = 75^\circ$

$m\angle 4 = 180 - \left(m\angle 2 + 90^\circ\right)$

$m\angle 4 = 180 - \left(75^\circ + 90^\circ\right)$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

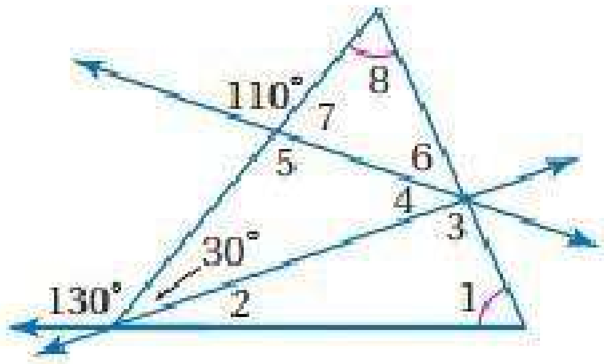
$m\angle 4 = 15^\circ$

$m\angle 3 = 180^\circ - \left(m\angle 4 + 110^\circ\right)$

$m\angle 3 = 180^\circ - \left(15^\circ + 110^\circ\right)$

$m\angle 3 = 55^\circ$

(26



$m\angle 7 = 180^\circ - 110^\circ$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$m\angle 7 = 70^\circ$

$m\angle 5 = 110^\circ$ بالتقابل بالرأس

$m\angle 4 = 180^\circ - \left(110^\circ + 30^\circ\right)$

$m\angle 4 = 40^\circ$

$m\angle 2 = 180^\circ - \left(130^\circ + 30^\circ\right)$

$m\angle 2 = 20^\circ$

$\left(\angle 30^\circ + \angle 2\right) + \left(\angle 8 + \angle 1\right) = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$\because \angle 8 = \angle 1$

$\left(30^\circ + 20^\circ\right) + \left(\angle 1 + \angle 1\right) = 180$

$50^\circ + 2\angle 1 = 180$

$2\angle 1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$\angle 1 = 65^\circ$

$\angle 8 = 65^\circ$

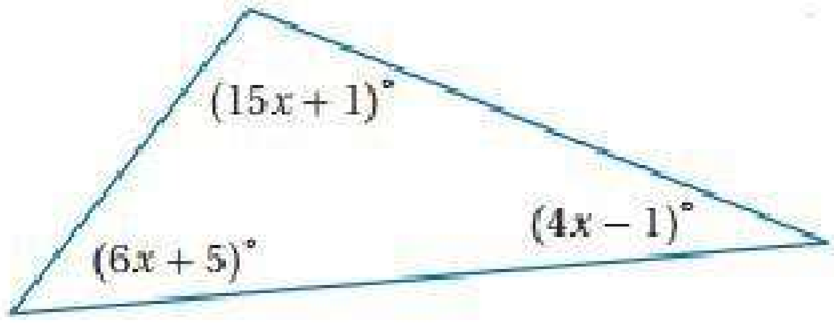
$\angle 6 = 180^\circ - \left(\angle 8 + \angle 7\right)$

$\angle 6 = 180^\circ - \left(65^\circ + 70^\circ\right)$

$\angle 6 = 49^\circ$

$$\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2)$$
$$\angle 3 = 180^\circ - (65^\circ + 20^\circ)$$
$$\angle 3 = 95^\circ$$

27) جبر: صنف المثلث المجاور وفقا لزواياه. وفسر إجابتك.



منفرج الزاوية لأن مجموع قياسات الزوايا 180، لذلك فان $x = 7$ ، وبالتعويض في العبارات الثلاث نجد أن قياسات الزوايا الثلاث هي 27 , 47 , 106

$$(15x+1)+(6x+5)+(4x-1)=180^\circ$$
$$25x+5=180^\circ$$
$$25x=175$$
$$x=7$$
$$15x+1=15\times 7+1=106^\circ$$
$$6x+5=47^\circ$$
$$4x-1=27^\circ$$

28) قرر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة:

صحيحة، بما أن مجموع قياسي الزاويتين الحادتين أكبر من 90 فان قياس الزاوية الثالثة يساوي 180 ناقصا عددا أكبر من 90، وسيكون ناتج الطرح أقل من 90 بالتأكيد وعليه فان زوايا هذه المثلث الثلاث حداة وهو مثلث حاد الزوايا.

29) سيارات:

(a

حسب نظرية مجموع زوايا المثلث

$$\angle 2 = 180 - \left(70^\circ + 71^\circ\right)$$
$$\angle 2 = 39^\circ$$

حسب نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$$\angle 1 = \left(70^\circ + 71^\circ\right)$$
$$\angle 1 = 141^\circ$$

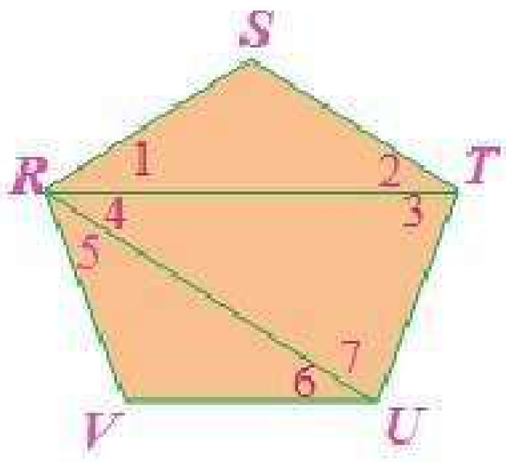
b) سوف يزداد قياس الزاوية 1، لان غطاء السيارة سيقترب من الساق الأخرى للمثلث المحاذية لرفوف السيارة.

c) سوف يقل قياس الزاوية2 ، لان قياس الزاوية 1 سوف يزداد ولان هاتين الزاويتين متجاورتان على مستقيم.

برهان:

30) برهان ذو عمودين:

$1) RSTUV$ خماسي (معطى)



$2) m\angle S + m\angle 1 + m\angle 2 = 180,\ m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 7 = 180,$
$m\angle 6 + m\angle V + m\angle 5 = 180$

(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

$3) m\angle S + m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 7 + m\angle 6 +$
$m\angle V + m\angle 5 = 540$

خاصية الجمع للمساواة

$4) m\angle VRS = m\angle 1 + m\angle 4 + m\angle 5$

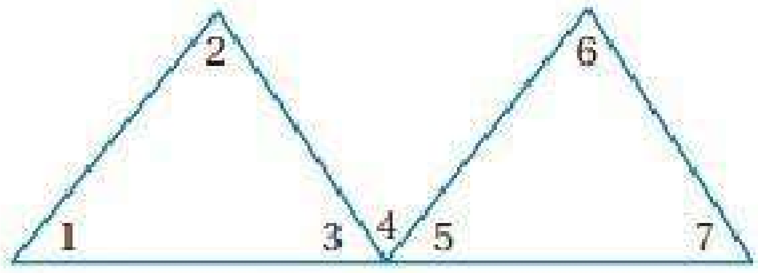
$m\angle TUV = m\angle 7 + m\angle 6,\ m\angle STU = m\angle 2 + m\angle 3$

(مسلمة جمع الزوايا)

$5) m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540$

(بالتعويض)

31) برهان تسلسلي:



$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 5$$
$$m\angle 6 + m\angle 7 = m\angle 3 + m\angle 4$$

نظرية الزاوية الخارجية

$$\angle 3 = \angle 5$$

معطى

$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 3$$

بالتعويض

$$m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$$

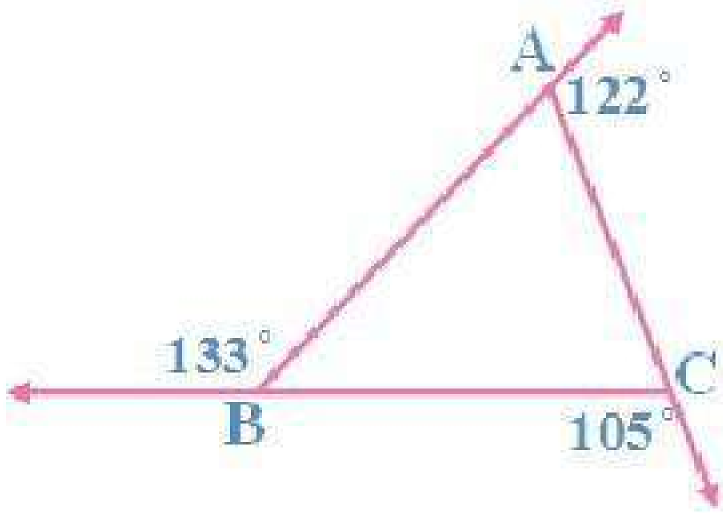
خاصية الإبدال

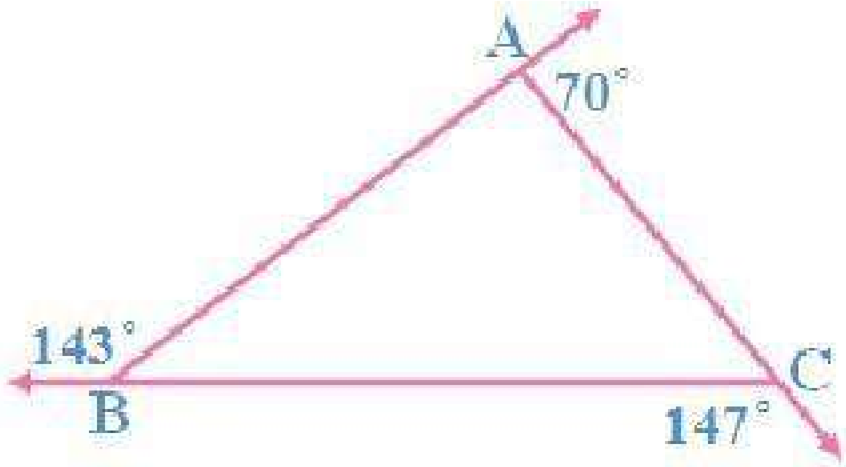
$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$$

بالتعويض

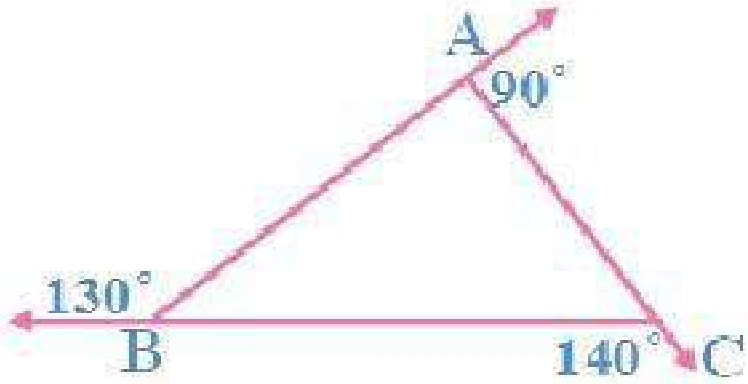
32) تمثيلات متعددة:

a) هندسيا:

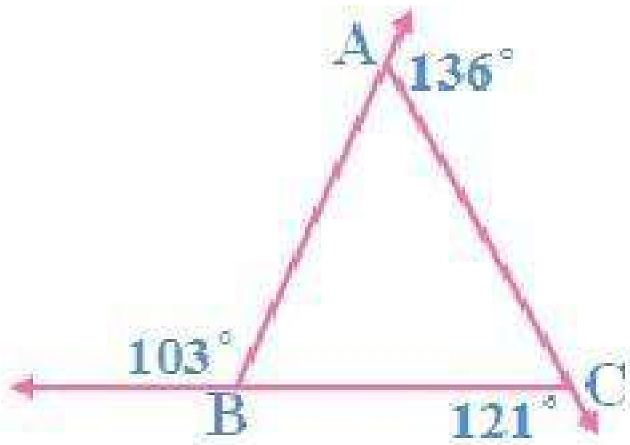




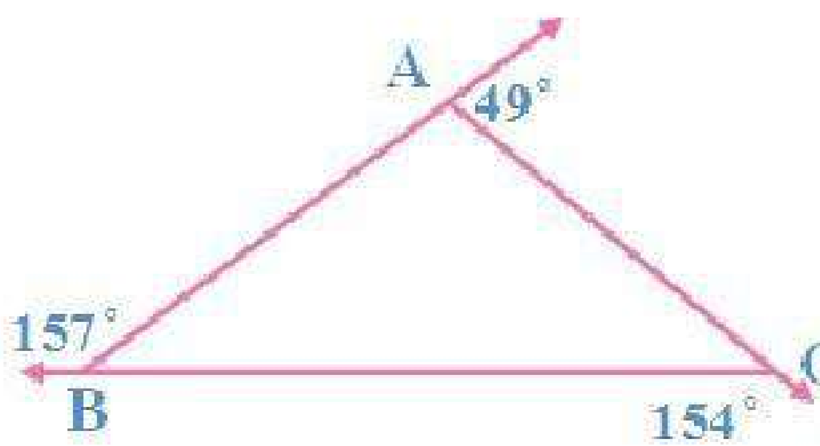
مثلث قائم الزاوية



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزويا



b) جدوليا:

$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	المجموع
١٢٢	١٠٥	١٣٣	٣٦٠
٧٠	١٤٧	١٤٣	٣٦٠
٩٠	١٤٠	١٣٠	٣٦٠
١٣٦	١٢١	١٠٣	٣٦٠
٤٩	١٥٤	١٥٧	٣٦٠

c) لفظيا: مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث يساوي 360°

d) جبريا: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$

e) تحليليا:

تخبرنا نظرية الزاوية الخارجية بأن $m\angle 3 = m\angle CAB + m\angle BCA$

وأن $m\angle 1 = m\angle CBA + m\angle BCA$, $m\angle 2 = m\angle BAC + m\angle CBA$

وبالتعويض

$m\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC + m\angle CBA$

$+ m\angle BCA + m\angle CAB$. ويمكن تبسيط هذه المعادلة بالشكل التالي:

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2m\angle CBA + 2m\angle BCA + 2m\angle BAC$$

وباستعمال خاصية التوزيع ينتج:

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2\left(m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC\right)$$

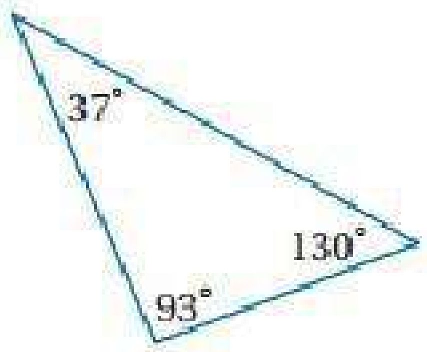
وتحبرنا نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث أن

$m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC = 180^\circ$ وبالتعويض ينتج أن

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2(180) = 360^\circ$$

مسائل مهارات التفكير العليا

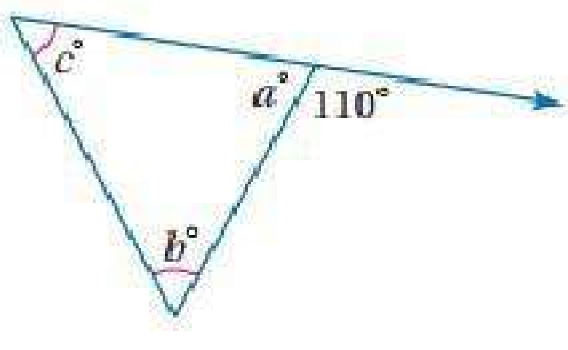
33) اكتشف الخطأ:



تنص النتيجة 3.2 على انه يمكن أن يكون في أي مثلث زاوية قائمة أو منفرجة واحدة على الأكثر، وبما أنه كتب في المثلث قياسان لزاويتين منفرجتين 130 , 93 فإن واحدا على الأقل منها غير صحيح.

وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث ومجموع القياسات المسجلة في هذا المثلث $= 260^\circ$ فإن واحدا على الأقل من هذه القياسات غير صحيح

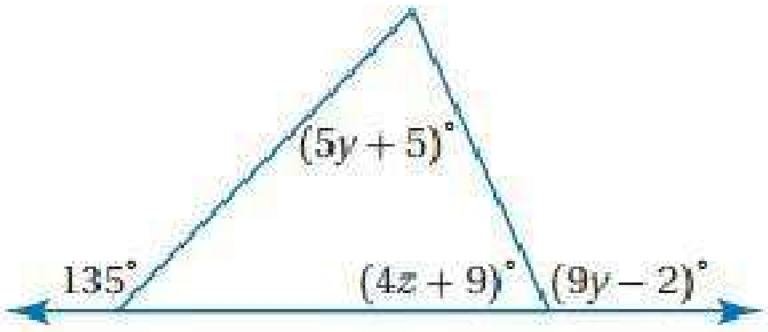
34) اكتب:



$\angle a = 70^\circ$ لأن هذه الزاوية والزاوية التي قياسها 110° متجاورتان على مستقيم

وبما أن $m\angle c = m\angle b$ ومجموعهما يساوي 110° إذن $55^\circ = m\angle c = m\angle b$

35) تحد:



$$(4z+9)^\circ+(9y-2)^\circ=180^\circ$$

$$4z+9+9y-2=180^\circ$$

$$4z+9y=180^\circ-7$$

$$4z+9y=173\rightarrow 1$$

$$(5y+5)^\circ+(4z+9)^\circ=135^\circ$$

$$5y+5+4z+9=135^\circ$$

$$5y+4z=135^\circ-14$$

$$4z+5y=121 \quad \times -1$$

$$-4z-5y=-121\rightarrow 2$$

بجمع المعادلة ١ و ٢

$$4y=52$$

$$y=13$$

$$4z+9y=173$$

$$4z+9\times 13=173$$

$$4z=56$$

$$z=14$$

36) تبرير:

منفرج الزاوية، لان الزاوية الخارجية حادة ومجموع الزاويتين البعيدتين أقل من 90 لذا فان الزاوية الثالثة ستكون أكبر من 90 حتماً.

تدريب على الاختبار المعياري

37) *B*

$$7x - 3(2 - 5x) = 8x$$

$$7x - 6 + 15x = 8x$$

$$22x - 6 = 8x$$

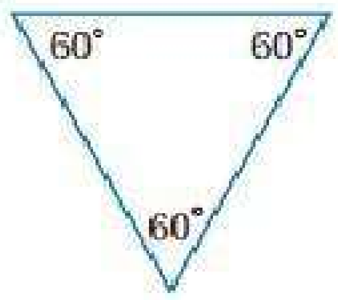
38) *C*

$$a + b = 90^\circ$$

مراجعة تراكمية

صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

39)

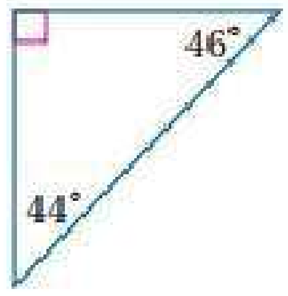


متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية في القياس

40)

منفرج الزاوية لأن يوجد زاوية قياسها أكبر من 90°

(41



قائم الزاوية لأن يوجد زاوية قياسها = 90°

هندسة إحداثية:

42)

$(0,-2)\ ,(1,3)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-2)}{1-0}=\frac{5}{1}=5$$

$(1,3)$

$$y=mx+b\rightarrow 3=5\times 1+b$$

$$b=3-5$$

$$b=-2$$

معادلة المستقيم l: $y=5x-2$

ميل المستقيم العمودي على l = $\frac{-1}{5}$ لأن $5\times\frac{-1}{5}=-1$ ، $P(-4,4)$

$$y=mx+b\rightarrow 4=\frac{-1}{5}\times -4+b$$

$$b=\frac{16}{5}$$

معادلة المستقيم العمودي على المستقيم l والمار بالنقطة $P(-4,4)$ هي:

$$y=\frac{-1}{5}x+\frac{16}{5}$$ ضرب المعادلة في -1 ←

$$-y=\frac{1}{5}x-\frac{16}{5}$$

$$\begin{array}{r} y = 5x - 2 \\ (+) - y = \frac{1}{5}x - \frac{16}{5} \\ \hline 0 = \frac{26}{5}x - \frac{26}{5} \end{array}$$

$$x = 1$$
$$y = 5x - 2$$
$$y = 5 \times 1 - 2$$
$$y = 3$$

$(1,3),\ (-4,4)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (-4-1)^2}$$

$$\sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

البعد بين P ,L: $\sqrt{26}$ وحدة

(43

المستقيم l الإحداثي الصادي للنقطتين المار بهما = 0 أي ان المستقيم هو المحور X لذا فإن المسافة بين النقطة $P\ (4,3)$ و المحور X هو الإحداثي الصادي للنقطة P أي 3 وحدات.

استعد للدرس اللاحق

اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

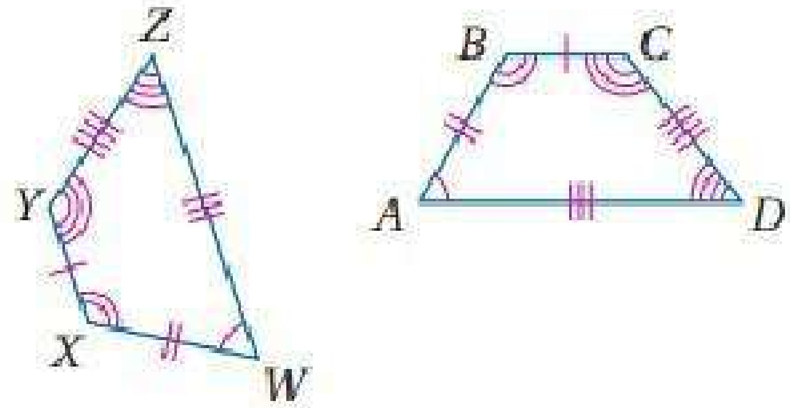
44) الانعكاس

45) التماثل

46) التعدي

3-3 المثلثات المتطابقة

(1A

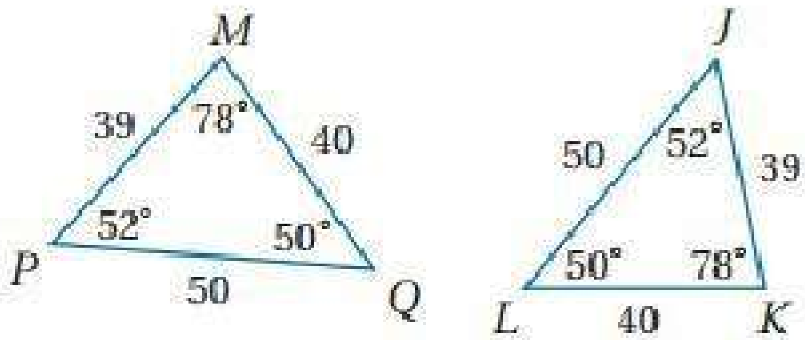


الزوايا: $\angle B \cong \angle X$, $\angle C \cong \angle Y$
$\angle A \cong \angle W$, $\angle D \cong \angle Z$

الأضلاع: $AB \cong WX$, $BC \cong XY$, $CD \cong YZ$, $DA \cong ZW$

المضلع $ABCD \cong$ **المضلع** $WXYZ$

(1B

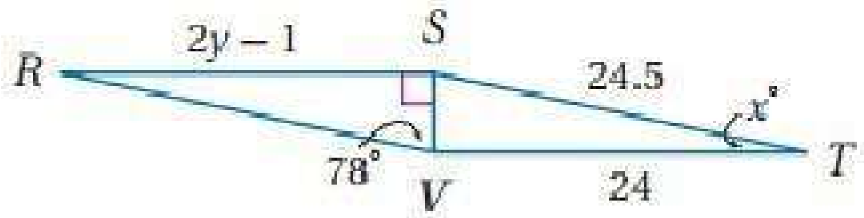


الزوايا: $\angle L \cong \angle Q$, $\angle K \cong \angle M$, $\angle J \cong \angle P$

الأضلاع: $JK \cong PM$, $KL \cong MQ$, $LJ \cong QP$

المثلث $PMQ \cong$ **المثلث** JKL

(2



$\because \Delta RSV \cong \Delta TVS$

$RS = TV$ **تعريف التطابق**

$2y - 1 = 24$ **بالتعويض**

$2y = 25$

$y = 25 \div 2$

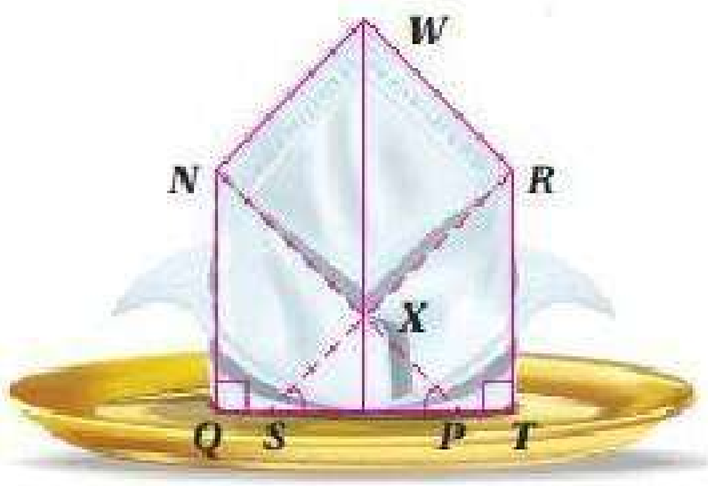
$y = 12.5$

$\angle TSV = \angle SVR = 78^\circ$ **تعريف التطابق**

$\angle STV = 180^\circ - \left(78^\circ + 90^\circ\right)$ **نظرية مجموع زوايا المثلث**

$\angle STV = 12^\circ$

(3



بما أن $\overline{WX}$ منصفا لزاوية $\angle NXR$ إذن $\angle WXR = \angle NXW = 49^\circ$

بما أن $\Delta WRX \cong \Delta WNX$ إذن $\angle WRX = \angle WNX = 88^\circ$ تعريف التطابق

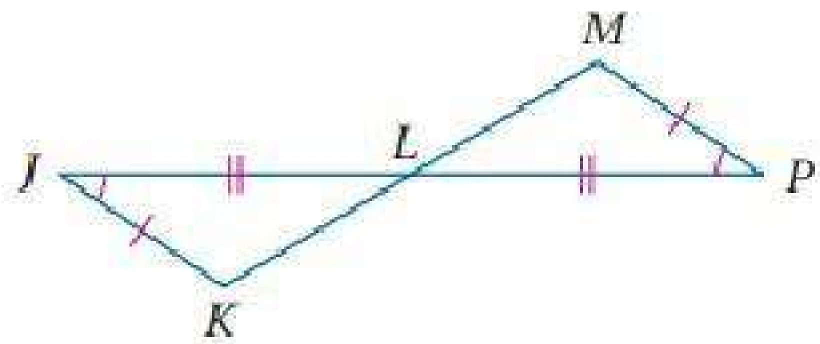
$\angle RWX = 43^\circ$ حسب نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle RWX = \angle NWX$ تعريف التطابق

$$m\angle NWR = m\angle RWX + m\angle NWX$$

$$m\angle NWR = 43^\circ + 43^\circ = 86^\circ$$

4)



$\angle P \cong \angle J$, $\overline{PL} \cong \overline{JL}$, $\overline{PM} \cong \overline{JK}$ (معطى)

L تنصف $\overline{KM}$ (معطى)

$\overline{KL} \cong \overline{LM}$ (تعريف التنصيف)

$\angle JLK \cong \angle MLP$ (حسب نظرية الزاويتان المتقابلتان بالرأس)

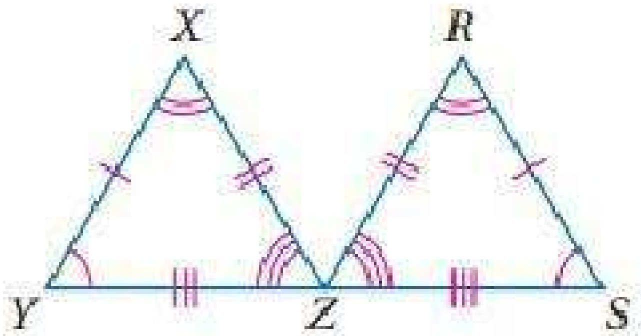
$\angle K \cong \angle M$ (نظرية الزاوية الثالثة)

بما أن جميع زوايا المثلثين متطابقة والأضلاع متطابقة إذن

$$\Delta JLK \cong \Delta PLM$$

في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق: المثال١

1)

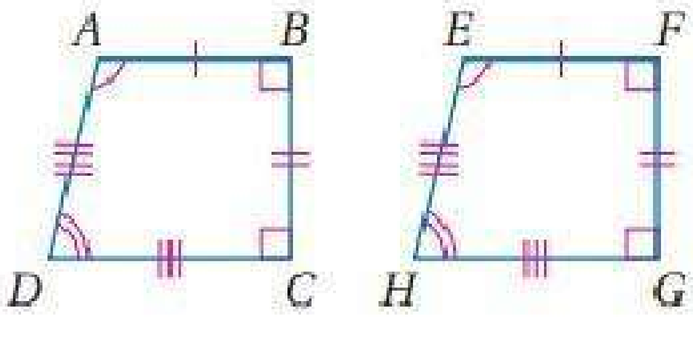


$\angle Y \cong \angle S$, $\angle X \cong \angle R$, $\angle XZY \cong \angle RZS$

$\overline{YX} \cong \overline{SR}$, $\overline{YZ} \cong \overline{SZ}$, $\overline{XZ} \cong \overline{RZ}$

$\Delta YXZ \cong \Delta SRZ$

1)

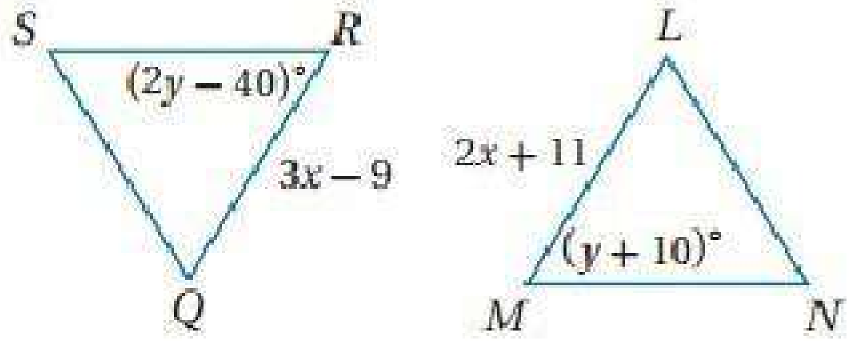


$\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle G$, $\angle D \cong \angle H$

$\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{CD} \cong \overline{GH}$, $\overline{AD} \cong \overline{EH}$, $\overline{BC} \cong \overline{FG}$

$EFGH \cong ABCD$

في الشكلين المجاورين، فأوجد: المثال٢



3)

$\because \underline{\Delta LMN} \cong \overline{\Delta QRS}$

$\therefore \overline{LM} \cong \overline{QR}$

$2x + 11 = 3x - 9$

$-x = -9 - 11 = -20$

$y = 20$

4)

$\because \Delta LMN \cong \Delta QRS$

$\therefore \angle M = \angle R$

$(y + 10)^\circ = (2y - 40)^\circ$

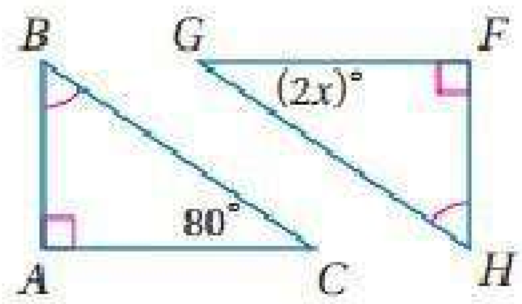
$-y = -40 - 10$

$-y = -50$

$y = 50$

في كل من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x ، وفسر إجابتك: المثال٣

5)



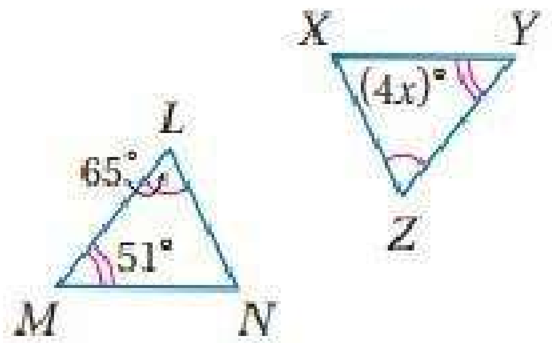
بما أن كل من ΔGFH , ΔBAC يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهما متطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$\angle G \cong \angle C$

$2x = 80$

$x = 40$

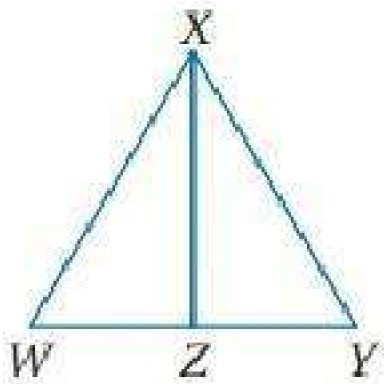
6)



بما أن كل من ΔMLN , ΔXYZ يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهما متطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$\angle X \cong \angle N$
$4x = \angle N$
$\angle N = 180 - (65 + 51)$
$\angle N = 64^\circ$
$4x = 64^\circ$
$x = 16$

7) برهان: اكتب برهانا حرا.



نعلم أن $\overline{WX} \cong \overline{YX}, \overline{WZ} \cong \overline{YZ}, \overline{XZ} \cong \overline{XZ}$

$\angle WXZ \cong \angle YXZ$, $\angle XZW \cong \angle XZY$

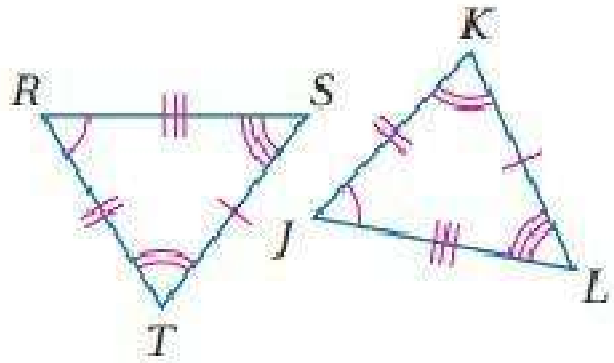
وحسب نظرية الزاوية الثالثة تكون $\angle W = \angle Y$

إذن $\Delta WXZ \cong \Delta YXZ$

تدرب وحل المسائل

في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلع ين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة، ثم اكتب عبارة التطابق:

(8

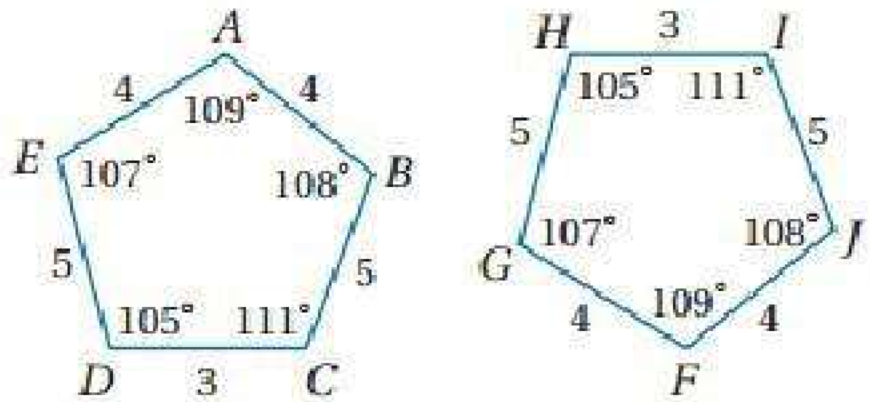


$\angle R \cong \angle J$, $\angle T \cong \angle K$, $\angle S \cong \angle L$

$\overline{RT} \cong \overline{JK}$, $\overline{TS} \cong \overline{KL}$, $\overline{RS} \cong \overline{JL}$

إذن $\Delta RTS \cong \Delta JKL$

(9

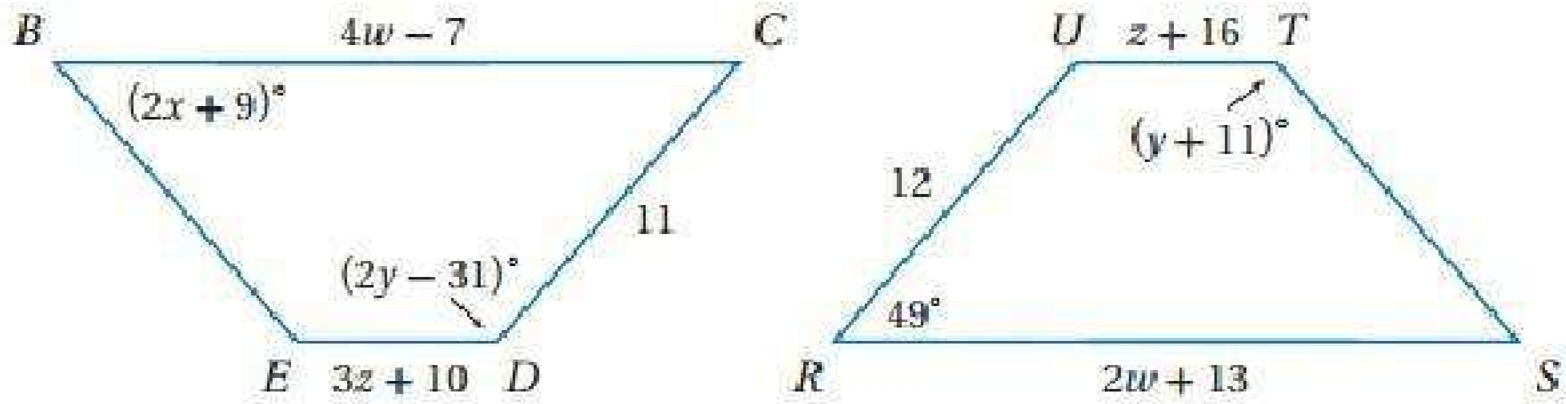


$\angle A \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle J$, $\angle C \cong \angle I$,$\angle D = \angle H$,$\angle E = \angle G$

$\overline{AB} \cong \overline{FJ}$, $\overline{BC} \cong \overline{JI}$, $\overline{CD} \cong \overline{IH}$, $\overline{DE} \cong \overline{HG}$, $\overline{AE} \cong \overline{FG}$

إذن المضلع $FJIHG$ = المضلع $ABCDE$

أوجد قيمة كل مما يأتي:



بما أن المضلع $BCDE \cong$ **المضلع** $RSTU$

10)

$\therefore \angle R \cong \angle B$

$49^\circ = 2x + 9$

$49 - 9 = 2x$

$x = 20$

11)

$\therefore \angle D \cong \angle T$

$(2y - 31)^\circ = (y + 11)^\circ$

$y = 11 + 31$

$y = 42$

12)

$\therefore \overline{ED} \cong \overline{UT}$

$(3z + 10)^\circ = (z + 16)^\circ$

$2z = 16 - 10$

$z = 3$

13)

$\therefore \overline{BC} \cong \overline{RS}$

$(4w - 7)^\circ = (2w + 13)^\circ$

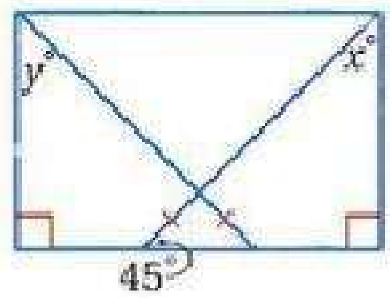
$2w = 13 + 7$

$2w = 20$

$10 = w$

أوجد قيمة كل من y , x في الأسئلة الآتية:

(14

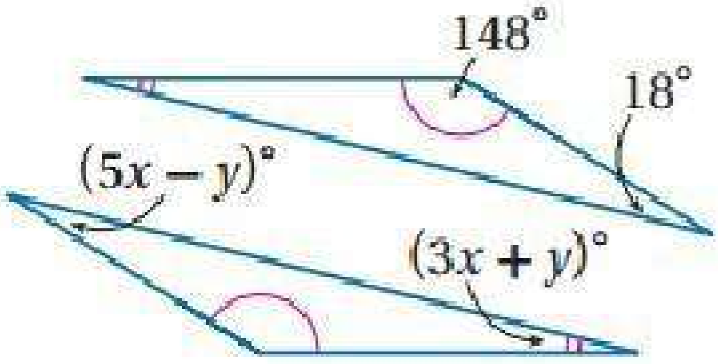


$45^\circ = y$

$45^\circ = x$

لأن المثلث المتطابق الضلعين زواياه القاعدة له متساوية وكل منها = ٤٥

(15



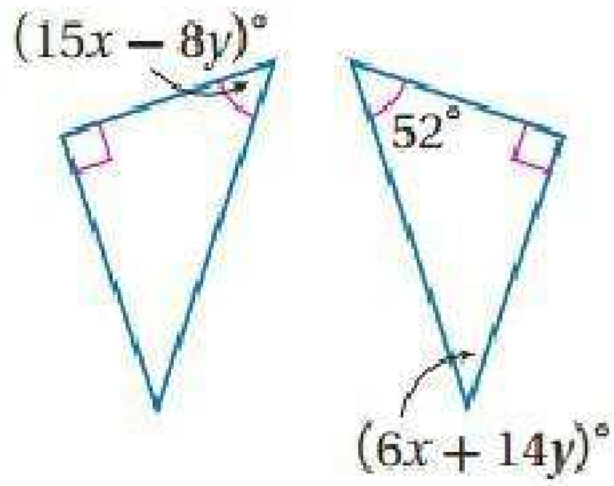
$$(3x + y)^\circ = 180^\circ - (18^\circ + 148^\circ)$$

$$3x + y = 14 \rightarrow 1$$
$$5x - y = 18 \rightarrow 2$$

$$8x = 32$$
$$x = 4$$

$$5 \times 4 - y = 18$$
$$y = 20 - 18$$
$$y = 2$$

(16



$$(15x - 8y)^\circ = 52^\circ$$

$$(6x + 14y)^\circ = 180 - (52 + 90)$$

$$6x + 14y = 38 \rightarrow \div 2$$

$$3x + 7y = 19 \rightarrow \times(-5)$$

$$-15x - 35y = -95 \rightarrow 1$$

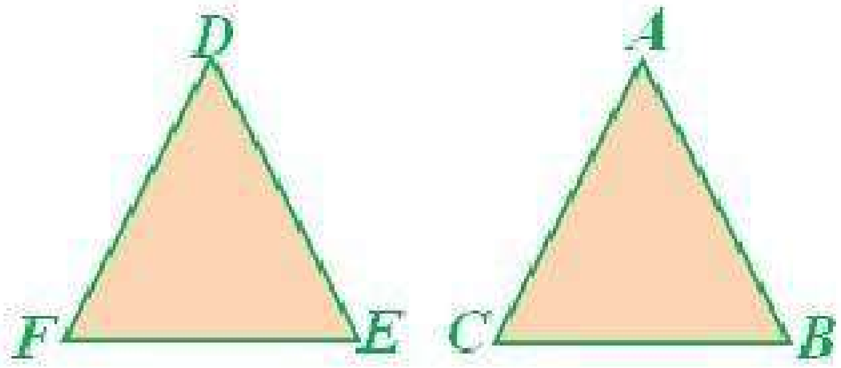
$$15x - 8y = 52 \rightarrow 2$$

$$0 - 43y = -43$$
$$y = 1$$

$$15x - 8 \times 1 = 52$$

$$15x = 60$$
$$x = 4$$

17) برهان: المثال٤



1) $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ **(معطيات)**

2) $m\angle A = m\angle D, m\angle B = m\angle E$ **(تعريف الزوايا المتطابقة)**

3) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ, m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180^\circ$

(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

4) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$ **(خاصية التعدي)**

5) $m\angle D + m\angle E + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$ **(خاصية التعويض)**

6) $m\angle C = m\angle F$ **(خاصية الطرح للمساواة)**

7) $\angle C \cong \angle F$ **(تعريف تطابق الزوايا)**

18) برهان:

$\Delta RST = \Delta XYZ$

معطى

$\angle R \cong \angle X , \angle S \cong \angle Y , \angle T \cong \angle Z ,$
$\overline{RS} \cong \overline{XY} , \overline{ST} \cong \overline{YZ} , \overline{RT} \cong \overline{XZ}$

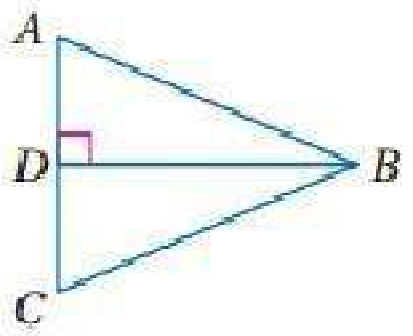
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

$\angle X \cong \angle R , \angle Y \cong \angle S , \angle Z \cong \angle T ,$
$\overline{XY} \cong \overline{RS} , \overline{YZ} \cong \overline{ST} , \overline{XZ} \cong \overline{RT}$

تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق خاصية التماثل

$\Delta XYZ \cong \Delta RST$

19) برهان:



1) $\overline{BD}$ **تنصف** $\angle B$ ، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. **(معطيات)**

2) $\angle ABD \cong \angle DBC$ **(تعريف منصف الزوايا)**

3) $\angle ADB , \angle BDC$ **قائمتان (المستقيمان المتعامدان يكونان زاوية قائمة)**

4) $\angle ADB \cong \angle BDC$ **(الزوايا القائمة متطابقة)**

5) $\angle A \cong \angle C$ **نظرية الزاوية الثالثة**

برهان:

(20

نعلم أن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن: $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$ ،

$AB \cong DE, BC \cong EF, AC \cong DF$.

نعلم أن $\Delta DEF \cong \Delta GHI$ ولذا فإن:

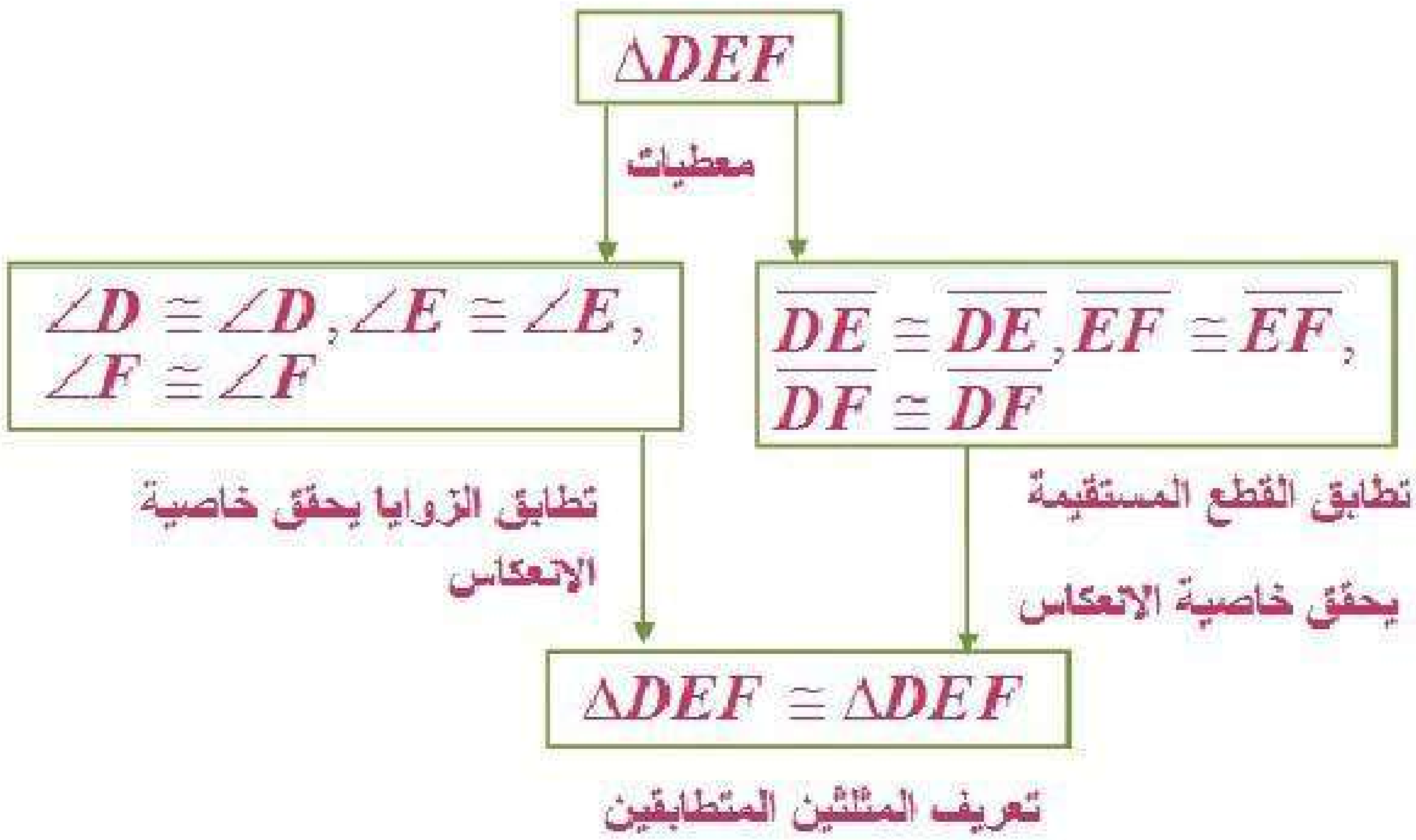
$DE \cong GH, EF \cong HI, DF \cong GI$ ، $\angle D \cong \angle G, \angle E \cong \angle H, \angle F \cong \angle I$

لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. وعلية فإن

$\angle A \cong \angle G, \angle B \cong \angle H, \angle C \cong \angle I$ ، $AB \cong GH, BC \cong HI, AC \cong GI$

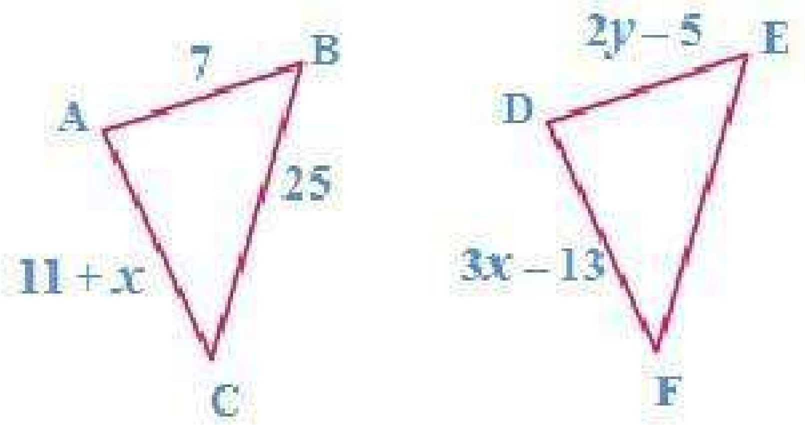
لأن تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي وبهذا يكون $\Delta ABC \cong \Delta GHI$ من تعريف المثلثين المتطابقين.

(21



جبر: ارسم شكلاً يمثل المثلثين المتطابقين في كل من السؤالين الآتيين، وسمه وأوجد قيمة x, y :

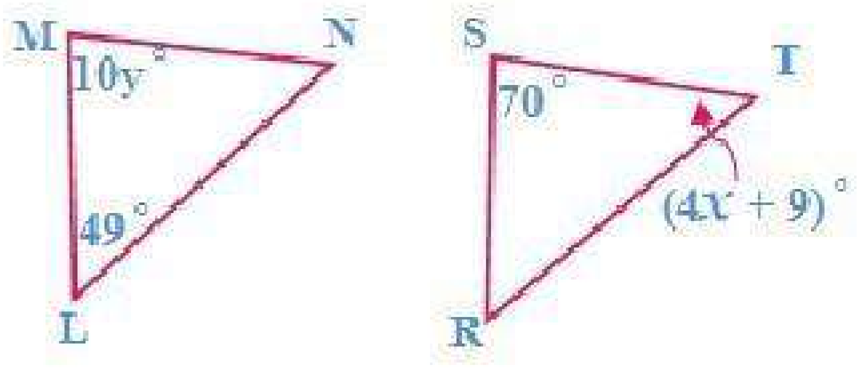
22)



$\because \Delta ABC \cong \Delta DEF$
$\therefore DE = AB$
$2y - 5 = 7$
$2y = 12$
$y = 6$

$DF = AC$
$3x - 13 = x + 11$
$2x = 11 + 13$
$2x = 24$
$x = 12$

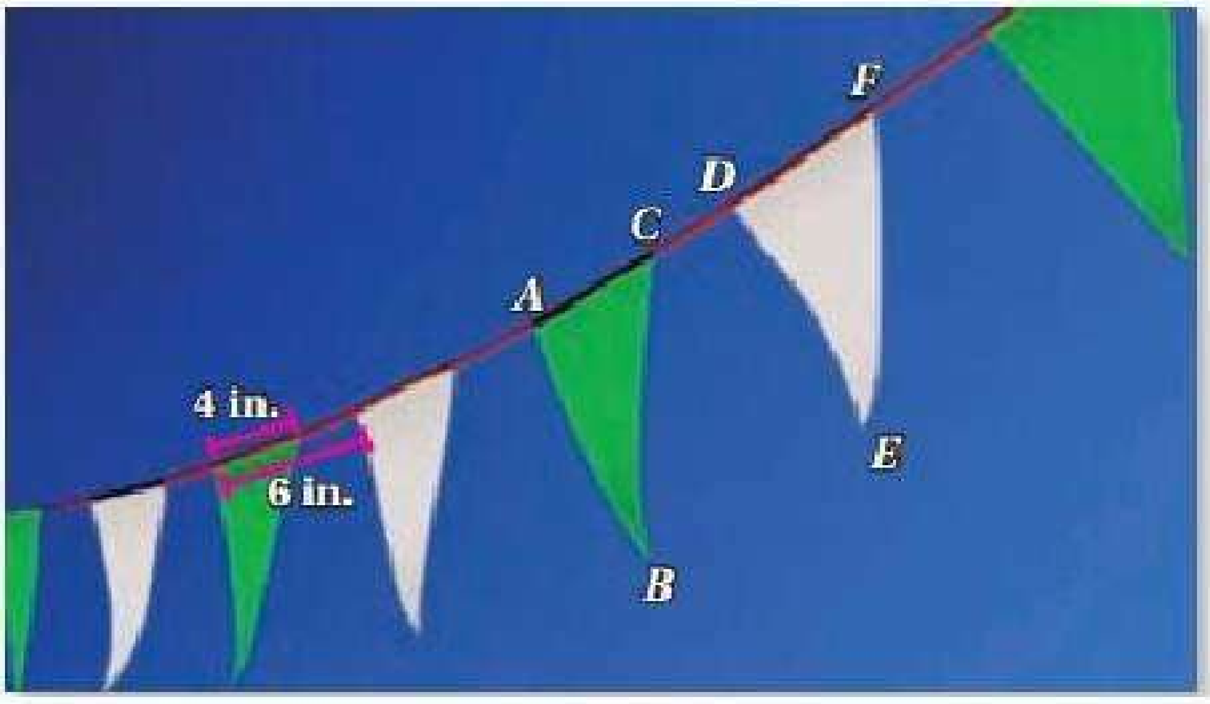
23)



$\because \Delta LMN \cong \Delta RST$
$\angle M = \angle M$
$10y = 70$
$y = 7$

$\angle N = 180^\circ - \left(49^\circ + 70^\circ\right)$
$\angle N = 61^\circ$
$\because \Delta LMN \cong \Delta RST$
$\therefore \angle T = \angle N$
$4x + 9 = 61$
$4x = 52$
$x = 13$

24) رايات:



$a)$
$AB = CB,\ AB = DE,\ AB = FE,$
$CB = DE,\ CB = FE,\ DE = FE,\ AC = DF$

b) بما أن مساحة المنطقة مربعة = ١٠٠ قدم مربعة

مساحة المربع = طول الضلع في نفسة، إذن طول الضلع = ١٠ وبالتالي سيكون طول الحبل $10 + 10 + 10 + 10 = 40$

(c

يوجد 2 راية كل قدم من الحبل إذن

40× 2= 80 راية

25) تمثيلات متعددة:

a) لفظيا:

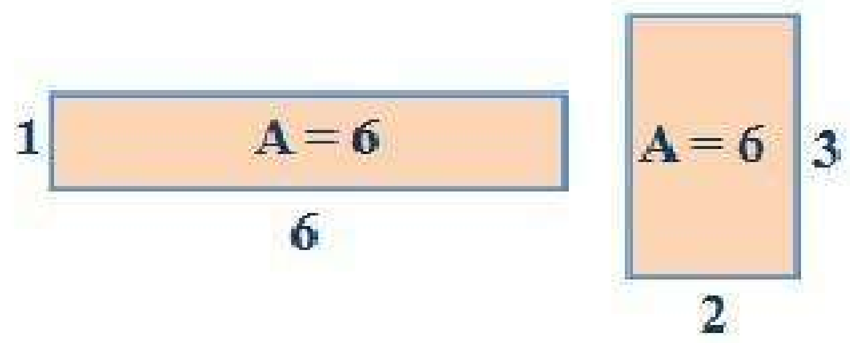
إذا تطابق مثلثان فان مساحتيهما متساويتان.

b) لفظيا:

العبارة الشرطية: إذا تساوت مساحتا مثلثين فان المثلثين متطابقان.

خطأ، فإذا كانت قاعدة المثلث 2 وارتفاعه 6 وكانت قاعدة مثلث آخر 3 وارتفاعه 4 فان مساحتيهما متساويتان ولكن هذين المثلثين غير متطابقين.

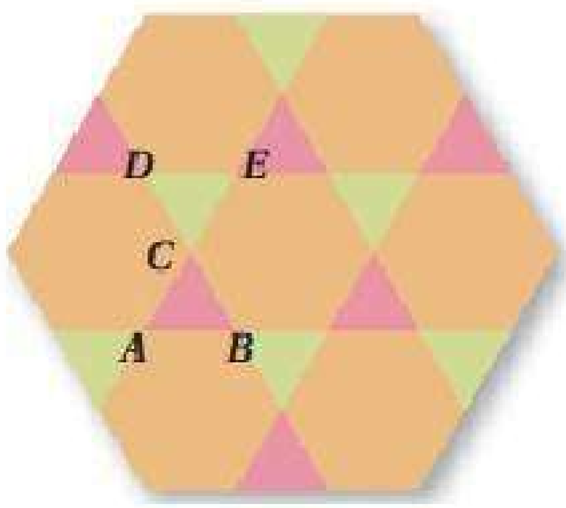
c) هندسيا: نعم يمكن



d) هندسيا:

لا يمكن، لان المربعين اللذين لهما المساحة نفسها يكون لأضلاعهما الطول نفسه وهو الجذر التربيعي للمساحة فإذا كانت المساحتان متساويتين يكون المربعان متطابقين.

26) أنماط:



a) المضلع السداسي المنتظم والمثلث المتطابق الأضلاع

b) $\triangle ABC \cong DEC$

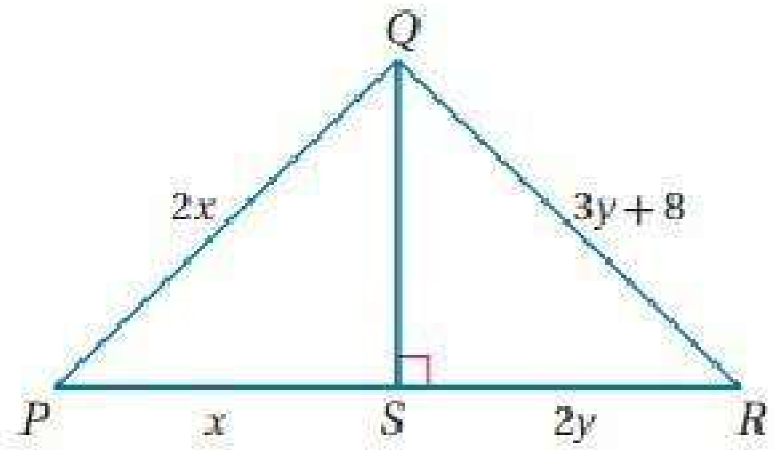
$\angle B = \angle E$ (c

$4in = AE$ (d ، لان المضلعات التي صمم منها النمط منتظمة فأطوال أضلاع المثلثات جميعها متطابقة وهذا يعني أن طول CB يساوي طول كل من CE , AC لذا فان $AE = AC + CE = 2 + 2 = 4$

$\angle D = 60^{\circ}$ (e ، لان جميع مثلثات النمط منتظمة فهي مثلثات متطابقة الأضلاع ومتطابقة الزوايا، وتكون كل زاوية في أي مثلث مساوية لـ 60

مسائل مهارات التفكير العليا

27) تحد:



$\Delta RQS \cong \Delta PQS$

$RS = PS$

$2y = x$

$RQ = PQ$

$3y + 8 = 2x$

$\because x = 2y$

$3y + 8 = 2\times(2y)$

$3y - 4y = -8$

$-y = -8$

$y = 8$

$x = 2\times 8$

$x = 16$

تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأ.

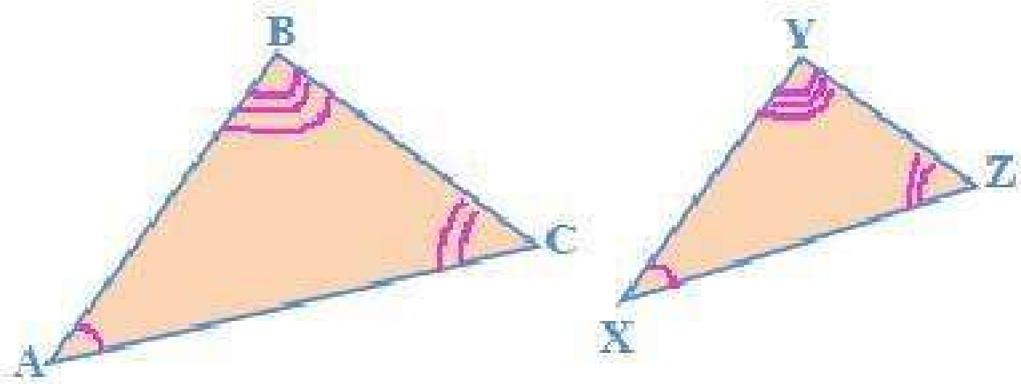
(28

صحيحة، باستعمال نظرية الزاوية الثالثة، يكون الزوج الثالث من الزوايا متطابقتان أيضا وجميع الأضلاع المناظرة متطابقة، ولان العناصر المتناظرة متطابقة فان المثلثين متطابقان.

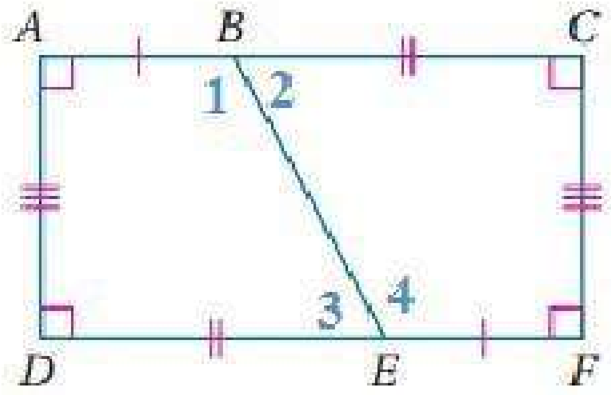
(29

خطأ، $\angle A = \angle X, \angle B = \angle Y, \angle C = \angle Z$

لكن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة.



30) تحد:



$AB = EF \, , \, ED = BC \, , \, AD = FC$

الزوايا المتبادلة داخليا متطابقة فإن $\angle 3 = \angle 2, \ \angle 4 = \angle 1$

المضلع $ABED$ = المضلع $FEBC$

31) اكتب:

صحيحة أحيانا، يكون المثلثات المتطابقا الأضلاع متطابقين إذا تطابق زوج من الأضلاع المتناظرة فيها

تدريب على الاختبار المعياري

32) A

$$\Delta ABC \cong \Delta HIJ$$
$$AC = HJ$$
$$(-1,2),(2,-2)$$
$$d_{(H,J)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-(-1))^2}$$

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

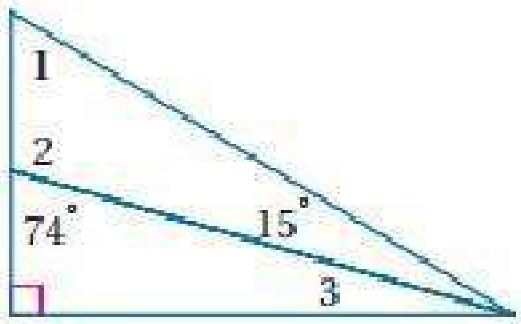
33) C

$$x^2 + 19x - 42 = 0$$
$$(x+21)(x-2) = 0$$

إذن $(x-2)$ هو أحد العوامل

مراجعة تراكمية

في الشكل المجاور أوجد كلا من القياسات الآتية:



34)

زاويتان متجاورتان على مستقيم

$\angle 2 = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$

35)

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle 1 = 180^\circ - \left(106^\circ + 15^\circ\right) = 59^\circ$

36)

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle 3 = 180^\circ - \left(90^\circ + 74^\circ\right) = 16^\circ$

37) هندسة إحداثية: مختلف الأضلاع

$K\ (15,0), L\ (-2,-1)$

$d_{(K,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-(15))^2 + (-1-0)^2}$

$\sqrt{289+1} = \sqrt{290}$

$J\ (-7,10), K\ (15,0)$

$d_{(J,K)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(15-(-7))^2 + (0-10)^2}$

$\sqrt{484+100} = 2\sqrt{146}$

$J(-7,10), L(-2,-1)$

$$d_{(J,L)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-2-(-7))^2+(-1-10)^2}$$

$$\sqrt{25+121} = \sqrt{146}$$

$JK = 2\sqrt{146}, KL = \sqrt{290}, JL = \sqrt{146}$

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائما أو أحيانا أو ليست صحيحة أبدا:

38) صحيحة دائما

39) صحيحة أحيانا

استعد للدرس اللاحق

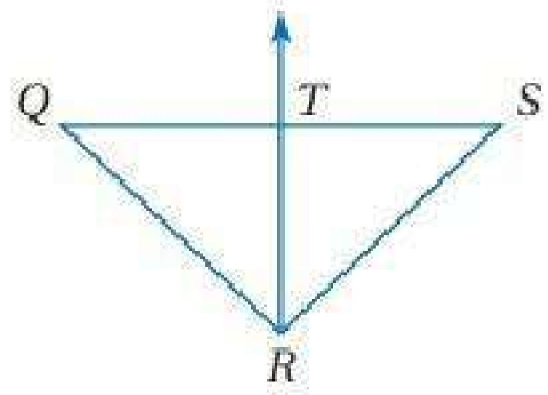
40)

العبارات	المبررات
a) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{MN} \cong \overline{PQ}$	a) معطيات
b) $MN = PQ, PQ = RS$	b) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
c) $\overline{MN} = \overline{RS}$	c) خاصية التعدي
c) $\overline{MN} \cong \overline{RS}$	d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

4-3 إثبات تطابق المثلثات SSS , SAS

تحقق
صفحة ١٦٤

(1



$\triangle QRS$ متطابق الضلعين فيه $\overline{QR} \cong \overline{SR}$

معطى

$\overline{RT}$ ينصف $\overline{QS}$ في النقطة T

معطى

T نقطة منتصف $\overline{QS}$

تعريف منصف القطع المستقيمة

$\overline{QT} \cong \overline{ST}$

نظرية نقطة المنتصف

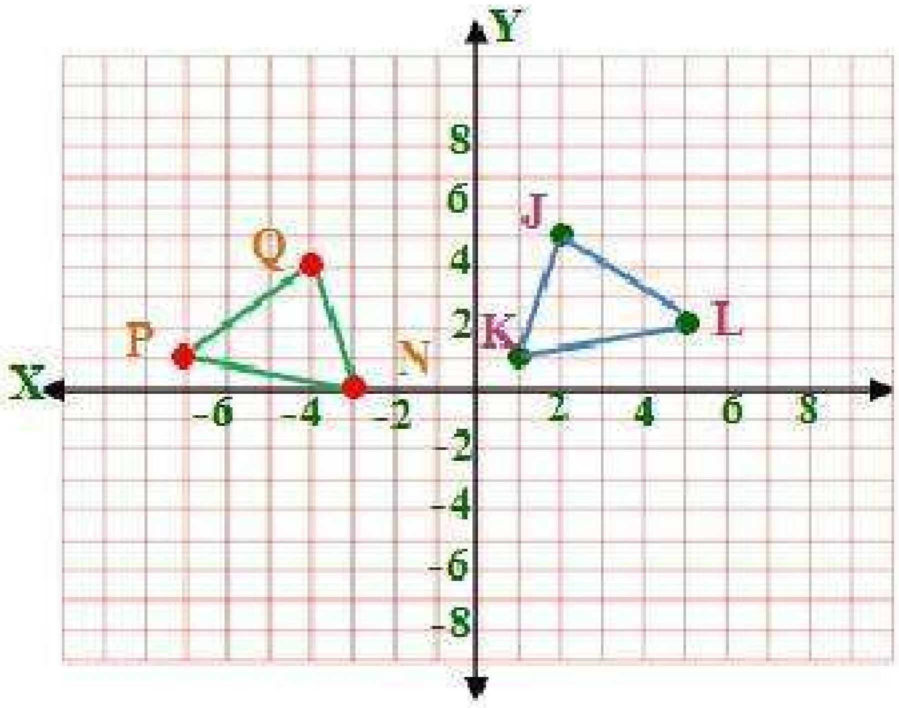
$\overline{RT} \cong \overline{RT}$

خاصية الانعكاس

$\triangle QRT \cong \triangle SRT$

SSS

2) A)



B) يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك يمكن أن نخمن أن المثلثين متطابقان.

C)

$$K\ (1,1), L\ (5,2)$$

$$d_{(K,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2}$$

$$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$J\ (2,5), K\ (1,1)$$

$$d_{(J,K)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-5)^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$J(5,2), L(2,5)$

$d_{(J,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (5-2)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$JK = \sqrt{17},\ KL = \sqrt{17},\ JL = \sqrt{18}$

أطوال $\triangle NPQ$

$P(-7,1), Q(-4,4)$

$d_{(P,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-7))^2 + (4-1)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$N(-3,0), P(-7,1)$

$d_{(N,P)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7-(-3))^2 + (1-0)^2}$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$N(-3,0), Q(-4,4)$

$d_{(N,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-3))^2 + (4-0)^2}$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

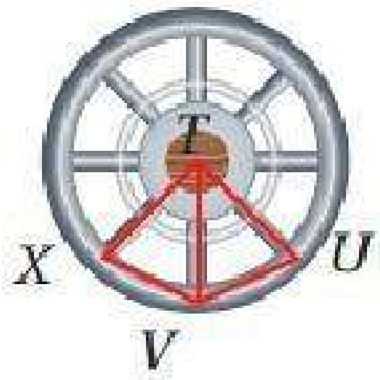
$PQ = \sqrt{18},\ NP = \sqrt{17},\ NQ = \sqrt{17}$

نلاحظ أن $NQ = KJ , LK = PN , JL = QP$ ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة. وعليه، فإن $\Delta QNP \cong \Delta JKL$ حسب SSS

3) طيران شرعي:

العبارات	المبررات
$\overline{GH} \cong \overline{FG}$ ، $\overline{JG}$ تنصف $\angle FGH$	معطي
$\angle HGJ = \angle FGJ$	تعريف منصف الزاوية
$JG = JG$	خاصية الانعكاس للتطابق
$\Delta HGJ = \Delta FGJ$	SAS

(4



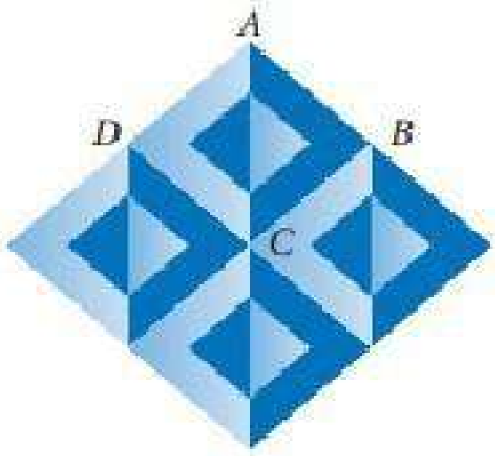
1) $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ **معطى** $\angle XTV \cong \angle VTU$

2) $m\angle XTV = m\angle UTV$ **(تعريف الزوايا المتطابقة)**

3) $\overline{TV} \cong \overline{TV}$ **(خاصية الانعكاس)**

4) $\triangle XTV \cong \triangle UTV$ (SAS)

1) الخداع البصري: المثال١



a) عدد المثلثات المختلفة = ٢

(b

1) $AB = CD, DA \cong BC$ **(معطيات)**

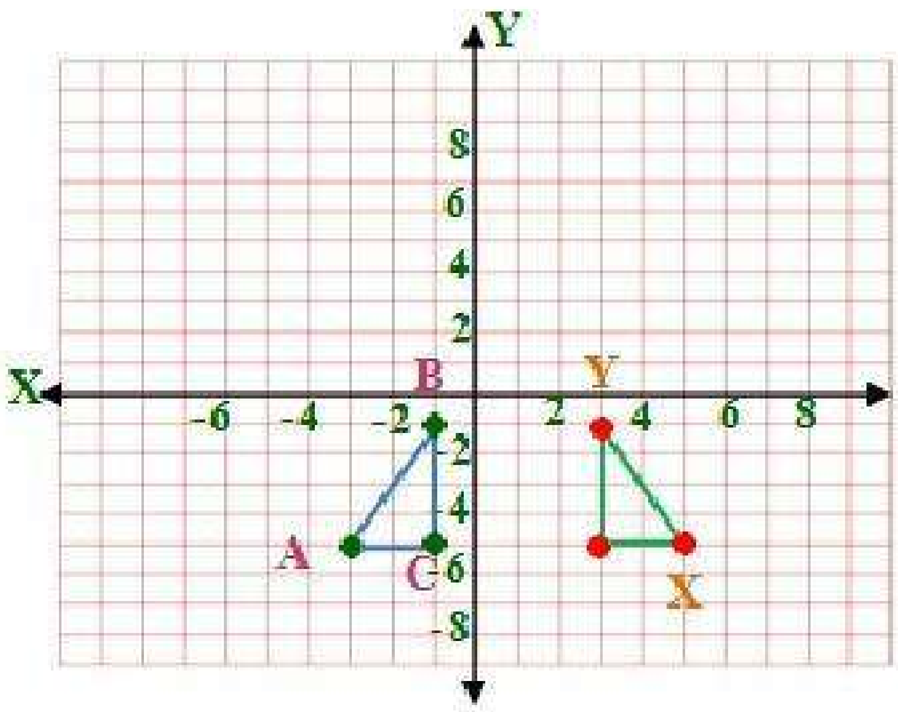
2) $\overline{AB} \cong \overline{CD},\ \overline{DA} \cong \overline{BC}$ **(تعريف تطابق القطع المستقيمة)**

3) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ **(خاصية الانعكاس في التطابق)**

4) $\Delta CDA \cong \Delta ABC\ (SSS)$

2) إجابة مطولة: المثال٢

(a



b) يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك يمكن أن نخمن أن المثلثين متطابقان

(c

أطوال ΔABC

$A(-3,-5), B(-1,-1)$

$d_{(A,B)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-1-(-5))^2}$

$\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$B(-1,-1), C(-1,-5)$

$d_{(B,C)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1-(-1))^2+(-5-(-1))^2}$

$\sqrt{0+16}=\sqrt{16}=4$

$A(-3,-5), C(-1,-5)$

$d_{(A,C)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-5-(-5))^2}$

$\sqrt{4+0}=\sqrt{4}=2$

$AB=\sqrt{20},\ BC=4,\ AC=2$

أطوال ΔXYZ

$X(5,-5), Y(3,-1)$

$$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (-1-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$Y(3,-1), Z(3,-5)$

$$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (-5-(-1))^2}$$

$$\sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$$

$X(5,-5), Z(3,-5)$

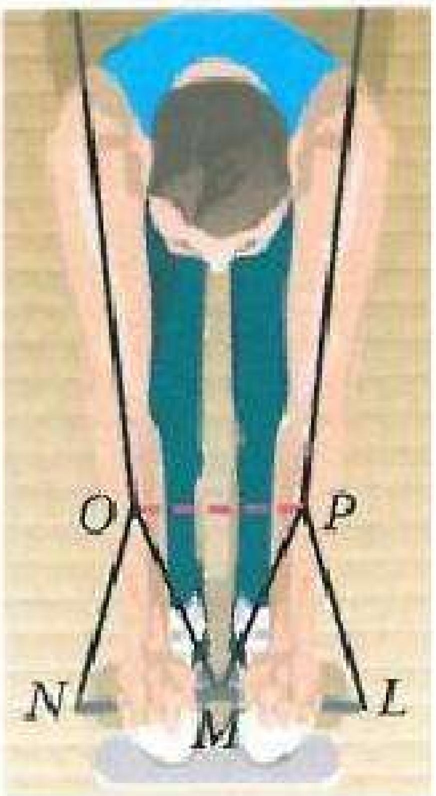
$$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (-5-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+0} = 2$$

$XY = \sqrt{20},\ YZ = 4,\ XZ = 2$

نلاحظ أن $XY = AB,\ YZ = BC,\ XZ = AC$ ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة. وعليه، فإن $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$ حسب SSS

3) رياضة: المثال٣



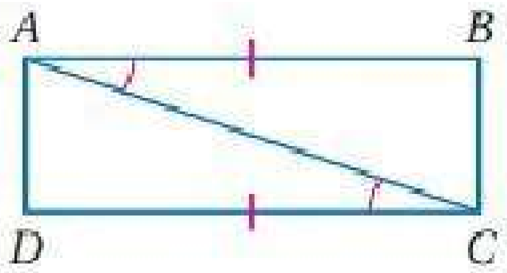
نعلم أن $\angle LPM \cong \angle NOM$, $\overline{LP} \cong \overline{NO}$.

وبما أن ΔMOP **متطابق الأضلاع**

فإن $\overline{MO} \cong \overline{MP}$ **من تعريف المثلث المتطابق الأضلاع**

ولذلك فإن $\Delta LMP \cong \Delta NMO$ **حسب مسلمة التطابق** SAS

4) اكتب برهان ذا عمودين: مثال٤



1) $\overline{BA} \cong \overline{DC}$, $\angle BAC \cong \angle DCA$ **(معطيات)**

2) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ **(خاصية الانعكاس للتطابق)**

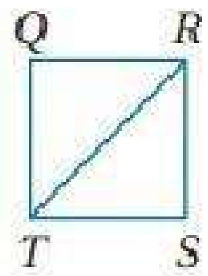
3) $\Delta BCA \cong \Delta DAC$ (SAS)

4) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ **(العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)**

تدرب وحل المسائل

برهان:اكتب برهانا من النوع المذكور في كل من السؤالين الآتيين: المثال١

(5

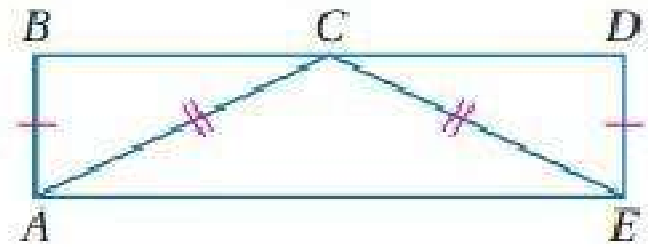


$QR = SR\,,\; ST = QT$

$RT = RT$ حسب خاصية الانعكاس

$\Delta QRT \cong \Delta SRT$ حسب SSS

(6



$AB = ED,\; CA = CE$

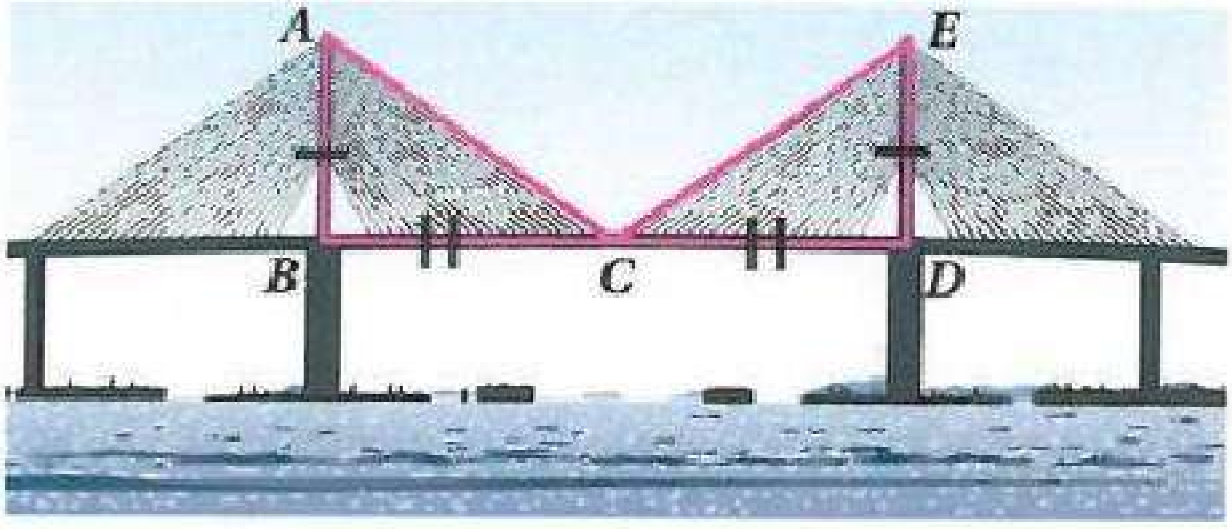
AC تنصف BD

C منتصف BD

$BC = CD$

$\Delta ABC \cong \Delta EDC$ حسب SSS

7) جسور:



1) $\overline{ED} \cong \overline{AB}$ ، $\angle ABC$ و $\angle EDC$ قائمتان، C نقطة منتصف $\overline{BD}$ (معطيات)

2) $\angle EDC \cong \angle ABC$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

3) $\overline{CD} \cong \overline{BC}$ (نظرية نقطة المنتصف)

4) $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ حسب (SAS)

حدد ما إذا كان $\Delta QRS = \Delta MNO$ في كل من السؤالين الآتيين: المثال٢

8)

ΔQRS

$Q(-4,4), R(-7,1)$

$d_{(Q,R)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7-(-4))^2 + (1-4)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$R\,(-7,1), S\,(-3,0)$

$$d_{(R,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3-(-7))^2 + (0-1)^2}$$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$Q\,(-4,4), S\,(-3,0)$

$$d_{(Q,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3-(-4))^2 + (0-4)^2}$$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$QR = \sqrt{18},\ RS = \sqrt{17}\ , QS = \sqrt{17}$

ΔMNO

$M\,(2,5), N\,(5,2)$

$$d_{(M,N)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (2-5)^2}$$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$N\,(5,2), O\,(1,1)$

$$d_{(N,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (1-2)^2}$$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$M\ (2,5), O\ (1,1)$

$$d_{(M,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-5)^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$MN = \sqrt{18},\ NO = \sqrt{17}\ , MO = \sqrt{17}$

$MN = \sqrt{18},\ NO = \sqrt{17}\ , MO = \sqrt{17}$

$QR = \sqrt{18},\ RS = \sqrt{17}\ , QS = \sqrt{17}$

بما أن كل زوج من الأضلاع المتناظرة متساويان في الطول فإنهما متطابقان إذن

$\Delta QRS \cong \Delta MNO$ حسب SSS

(9

ΔQRS

$Q\ (3,-3), R\ (4,-4)$

$$d_{(Q,R)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (-4-(-3))^2}$$

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$R\ (4,-4), S\ (3,3)$

$$d_{(R,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (3-(-4))^2}$$

$$\sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$Q\,(3,-3), S\,(3,3)$

$$d_{(Q,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (3-(-3))^2}$$

$$\sqrt{0+36} = 6$$

$QR = \sqrt{2},\ RS = \sqrt{50}\ , QS = 6$

ΔMNO

$M\ (0,-1), N\,(-1,-4)$

$$d_{(M,N)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (-4-(-1))^2}$$

$$\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$N\,(-1,-4), O\,(-4,-3)$

$$d_{(N,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (-3-(-4))^2}$$

$$\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$M\ (0,-1), O\ (-4,-3)$

$d_{(M,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-0)^2 + (-1-(-3))^2}$

$\sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

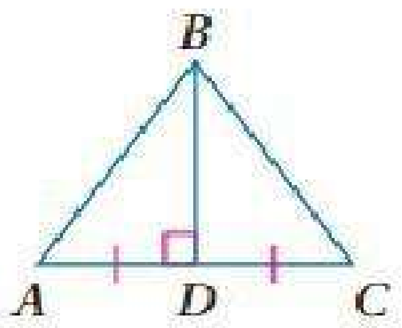
$MN = \sqrt{10},\ NO = \sqrt{10}\ , MO = \sqrt{20}$

$QR = \sqrt{2},\ RS = \sqrt{50}\ , QS = 6$

بما أن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة، فان المثلثين ليسا متطابقين

برهان: اكتب برهانا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين: المثال٣

10) برهان ذو عمودين



1) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$، $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$ (معطيات)

2) $\angle BDC, \angle BDA$ قائمتان (تعريف التعامد)

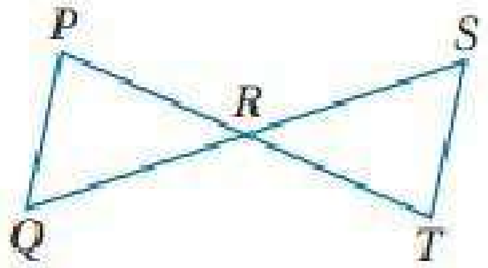
3) $\angle BDC \cong \angle BDA$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\overline{DC} \cong \overline{AD}$ (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

5) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

6) $\Delta CBD \cong \Delta ABD$ حسب مسلمة (SAS)

(11

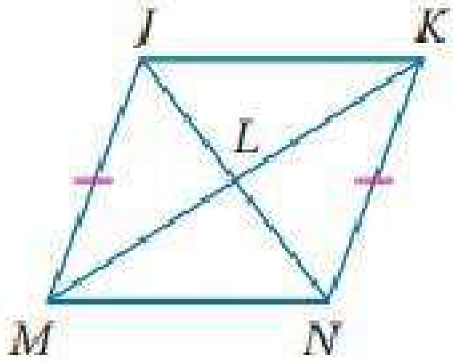


بما أن R نقطة المنتصف لكل من $\overline{PT}, \overline{QS}$ ، فإن $\overline{PR} \cong \overline{RT}$

و $\overline{RS} \cong \overline{RQ}$ من تعريف نقطة المنتصف، وكذلك $\angle TRS \cong \angle PRQ$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

إذن $\Delta TRS \cong \Delta PRQ$ حسب مسلمة (SAS)

12) برهان: اكتب برهانا تسلسلياً المثال٤



L نقطة منتصف كل من $\overline{KM}, \overline{JN}$ — معطى

$\overline{JM} \cong \overline{NK}$ — معطى

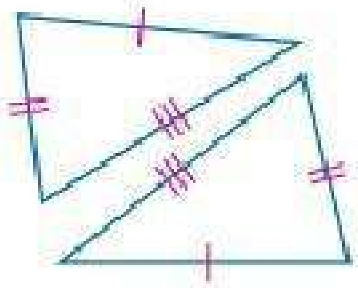
$\overline{LJ} \cong \overline{LN}$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LK}$ — تعريف نقطة المنتصف

$\triangle MJL \cong \triangle KNL$ — SSS

$\angle MJL \cong \angle KNL$ — العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين

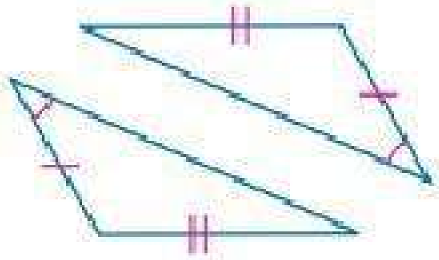
حدد ما إذا كان المثلثين في كل من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا. وضح إجابتك.

13)



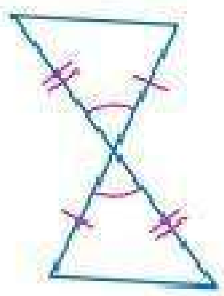
متطابقين (مسلمة): SSS

١٤)



لا يوجد تطابق

١٥)



متطابقين (مسلمة): SAS

16) إشارة تحذيرية: استعمل الشكل المجاور.

a) المجسم يسمى: هرم

(b

1) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و $\overline{CB} \cong \overline{DC}$ (معطيات)

2) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

3) $\Delta ACB \cong \Delta ACD$ حسب مسلمة (SSS)

c) المجسم ثلاثي الأبعاد ولذلك عندما يتم رسمه في المستوي الثنائي الأبعاد فان الرسم ألمنظوري يجعله يبدو وكأن المثلثين مختلفان.

١٧) برهان

$\angle TQR \cong \angle SRQ$
معطى

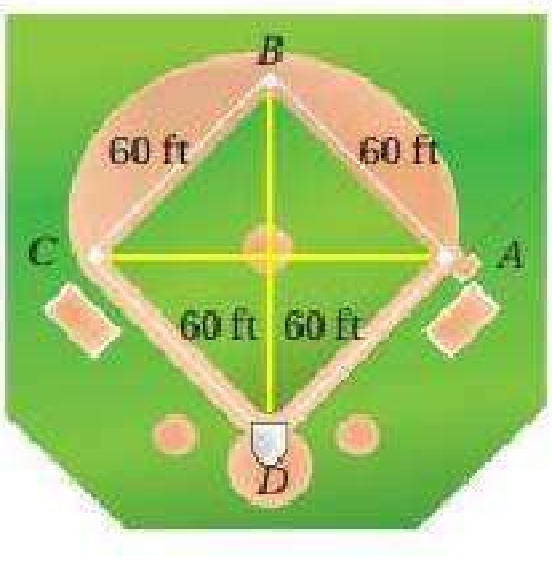
$\Delta TPQ \cong \Delta SPR$
معطى

$\overline{QR} \cong \overline{RQ}$
خاصية الانعكاس للتطابق

$\overline{TQ} \cong \overline{RS}$
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

$\Delta TQR \cong \Delta SRQ$
SAS

18) في الشكل المجاور $ABCD$ مربع:



(a

1) $\overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$ (معطيات)

2) $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$ قوائم (معطيات)

3) $\angle BCD \cong \angle CDA$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\Delta BCD \cong \Delta CDA$ حسب مسلمة (SAS)

5) $\overline{DB} \cong \overline{AC}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

(b

1) $\overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$ (معطيات)

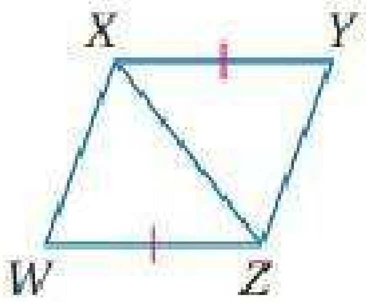
2) $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$ قوائم (معطيات)

3) $\angle BCD \cong \angle BAD$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\Delta BCD \cong \Delta BAD$ حسب مسلمة (SAS)

5) $\angle BDC \cong \angle BDA$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

19) برهان: اكتب برهان ذا عمودين.



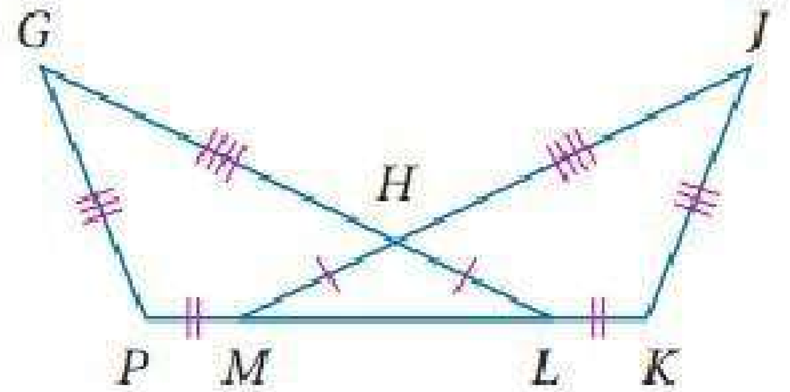
$\overline{YX} = \overline{WZ}, \overline{YX} \square \overline{ZW}$ (معطيات)

$\angle YXZ = \angle WZX$ (زاويتان متبادلتان داخليا)

$XZ = XZ$ (خاصية الانعكاس)

$\Delta YXZ = \Delta WZX$ حسب مسلمة (SAS)

20) برهان: اكتب برهانا حر:



$GH = JH \,, PG = KJ \,, HL = HM \,, PM = KL$

بما أن $GH = JH$ و $HL = HM$ إذن $GL = JM$

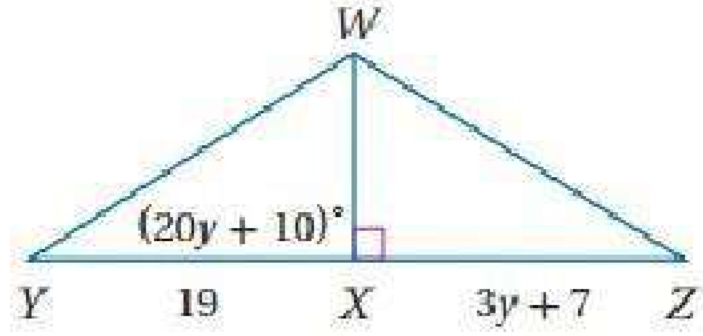
بما أن $GL = JM \,, PM = KL$ إذن $PL = KM$

إذن $\Delta GPL \cong \Delta JKM$

إذن $\angle G \cong \angle J$

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

21)



$\because \Delta WXY \cong \Delta WXZ$

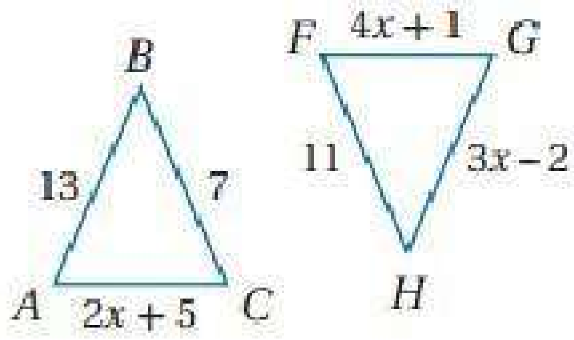
$\therefore XZ = XY$

$3y + 7 = 19$

$3y = 12$

$y = 4$

22)



$\because \Delta FGH \cong \Delta ABC$

$\therefore GH = BC$

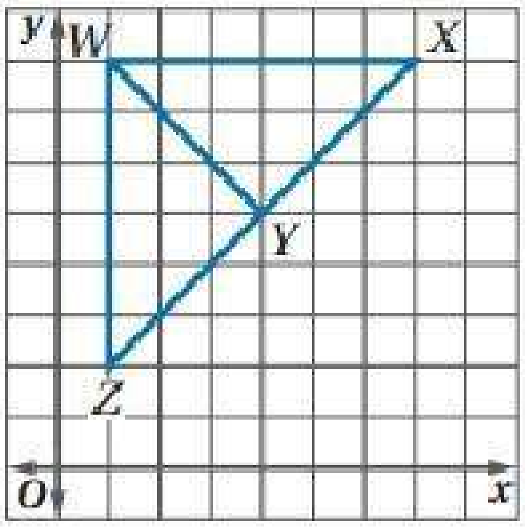
$3x - 2 = 7$

$3x = 9$

$x = 3$

مسائل مهارات التفكير العليا

23) تحد:



(a

الطريقة الأولى: تستعمل صيغة المسافة لإيجاد طول ضلع من الأضلاع، ثم تستعمل مسلمة التطابق SSS.

الطريقة الثانية: يمكن أن تجد ميل كل من $\overline{ZX}, \overline{WY}$ وتبرهن أنهما متعامدان، وبذلك تكون $\angle WYX, \angle WYZ$ كلتاهما قائمتين. ويمكن استعمال صيغة المسافة لإثبات أن XY تطابق YZ. وبما أن المثلثين يشتركان في الضلع $\overline{WY}$ ، فيمكن استعمال مسلمة SAS لإثبات تطابق المثلثين.

أعتقد أن الطريقة الثانية أفضل لأن فيها خطوتين بدل من ثلاث خطوات كما في الطريقة الأولى.

(b

$$Y\ (4,5), W\ (1,8)$$

$$m_{(YW)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$Z\ (1,2), X\ (7,8)$$

$$m_{(ZX)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{7-1} = \frac{6}{6} = 1$$

ميل $\overline{WY}$ يساوي $1-$ وميل $\overline{ZX}$ يساوي ١، وبما أن ناتج ضربهما يساوي -1

فإن $\overline{WY} \perp \overline{ZX}$. وبما أنهما متعامدان فإن قياس كل من $\angle WYZ$ و $\angle WYX$

يساوي $90°$. وباستعمال صيغة المسافة تجد أن طول $\overline{ZY}$ يساوي

$$\overline{ZY} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

وكذلك طول $\overline{XY}$ يساوي

$$\overline{XY} = \sqrt{(4-7)^2 + (5-8)^2} = 3\sqrt{2}$$

وبما أن $\overline{WY} \cong \overline{WY}$ ، فإن $\Delta WYZ \cong \Delta WYX$ حسب مسلمة التطابق SAS.

24) اكتشف الخطأ:

خالد، لان الزاوية يجب أن تكون محصورة، والزاوية هنا ليست محصورة

25) اكتب:

نعم، الحالة الأولى: إذا علمت أن الوترين متطابقان وكان أحد ضلعي القائمة في الأول يطابق الضلع المناظر له في الثاني فسيكون ضلعا القائمة الآخران متطابقين حسب نظرية فيثاغورث، ولذلك يكون المثلثان متطابقين حسب SSS.

الحالة الثانية: إذا علمت أن ضلعي القائمة في المثلث الأول يطابقان ضلعي القائمة في المثلث الثاني، فسوف يكون المثلثان متطابقين بحسب SAS

تدريب على الاختبار المعياري

26) C

$\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

27) C

$-2a + b = -7$

$-2a + (-1) = -7$

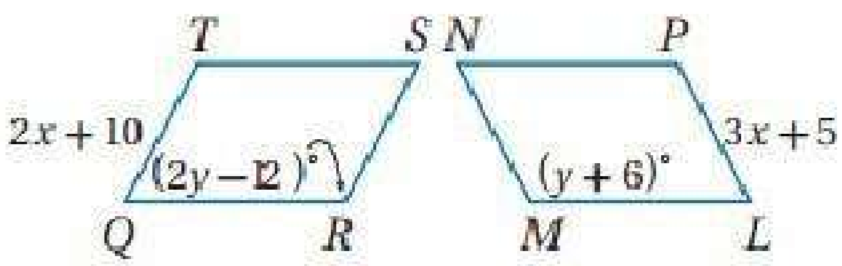
$-2a = -7 + 1$

$-2a = -6$

$a = 3$

مراجعة تراكمية

في الشكلين المجاورين، فأوجد:



28)

$\because LMNP \cong QRST$

$LP = QT$

$3x + 5 = 2x + 10$

$x = 5$

29)

$\angle LMN = \angle QRS$

$y + 6 = 2y - 12$

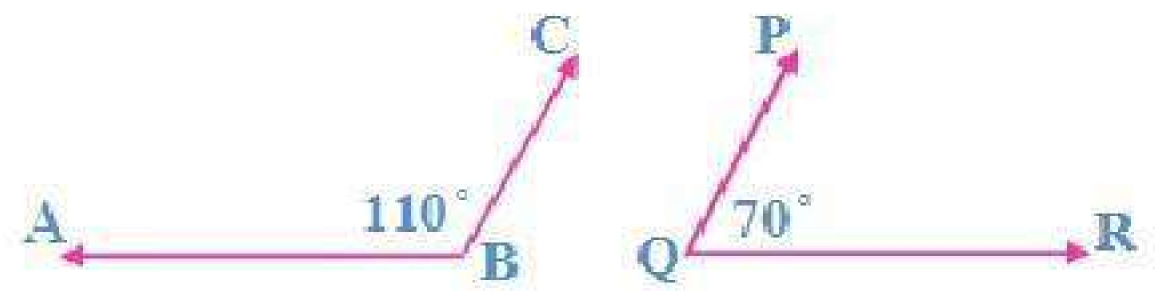
$y = 18$

30) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي:

العكس: إذا كانت الزاويتان متكاملتان فإنهما متجاورتان على مستقيم، صحيحة.

عكس العبارة الشرطية: إذ لم تكن الزاويتان متجاورتان على مستقيم فإنهما غير متكاملتان، عبارة خاطئة. والمثال المضاد هو:

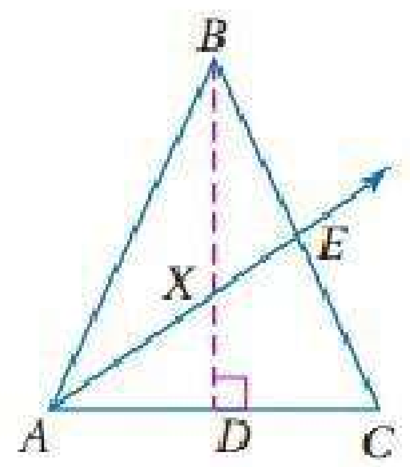
$\angle PQR , \angle ABC$ زاويتان متكاملتان، ولكنهما غير متجاورتين على مستقيم.



المعاكس الإيجابي: إذ لم تكن الزاويتان متكاملتان فإنهما غير متجاورتان على مستقيم وهي عبارة صحيحة.

استعد للدرس اللاحق

إذا علمت أن AE , BD ينصفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:



$\overline{BE}$ (31

$\angle CBD$ (32

$\angle BDA$ (33

$\overline{CD}$ (34

الفصل 3

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 3-1 إلى 3-4

1) هندسة إحداثية:

$A(-2,-1), B(-1,3)$

$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (3-(-1))^2}$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$B(-1,3), C(2,0)$

$d_{(B,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (0-3)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$A(-2,-1), C(2,0)$

$d_{(A,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-(-2))^2 + (0-(-1))^2}$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ إذن المثلث متطابق الضلعين

2) اختيار من متعدد: A

$\overline{RS} \cong \overline{RQ}$

$3y - 1 = y + 11$

$2y = 12$

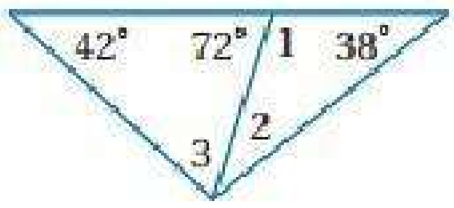
$y = 6$

$\overline{RS} = y + 11 = 6 + 11 = 17$

$\overline{RQ} = 3y - 1 = 3 \times 6 - 1 = 17$

$\overline{QS} = 4y - 9 = 4 \times 6 - 9 = 15$

أوجد كلا من قياسات الزوايا الآتية:

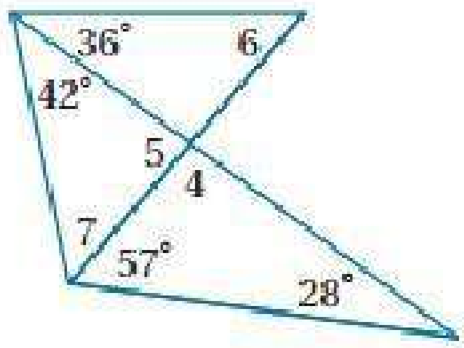


$3)\ m\angle 1 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

$4)\ m\angle 2 = 180^\circ - \left(108^\circ + 38^\circ\right) = 34^\circ$

$5)\ m\angle 3 = 180^\circ - \left(72^\circ + 42^\circ\right) = 66^\circ$

أوجد كلا من قياسات الزوايا الآتية:



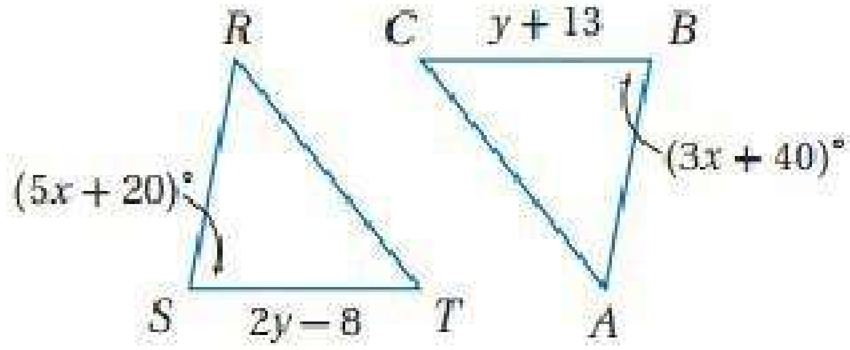
$6)\ m\angle 4 = 180^\circ - \left(57^\circ + 28^\circ\right) = 95^\circ$

$7)\ m\angle 5 = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$

$8)\ m\angle 6 = 180^\circ - \left(95^\circ + 36^\circ\right) = 49^\circ$

$9)\ m\angle 7 = 180^\circ - \left(42^\circ + 85^\circ\right) = 53^\circ$

في الشكلين أدناه، إذا علمت أن $\Delta RST \cong \Delta ABC$ فأوجد:



10)

$\Delta RST \cong \Delta ABC$

$\overline{RS} = \overline{AB}$

$5x + 20 = 3x + 40$

$2x = 20$

$x = 10$

11)

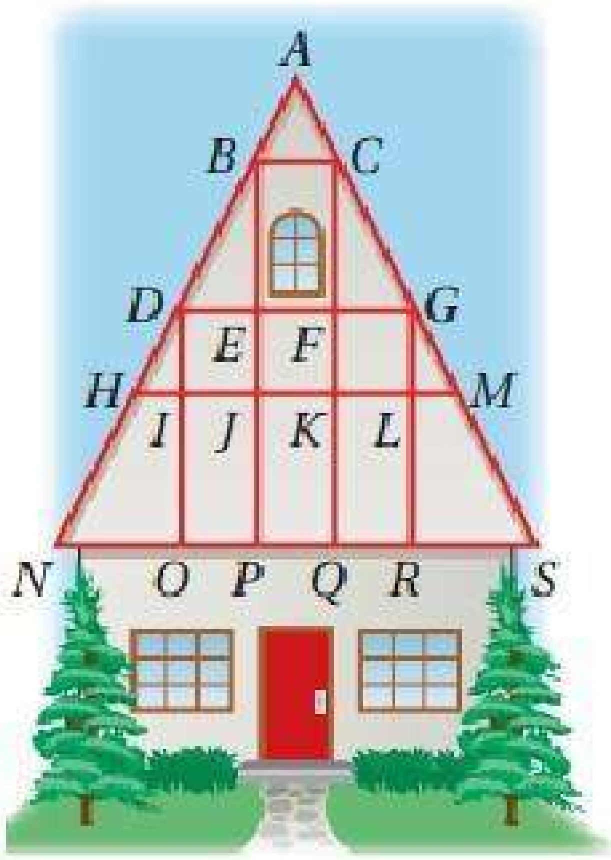
$\Delta RST \cong \Delta ABC$

$\overline{ST} = \overline{BC}$

$2y - 8 = y + 13$

$y = 21$

12) فن العمارة:

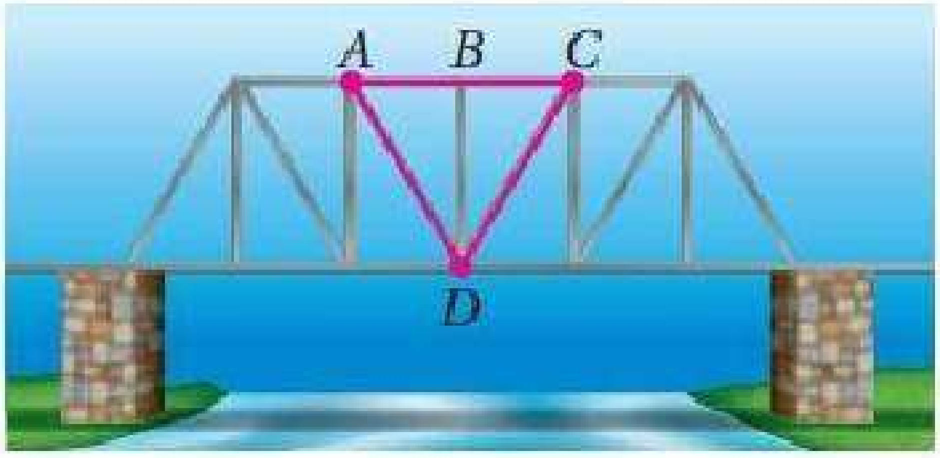


$\Delta BED = \Delta CFG$, $\Delta BJH \cong \Delta CKM$, $\Delta BPN \cong \Delta CQS$

$\Delta DIH = \Delta GLM$, $\Delta DON = \Delta GRS$

13) اختيار من متعدد: D : $\angle XCB \cong \angle LSM$

14) جسور:



$\overline{DB} \cong \overline{BD}$، وبما أن B نقطة في منتصف $\overline{AC}$ إذن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

وبما أن $\overline{DB} \perp \overline{AC}$ إذن $\angle CBD \cong \angle ABD$

إذن يوجد ضلعين وزاوية محصورة بينهم في ΔABD يناظرهم ضلعين وزاوية محصورة بينهم في ΔCBD و بحسب نظرية SAS يمكن إثبات أن المثلثين متطابقين.

حدد ما إذا كان $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ في كل من السؤالين الآتيين:

15)

$P(3,-5), Q(11,0)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(11-3)^2+(0-(-5))^2}$$

$$\sqrt{64+25}=\sqrt{89}$$

$Q(11,0), R(1,6)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1-11)^2+(6-0)^2}$$

$$\sqrt{100+36}=2\sqrt{34}$$

$P(3,-5), R(1,6)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(6-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+121}=5\sqrt{5}$$

$X\left(5,1\right), Y\left(13,6\right)$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(13-5\right)^2+\left(6-1\right)^2}$$

$\sqrt{64+25}=\sqrt{89}$

$Y\left(13,6\right), Z\left(3,12\right)$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(3-13\right)^2+\left(12-6\right)^2}$$

$\sqrt{100+36}=2\sqrt{34}$

$X\left(5,1\right), Z\left(3,12\right)$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(3-5\right)^2+\left(12-1\right)^2}$$

$\sqrt{4+121}=5\sqrt{5}$

نعم، بما أن جميع الأطوال المتناظرة متساوية إذن $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$.

16)

$P\left(-3,-3\right), Q\left(-5,1\right)$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(-5-\left(-3\right)\right)^2+\left(1-\left(-3\right)\right)^2}$$

$\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$Q\left(-5,1\right), R\left(-2,6\right)$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(-2-\left(-5\right)\right)^2+\left(6-1\right)^2}$$

$\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

$P\left(-3,-3\right), R\left(-2,6\right)$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(-2-\left(-3\right)\right)^2+\left(6-\left(-3\right)\right)^2}$$

$\sqrt{1+81}=\sqrt{82}$

$X\,(2,-6), Y\,(3,3)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-2)^2+(3-(-6))^2}$$

$\sqrt{1+81}=\sqrt{82}$

$Y\,(3,3), Z\,(5,-1)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-3)^2+(-1-3)^2}$$

$\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

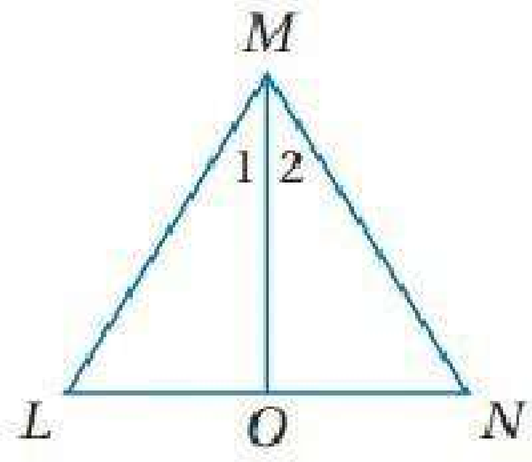
$X\,(2,-6), Z\,(5,-1)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(-1-(-6))^2}$$

$\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

بما أن ليس جميع الأضلاع المتناظرة متساوية إذن ΔXYZ لا يطابق ΔPQR

17) اكتب برهانا ذا عمودين:

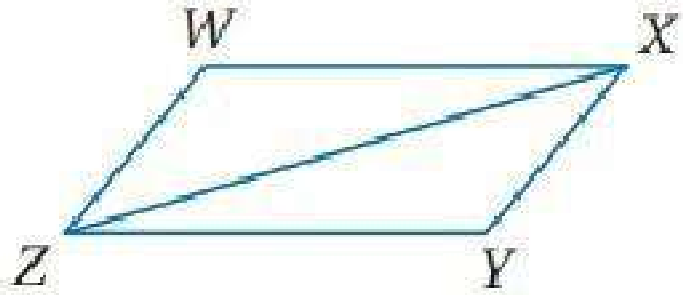


العبارات	المبررات
ΔLMN **متطابق الضلعين في** $LM = NM$	**معطيات**
MO **تنصف** ΔLMN	**معطي**
$\angle 1 = \angle 2$	**تعريف منصف الزاوية**
$MO = MO$	**خاصية الانعكاس**
$\Delta MLO = \Delta MNO$	SAS

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA , AAS

تحقق

(1



بما أن $\overline{ZX}$ تنصف $\angle WZY$ إذن $\angle WZX = \angle XZY$

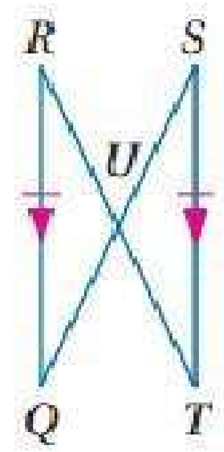
وبما أن $\overline{XZ}$ تنصف $\angle YXW$ إذن $\angle WXZ = \angle YXZ$

وبما أن $\overline{ZX} \cong \overline{ZX}$ حسب خاصية الانعكاس للتطابق

إذن $\Delta XZY \cong \Delta WXZ$ حسب ASA

تحقق

(2



$\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

معطى

$\angle RQS \cong \angle TSQ$

الزاويتان المتبادلتان داخليا متطابقتان

$\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

معطى

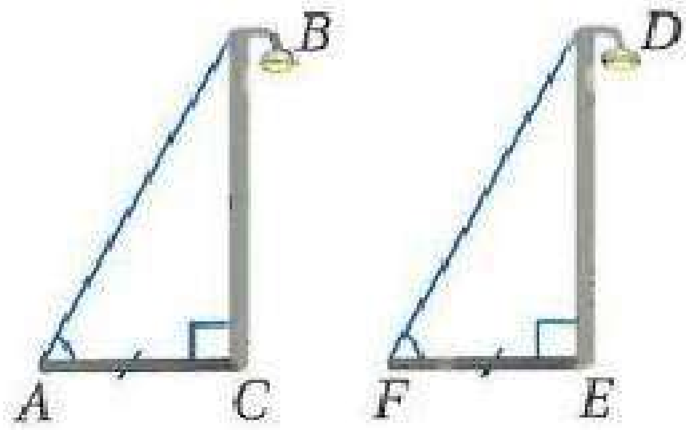
$\angle RUQ \cong \angle SUT$

الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان

$\Delta RUQ \cong \Delta TUS$

AAS

٣)



بما أن $\overline{FE} \perp \overline{DE}$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ إذن $\angle DEF \cong \angle BCA$

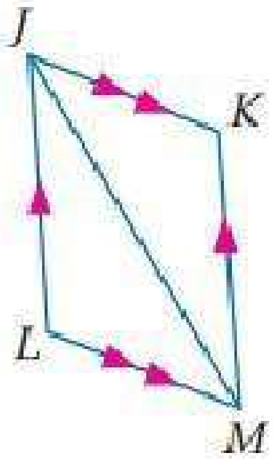
وبما أن $\angle DFE = \angle BAC$ و $AB = CD$ معطى

بحسب المسلمة AAS فان $\Delta BAC \cong \Delta DFE$

لذا $BC = DE$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

برهان:

(1



$\overline{JK} \parallel \overline{LM}$

معطى

$\angle KJM \cong \angle LMJ$

زاويتان متبادلتان داخلياً

$\overline{JL} \parallel \overline{KM}$

معطى

$\angle LJM \cong \angle KMJ$

زاويتان متبادلتان داخلياً

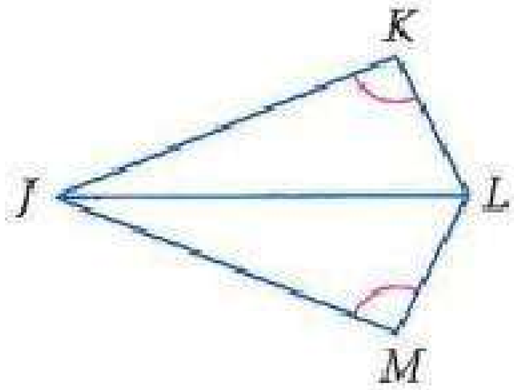
$\overline{JM} \parallel \overline{MJ}$

خاصية الانعكاس

$\Delta JML \cong \Delta MJK$

ASA

(2



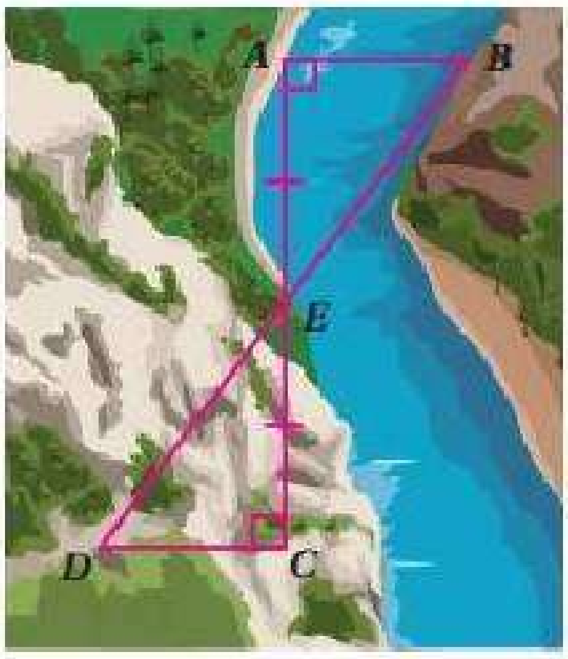
$\angle K \cong \angle M$ ، $\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$

بما أن $\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$ فإن $\angle KLJ \cong \angle MLJ$. لذا

$\Delta JML \cong \Delta JKL$ حسب نظرية التطابق AAS.

3) بناء جسور:

(a



نعلم أن $\angle DCE , \angle BAE$ متطابقتان. لأنهما زاويتان قائمتان، $\overline{AE}$ تطابق $\overline{EC}$ بحسب نظرية نقطة المنتصف. ومن نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، نعلم أن $\angle BEA \cong \angle DEC$. وبحسب ASA، يعلم المساح أن $\Delta BAE \cong \Delta DCE$

ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$، ولذا يمكن للمساح أن يقيس $\overline{DC}$ وبذلك يعرف المسافة بين A,B

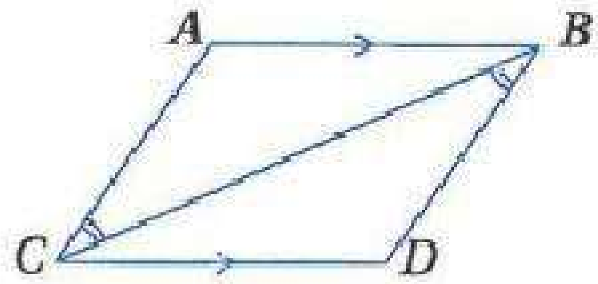
(b

المسافة بين النقطة $A,B = 60\ m$ لأن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ بحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة

تدرب وحل المسائل

برهان: اكتب برهانا حرا: المثال١

(4



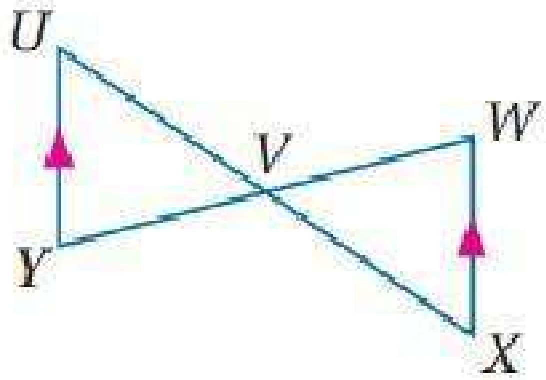
بما أن $\overline{AB}$ □ $\overline{CD}$ **إذن** $\angle BCD \cong \angle ABC$

$\angle BCA \cong \angle CBD$ ، $\overline{CB}$ **ضلع مشترك**

$\Delta BDC \cong \Delta CAB$ **بحسب مسلمة التطابق** ASA

برهان: اكتب برهان ذا عمودين. المثال٢

(5



1) V **نقطة منتصف** $\overline{YW}$، $\overline{XW}$ □ $\overline{UY}$ **(معطيات)**

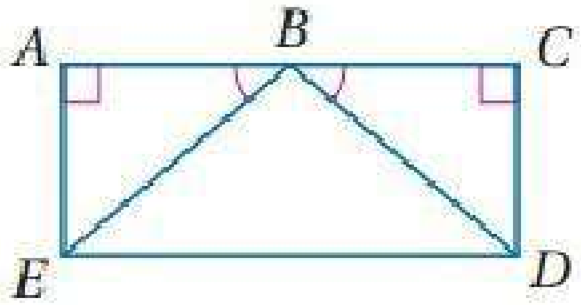
2) $\overline{VW} \cong \overline{YV}$ **(تعريف نقطة المنتصف)**

3) $\angle VYU \cong \angle VWX$ **(نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)**

4) $\angle VXW \cong \angle VUY$ **(نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)**

5) $\Delta XVW \cong \Delta UVY$ **(حسب نظرية** AAS **)**

6) برهان: اكتب برهاناً تسلسلياً.



$\angle A, \angle C$ زاويتان قائمتان
معطى

$\angle ABE \cong \angle CBD$
معطى

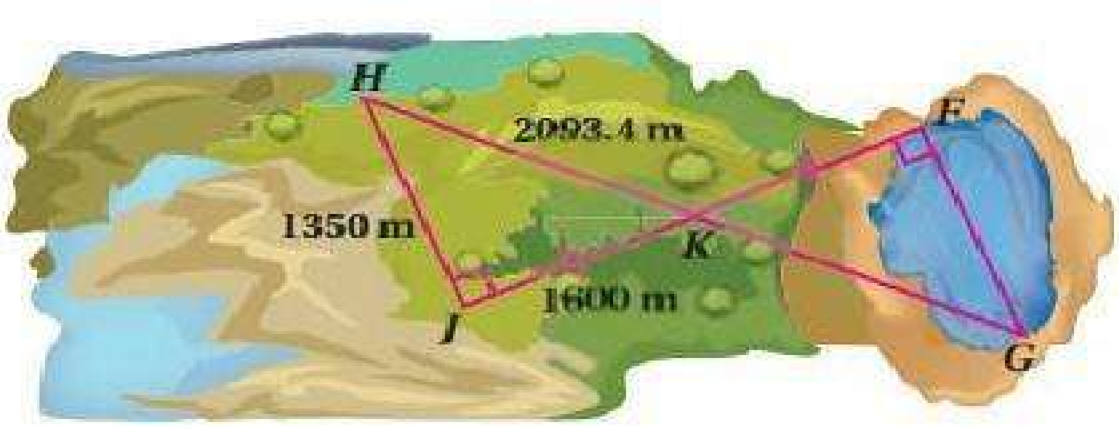
$\overline{AE} \cong \overline{CD}$
معطى

$\angle A \cong \angle C$
جميع الزوايا القائمة متطابقة

$\Delta EBA \cong \Delta DBC$
AAS

$\overline{BE} \cong \overline{BD}$
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

7) سباق زوارق: المثال٣



a) $\angle HJK \cong \angle KFG$ **لان جميع الزوايا القوائم متطابقة و** $\overline{JK} = \overline{KF}$

و $\angle HKJ \cong \angle FKG$ **متقابلتان بالرأس وبحسب** ASA **فإن** $\Delta HKJ \cong \Delta GFK$

لذا فإن $\overline{HJ} = \overline{FG}$ **لان العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.**

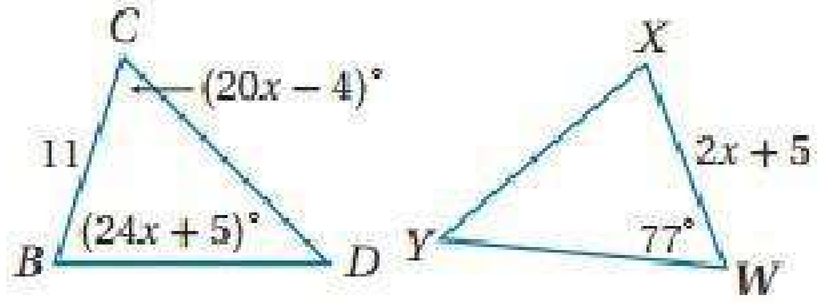
ولذلك يمكن قياس $\overline{HJ}$ **لتقدير المسافة** $\overline{FG}$ **عبر البحيرة.**

(b

بما أن $\overline{HJ} = \overline{FG}$ إذن $\overline{FG} = 1350$ أي طول البحيرة $= 1350$ وهذه المسافة غير مطابقة للمسافة المطلوبة، إذن طول البحيرة غير كاف لإجراء السباق.

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

8)



$\because \Delta BCD \cong \Delta WXY$

$\therefore BC = WX$

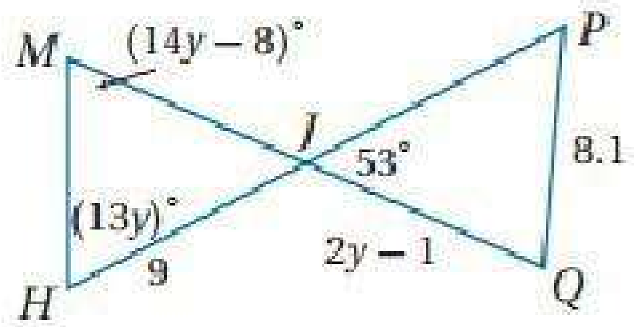
$11 = 2x + 5$

$2x = 11 - 5$

$2x = 6$

$x = 3$

9)



$\because \Delta MHJ \cong \Delta PQJ$

$\therefore HJ = QJ$

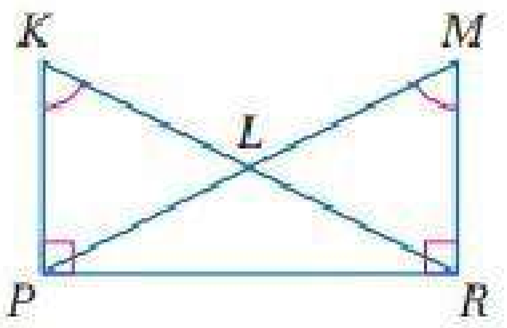
$9 = 2y - 1$

$2y = 9 + 1$

$y = 5$

برهان: اكتب برهانا ذا عمودين

(10



1) $\angle K \cong \angle M$, $\overline{KP} \perp \overline{PR}$, $\overline{MR} \perp \overline{PR}$ (معطيات)

2) $\angle KPR$, $\angle MRP$ قائمتان (تعريف التعامد)

3) $\angle KPR \cong \angle MRP$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\overline{PR} \cong \overline{PR}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

5) $\Delta KPR \cong \Delta MRP$ (AAS)

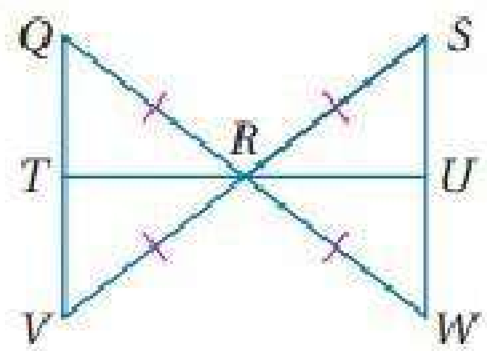
6) $\overline{KP} \cong \overline{MR}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

7) $\angle KLP \cong \angle MLR$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

8) $\Delta KLP \cong \Delta MLR$ (AAS)

9) $\angle KPL \cong \angle MRL$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(11



1) $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$ (معطيات)

2) $\angle QRV \cong \angle SRW$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) $\triangle VRQ \cong \triangle SRW$ (SAS)

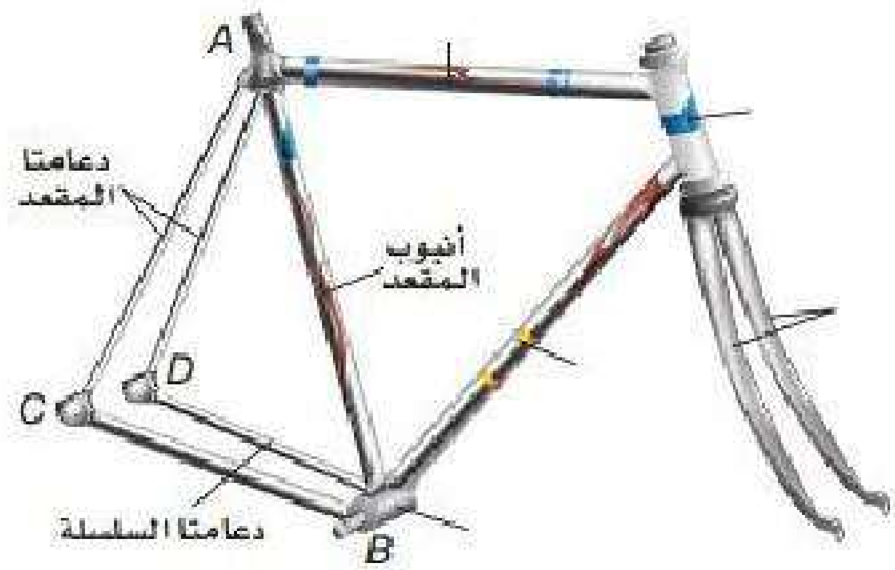
4) $\angle VQR \cong \angle SWR$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\angle QRT \cong \angle URW$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

6) $\triangle URW \cong \triangle TRQ$ (ASA)

7) $\overline{QT} \cong \overline{WU}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

12) دراجات هوائية:



1) $m\angle ACB = 68^\circ, m\angle ADB = 68^\circ, m\angle CBA = 44^\circ, m\angle DBA = 44^\circ$
(معطيات)

2) $m\angle ACB = m\angle ADB\ ,\ m\angle CBA = m\angle DBA$ (بالتعويض)

3) $m\angle ACB \cong m\angle ADB\ ,\ m\angle CBA \cong m\angle DBA$ (تعريف تطابق الزوايا)

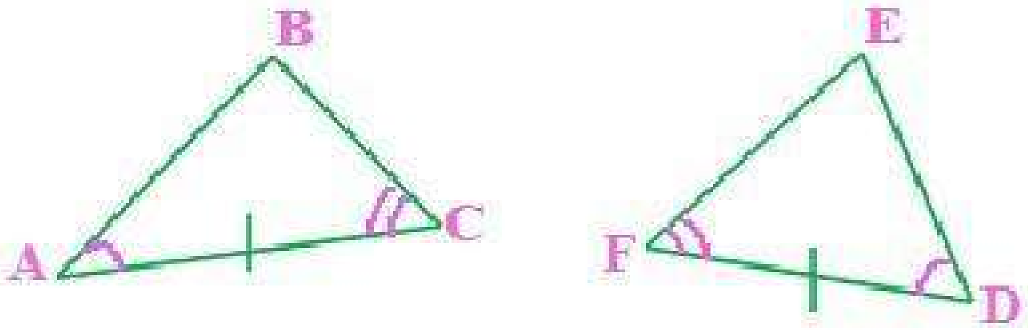
4) $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

5) $\triangle ADB \cong \triangle ACB$ (AAS)

6) $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة)

مسائل مهارات التفكير العليا

13) مسألة مفتوحة:



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ **حسب مسلمة** ASA

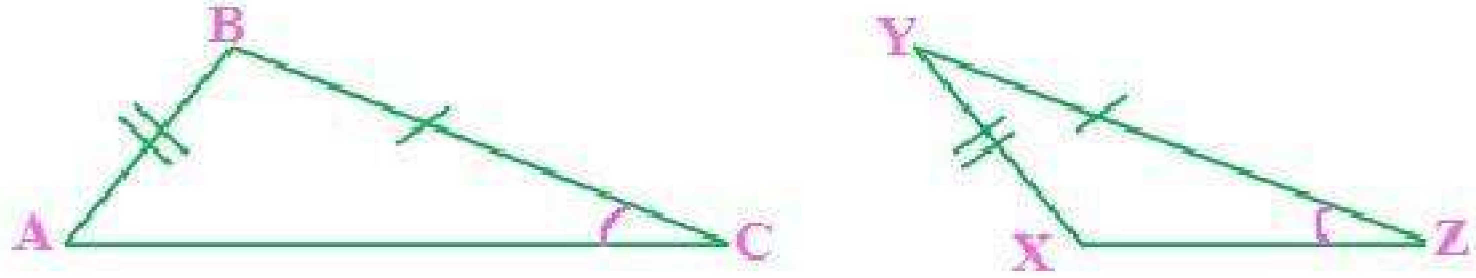
14) اكتشف الخطأ:

عمر إجابتة صحيحة، لان حسن حاول إثبات التطابق باستعمال AAA وهي ليست من الحالات التي تستعمل لإثبات التطابق

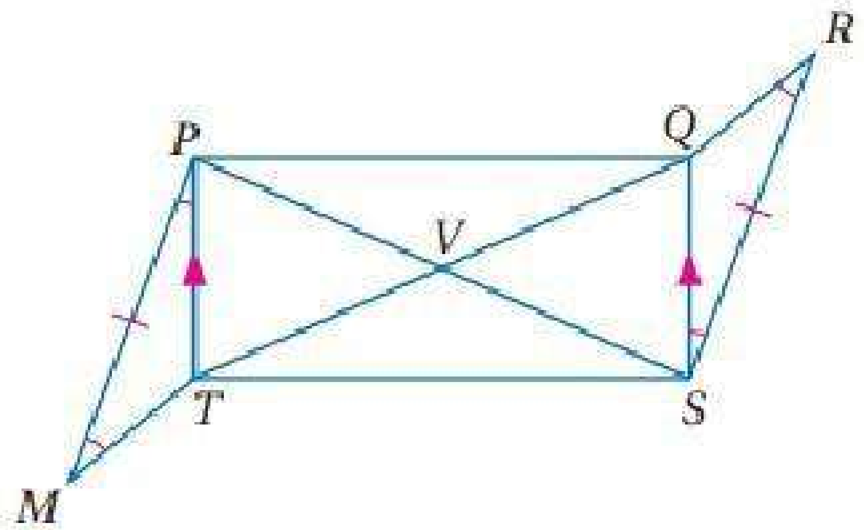
15) تبرير:

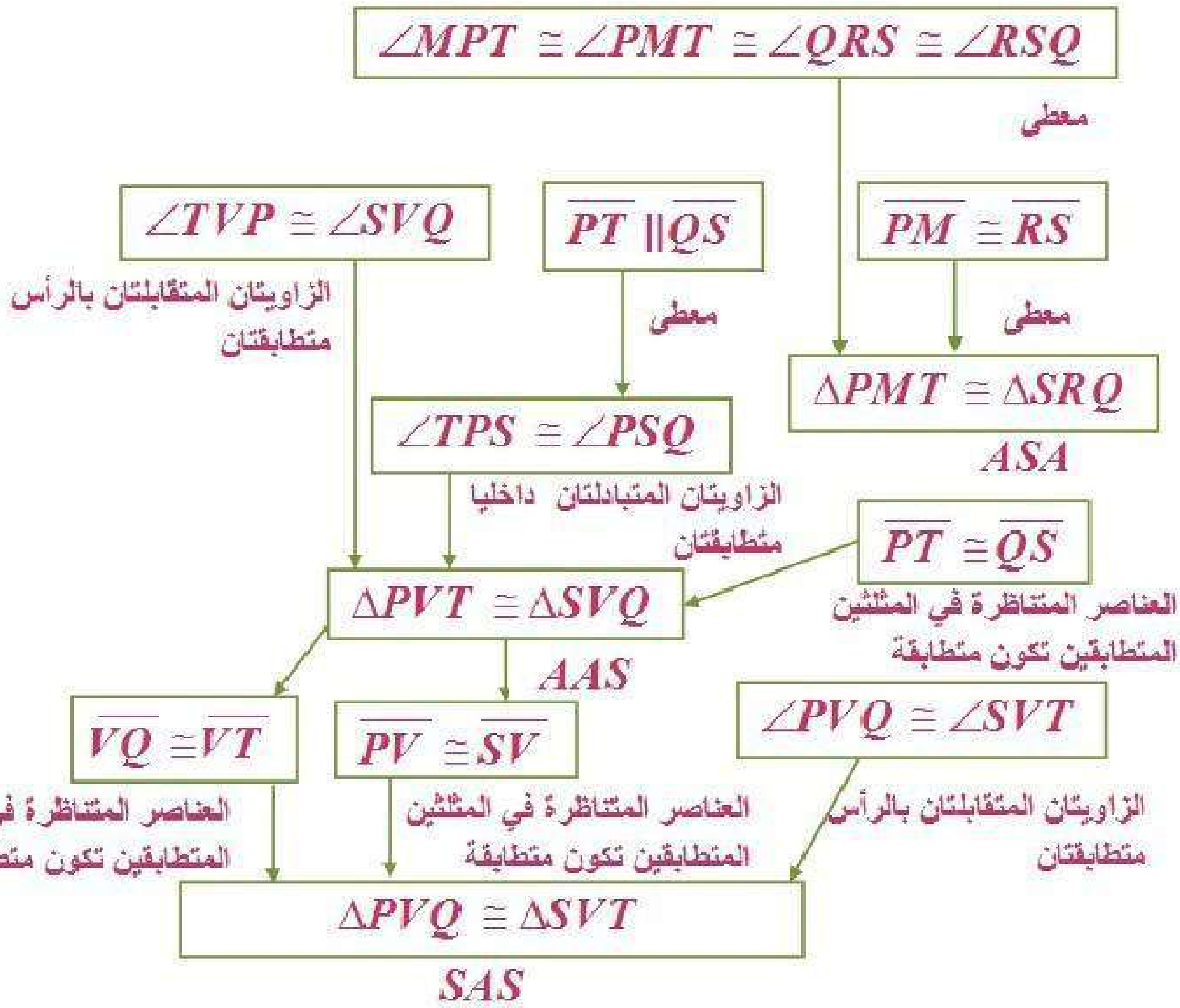
في المثلثين أدناه. نلاحظ أن $AB \cong XY$ **،** $\angle C \cong \angle Z$, $BC \cong YZ$ **،**

لكن $\Delta ABC \ncong \Delta XYZ$



16) تحد:





١٧) اكتب:

الطريقة	وقت استعمالها
تعريف المثلثين المتطابقين	عندما تكون جميع العناصر في أحد المثلثين متطابقة مع نظيراتها في المثلث الآخر
SSS	عندما تكون الأضلاع الثلاث في المثلث الأول متطابقة مع الأضلاع الثلاثة في المثلث الثاني
SAS	عندما يتطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الآخر.

ASA	عندما يتطابق زاويتان والضلع المحصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين والضلع المحصور بينهما في المثلث الآخر.
AAS	عندما تتطابق زاويتان وضلع غير محصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين وضلع غير محصور بينهما في المثلث الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري

18) B

بما أن $\angle 2 \cong \angle 1$ **(معطى) و** $\angle BCD \cong \angle BCA$ **تعريف التعامد (زاوية قائمة)**

ويوجد ضلع محصور بينهم إذن المسلمة ASA **هي المستخدمة لإثبات تطابق المثلثين**

19) A : **15**

مراجعة تراكمية

20)

$A(6,4), B(1,-6)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1-6)^2+(-6-4)^2}$

$\sqrt{25+100}=5\sqrt{5}$

$B(1,-6), C(-9,5)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-9-1)^2+(5-(-6))^2}$

$\sqrt{100+121}=\sqrt{221}$

$A(6,4), C(-9,5)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-9-6)^2+(5-4)^2}$

$\sqrt{225+1}=\sqrt{226}$

$X(0,7), Y(5,-3)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(-3-7)^2}$

$\sqrt{25+100}=\sqrt{125}$

$Y(5,-3), Z(15,8)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(15-5)^2+(8-(-3))^2}$

$\sqrt{100+121}=\sqrt{221}$

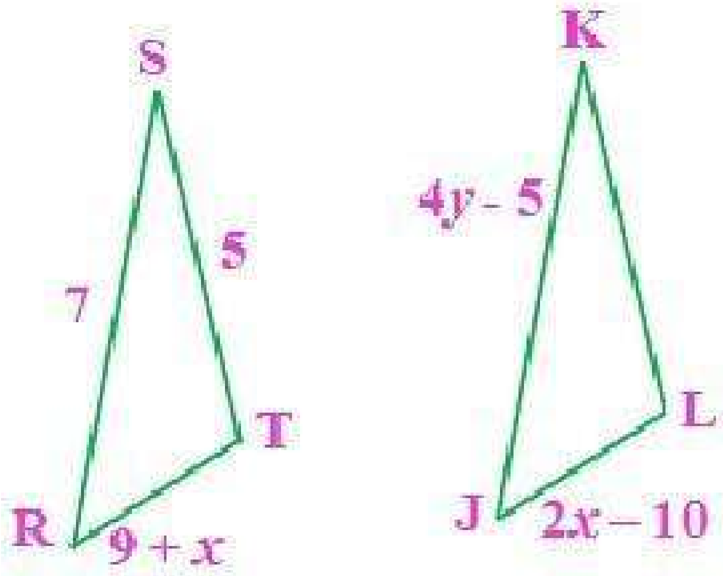
$X(0,7), Z(15,8)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(15-0)^2+(8-7)^2}$

$\sqrt{225+1}=\sqrt{226}$

الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه ومتطابقة إذن $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ بحسب SSS

21) جبر:



$\Delta RST \cong \Delta JKL$

$\overline{JL} = \overline{RT}$

$2x - 10 = 9 + x$

$x = 19$

$\overline{JK} = \overline{SR}$

$4y - 5 = 7$

$4y = 12$

$y = 3$

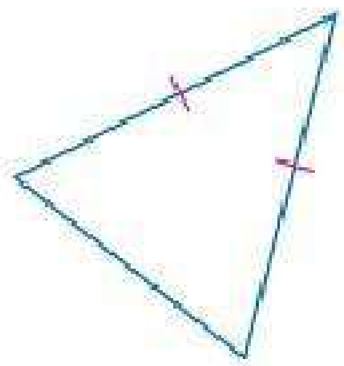
22)

p	q	$\square p$	$\square p \vee q$
F	T	T	T
T	T	F	T
F	F	T	T
T	F	F	F

استعد للدرس اللاحق

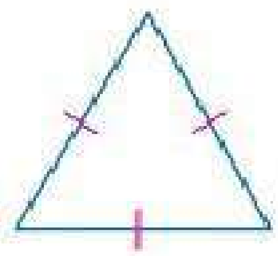
صنف كلا من المثلثين الآتيين وفقا لأضلاعه:

(23



متطابق الضلعين

(24



متطابق الأضلاع

توسع
معمل الهندسة

3-5 تطابق المثلثات القائمة

حلل:

1)

a) نعم يتطابق حسب مسلمة SAS

b) نعم يتطابق حسب مسلمة AAS

c) نعم يتطابق حسب مسلمة ASA

2)

a) LL

b) HA

c) LA

3) خمن:

لا نحتاج إلى معلومات إضافية، فتطابق الضلعين في مثلث قائم الزاوية مع نظريهما في مثلث آخر قائم الزاوية كاف لإثبات التطابق

4) نعم

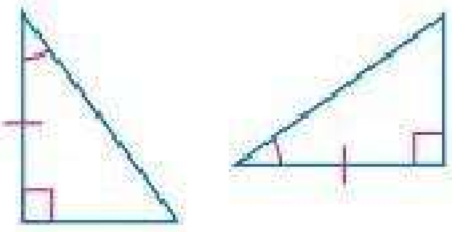
5) نعم

6) يمكن إثبات تطابق مثلثين قائمين باستعمال SSA

تمارين

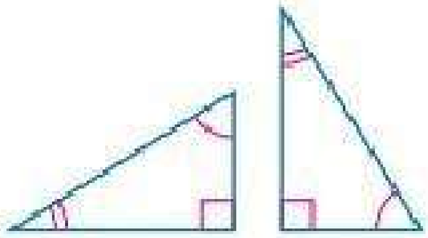
حدد ما إذا كان كل زوج من المثلثات الآتية متطابقات أم لا. وإذا كانت الإجابة (نعم) فاذكر المسلمة أو النظرية التي استعملتها:

7)



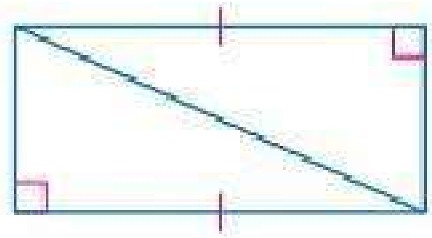
نعم متطابقين بحسب LA ضلع وزاوية حادة.

8)



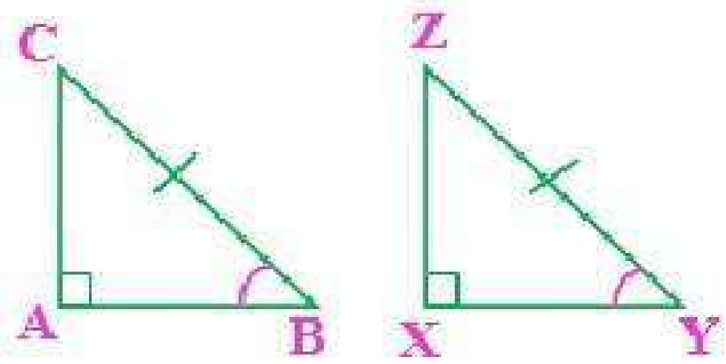
لا يمكن تطابق المثلثين.

9)



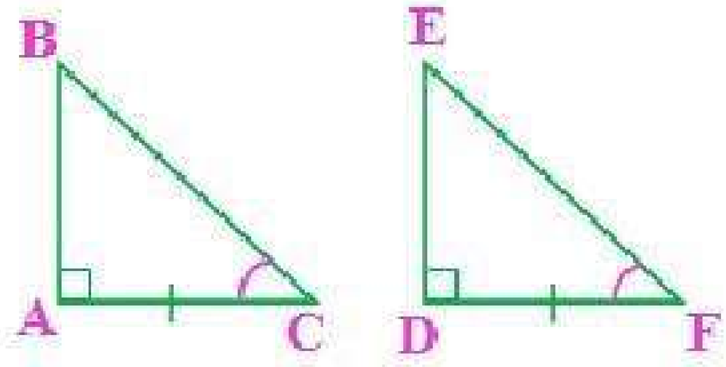
نعم متطابقين بحسب HL ضلع وزاوية حادة.

10) النظرية ٣,٧ :



البرهان: نعلم أن ΔXYZ ,ΔABC قائما الزاوية. وأن $\angle X$,$\angle A$ قائمتان، وأن $\angle B \cong \angle Y$,$\overline{BC} \cong \overline{YZ}$. وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة. فإن $\angle A \cong \angle X$. ولذلك فإن $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ بحسب AAS.

11) النظرية ٣,٨:



الحالة 1: ΔDEF ,ΔABC قائما الزاوية

$\angle A = \angle D,\ AC = DF,\ \angle C = \angle F$

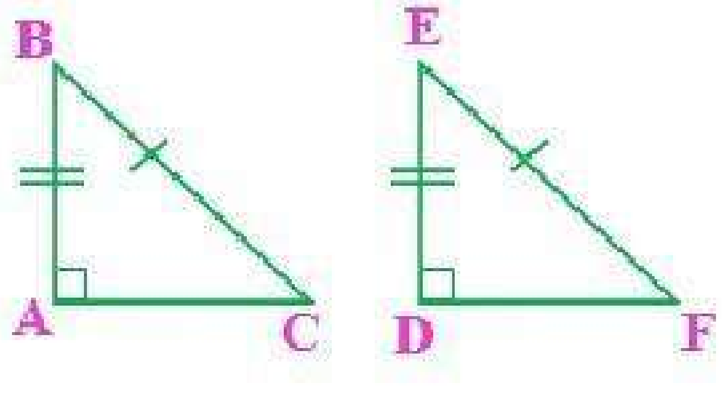
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ بحسب ASA

الحالة 2: ΔDEF ,ΔABC قائما الزاوية

$\angle A = \angle E,\ CB = DF,\ \angle B = \angle F$

$\Delta ABC = \Delta DEF$ بحسب AAS

12)



ΔDEF ,ΔABC قائما الزاوية

$\overline{BC} \cong \overline{EF},\ \overline{AB} \cong \overline{DE}$ معطى

$\overline{AB} = \overline{DE},\ \overline{BC} = \overline{EF}$ (تعريف التطابق)

نظرية فيثاغورس $(AB)^2 + (CA)^2 = (BC)^2$

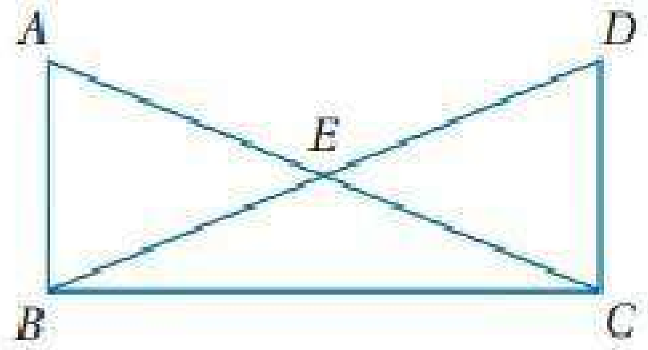
نظرية فيثاغورس $(DE)^2 + (FD)^2 = (EF)^2$

خاصية التعويض $(AB)^2 + (CA)^2 = (DE)^2 + (FD)^2$

SAS حسب $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 14:

(13



1) $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC}$. (معطيات)

2) $\angle ABC$ قائمة، $\angle DCB$ قائمة. (المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا قائمة)

3) $\Delta ABC, \Delta DCB$ قائما الزاوية. (تعريف المثلث القائم الزاوية)

4) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (معطى)

5) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$

6) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (HL)

7) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

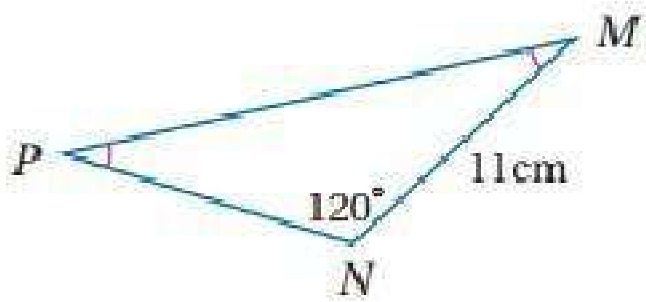
3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

تحقق

$1A)\ \angle FGJ\ ,\angle FJG$

$1B)\ GH\ ,JH$

تحقق



$2A)$

$\angle P + \angle M + \angle N = 180^\circ$

$\angle P = \angle M$

$\angle M + \angle M + 120^\circ = 180^\circ$

$2\angle M = 60^\circ$

$\angle M = 30^\circ$

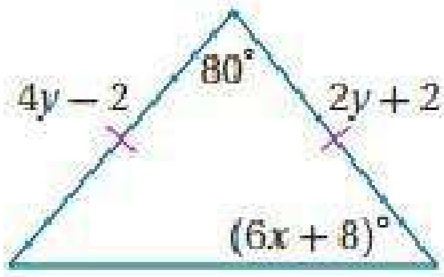
$2B)$

$\because \angle M = \angle P$

$\therefore \overline{MN} = \overline{PN}$ عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$PN = 11CM$

3) أوجد قيمة كل متغيرين في الشكل المجاور.



$$4y - 2 = 2y + 2$$

$$4y - 2y = 2 + 2$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

$$(6x + 8)^\circ = 4y - 2$$

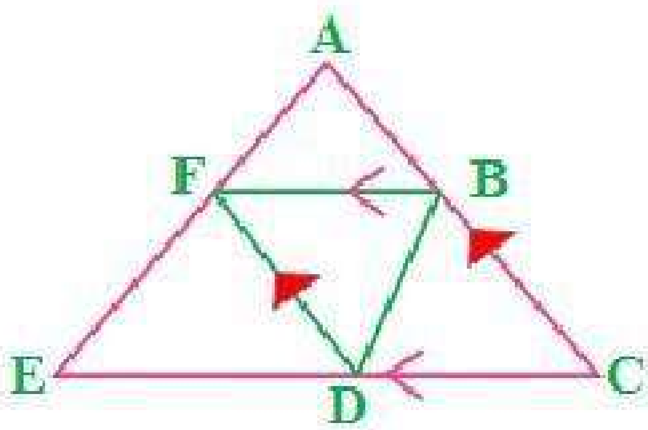
$$6x + 8 = (180 - 80) \div 2$$

$$6x + 8 = 50$$

$$6x = 42$$

$$x = 7$$

4)



1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، D نقطة منتصف $\overline{EC}$ (معطيات)

2) $m\angle A = 60^\circ, m\angle E = 60^\circ, m\angle C = 60^\circ$ (قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي 60°)

3) $m\angle E = m\angle C$ (خاصية التعدي للتطابق)

4) $\angle E \cong \angle C$ (تعريف التطابق)

5) $\overline{ED} \cong \overline{DC}$ (نظرية نقطة المنتصف)

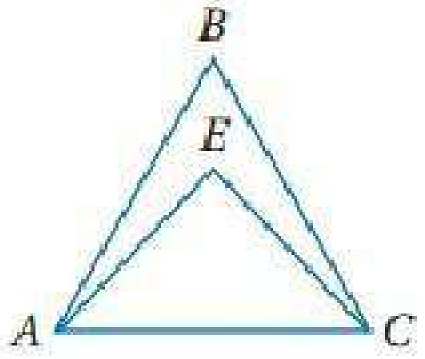
6) $\angle EFD \cong \angle BDF , \angle CBD \cong \angle BDF$ (نظرية الزاويتي المتبادلتين داخلياً)

7) $\angle EFD \cong \angle CBD$ (خاصية التعدي للتطابق)

8) $\Delta FED \cong \Delta BDC$ (AAS)

تأكـد

انظر إلى الشكل المجاور: المثال١

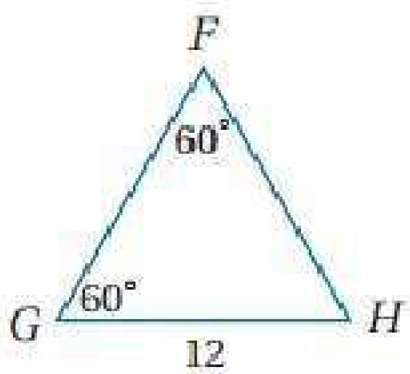


1) $\angle BAC , \angle BCA$

2) $\overline{EA}, \overline{EC}$

أوجد كلا من القياسين الآتيين: المثال٢

3)

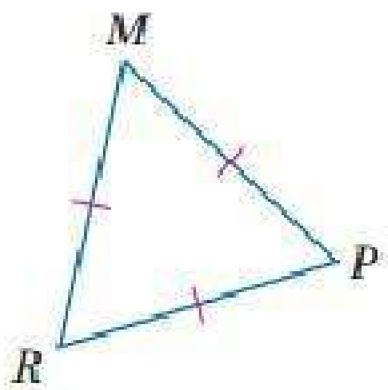


$\because \angle F = \angle G$

$\therefore GH = FH$

$FH = 12$

4)

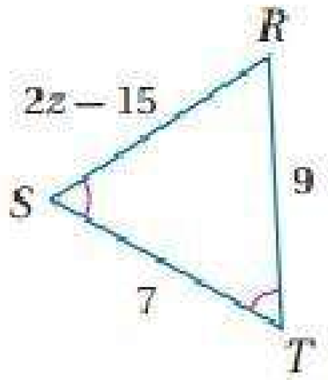


حسب نتيجة ٣,٤ قياس كل زاوية °60 في المثلث المتطابق الأضلاع

$\angle MRP = 60^\circ$

جبر: أو جد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين: المثال٣

5)



$\because \angle S = \angle T$

$RT = RS$

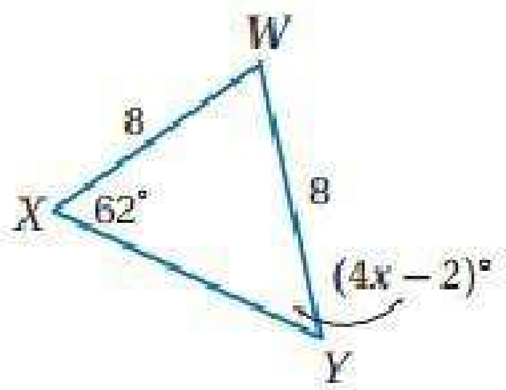
$9 = 2z - 15$ (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

$2z = 9 + 15$

$2z = 24$

$z = 12$

6)



$\because WY = XY$

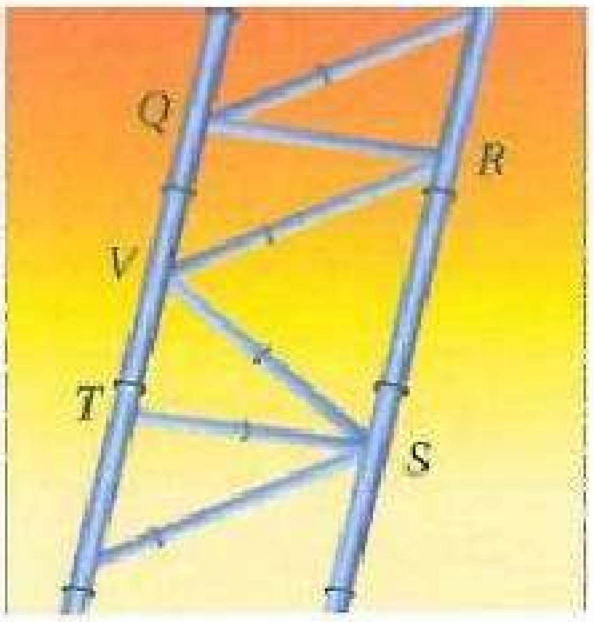
$\angle WYX = \angle WXY$

$4x - 2 = 62$

$4x = 64$

$x = 16$

7) **القاطرة السريعة:** المثال٤



a) المعطيات: $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ عموديان على $\overline{QT}$،

المطلوب: $\Delta RQV \cong \Delta STV$

البرهان:

- $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ عموديان على $\overline{QT}$، و ΔVSR متطابق الضلعين و قاعدته $\overline{SR}$ و $\overline{QT}\ \square\ \overline{SR}$ (معطى)
- $\angle RQV$, $\angle STV$ زوايا قائمة
- $\angle RQV \cong \angle STV$ تعريف الزاوية القائمة
- $\overline{VR} \cong \overline{VS}$ تعريف المثلث المتطابق الضلعين
- $\angle VSR \cong \angle VRS$ تعريف المثلث المتطابق الضلعين
- $\angle TVS \cong \angle VRS$, $\angle QVR \cong \angle VRS$
- $\angle TVS \cong \angle QVR$
- $\angle RQV \cong \angle STV$ حسب مسلمة AAS

b) من نظرية فيثاغورث $QV = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5m$

وحيث أن الاضلاع المتناظرة في المثلثين المتطابقين يكونوا متطابقين

إذن $VT = 1.5m$

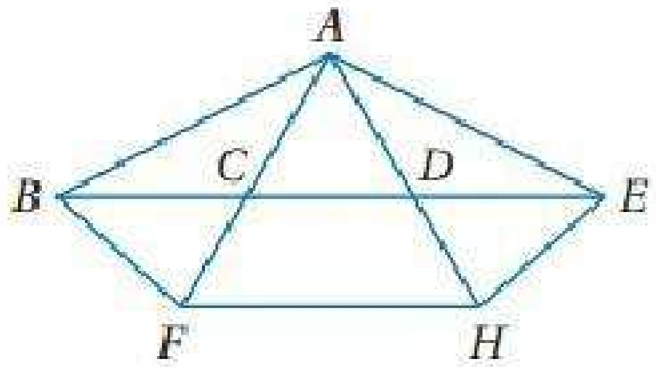
$\because QV + VT = QT$

$1.5 + 1.5 = QT$

$QT = 3m$

تدرب وحل المسائل

انظر إلى الشكل المجاور:



8)

$\angle ABE, \angle AEB$

9)

AB, AF

10)

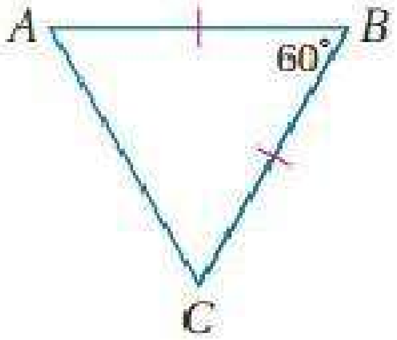
$\angle ACD, \angle ADC$

11)

AD, DE

أوجد كلا من القياسين الآتيين:

12)



$\because AB = BC$

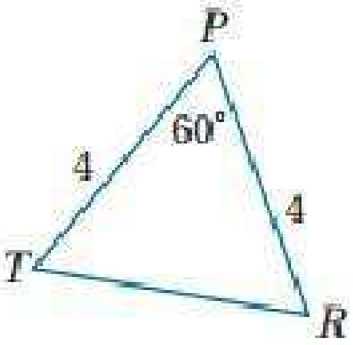
نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$\therefore \angle A = \angle C$

$\angle A = \angle C = \left(180^\circ - 60^\circ\right) \div 2 = 60^\circ$

$m\angle BAC = 60^\circ$

13)



$\because PR = PT$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

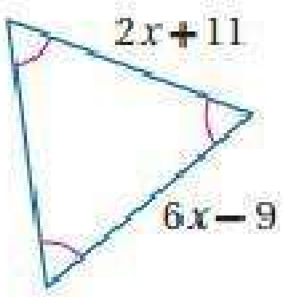
$\therefore \angle R = \angle T$

$\therefore \angle R = \angle T = \left(180^\circ - 60^\circ\right) \div 2 = 60^\circ$

$PR = PT = TR$

$TR = 4cm$

14)



بما أن جميع زوايا المثلث متطابقة إذن الأضلع متطابقة حسب عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

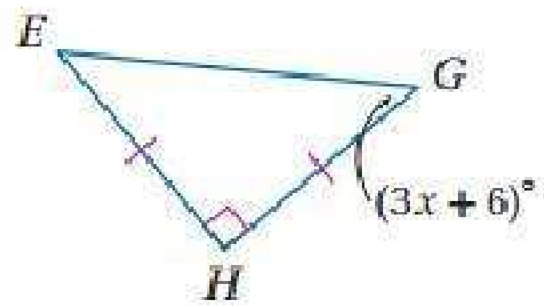
$6x - 9 = 2x + 11$

$6x - 2x = 11 + 9$

$4x = 20$

$x = 5$

15)



$\because HG = HE$

$\therefore \angle E = \angle G = 45^\circ$

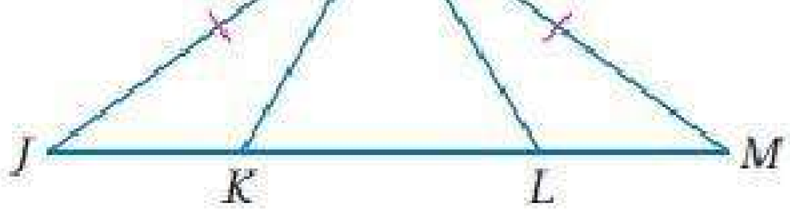
$3x + 6 = 45$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$3x = 39$

$x = 13$

برهان: اكتب برهانا حرا. المثال٤

(16



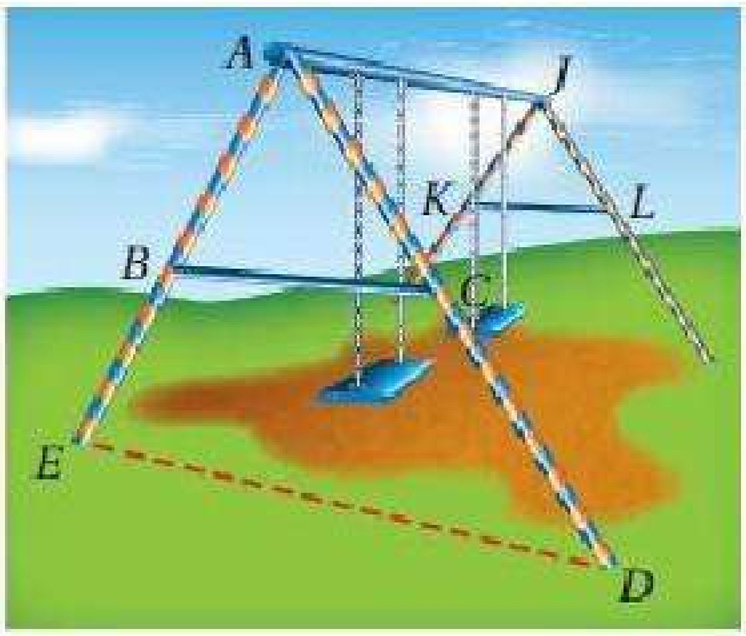
بما أن $HM = HJ$ إذن $\angle HMJ = \angle HJM$

وبما أن ΔHKL متطابق الأضلاع إذن $\angle HKJ = \angle HLM$ لأن $\angle HKL = \angle HLK$ من تطابق المثلث

إذن $\Delta HKJ \cong \Delta HLM$ حسب نظرية AAS.

ولان العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فان $\angle MHL = \angle JHK$

17) حدائق:



(a

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ إذن $\angle ABC = \angle ACB$

حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ$

$\angle ABC + \angle ABC = 130^\circ$ (خاصية التعويض)

$\angle ABC = 65^\circ$

(b

العبارات	المبررات
$AB \cong AC$, $BE \cong CD$	معطيات

$AB = AC\ ,\ BE = CD$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$AB + BE = AE$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$AC + CD = AD$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$AB + BE = AC + CD$	خاصية الجمع للمساواة
$AE = AD$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
مثلث AED متطابق الضلعين	تعريف المثلث المتطابق الضلعين

(c

1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}\ ,\ \overline{BC} \parallel \overline{ED},\ \overline{ED} \cong \overline{AD}$ (معطيات)

2) $\angle ABC \cong \angle ACB$ (نظرية المثلث متطابق الضلعين)

3) $\angle ABC = \angle ACB$ (تعريف تطابق الزوايا)

4) $\angle ACB \cong \angle ADE\ ,\ \angle ABC \cong \angle AED$ (زوايا متناظرة)

5) $\angle ACB = \angle ADE\ ,\ \angle ABC = \angle AED$ (تعريف تطابق الزوايا)

6) $m\angle AED = m\angle ACB$ (بالتعويض)

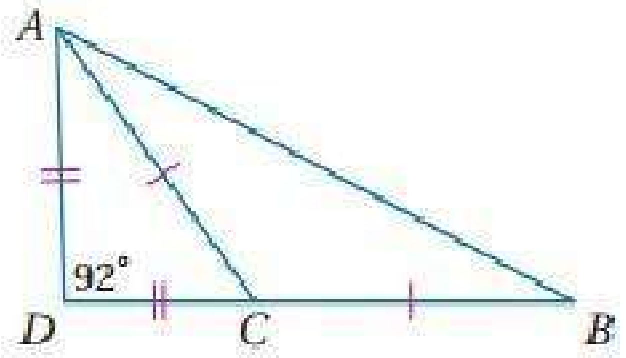
7) $m\angle AED = m\angle ADE$ (بالتعويض)

8) $\angle AED \cong \angle ADE$ (تعريف تطابق الزوايا)

9) $\overline{AD} \cong \overline{AE}$ (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

10) ΔAED متطابق الأضلاع (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

أوجد كلا من القياسات الآتية:



18)

$\because DA = DC$

$\angle CAD = \angle ACD$

$2\angle CAD = 180^\circ - 92^\circ$

$\angle CAD = 44^\circ$

19)

$\because DA = DC$

$\angle CAD = \angle ACD$

$2\angle ACD = 180^\circ - 92^\circ$

$\angle ACD = 44^\circ$

20)

$\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD$

$\angle ACB = 180^\circ - 44^\circ$

$\angle ACB = 136^\circ$

21)

$\because AC = CB$

$\angle CAB = \angle ABC$

$2\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB$

$2\angle ABC = 180^\circ - 136^\circ$

$\angle ABC = 22^\circ$

برهان: اكتب برهانا ذا عمودي لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

22) الحالة الأولى:

1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع (معطى)

2) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

3) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (تعريف المثلث المتطابق الضلعين)

4) $\triangle ABC$ متطابق الزوايا (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

الحالة الثانية:

1) $\triangle ABC$ متطابق الزوايا (معطى)

2) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

3) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما يكونان متطابقين)

4) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

(23

1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع (معطى)

2) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

3) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

4) $m\angle A = m\angle B = m\angle C$ (تعريف التطابق)

5) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^{\circ}$ (نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

6) $m\angle A = 60^{\circ}$ (خاصية القسمة)

7) $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60^{\circ}$ (بالتعويض)

(24

1) افترض أن $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$ (مسلمة المنقلة)

2) $\angle ABD \cong \angle CBD$ (تعريف منصف الزاوية)

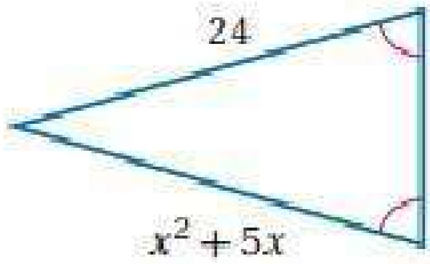
3) $\angle A \cong \angle C$ (معطى)

4) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)

5) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (AAS)

6) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:



25)

$$x^2 + 5x = 24$$

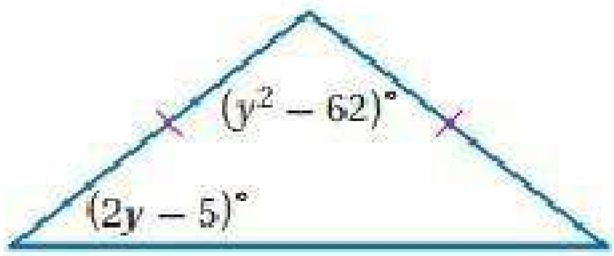
$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$$(x-3)(x+8) = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -8 \text{ ✗}$$



26)

$$(y^2 - 62) + 2(2y - 5) = 180^\circ$$

$$y^2 - 62 + 4y - 10 = 180^\circ$$

$$y^2 + 4y - 62 - 190^\circ = 0$$

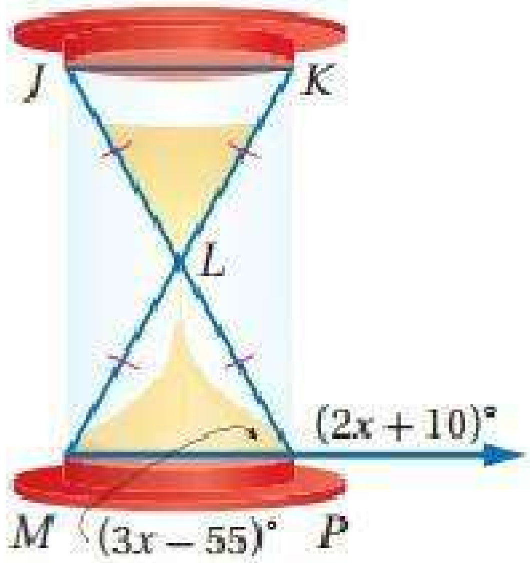
$$y^2 + 4y - 252^\circ = 0$$

$$(y+18)(y-14) = 0$$

$$y = 14$$

$$y = -18 \text{ ✗}$$

الساعة الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كل من القياسات الآتية:



27)

$$(2x+10)+(3x-55)=180^\circ$$

$$5x-45=180$$

$$5x=180+45$$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$x=45$$

$$\angle LPM=(3x-55)=3\times 45-55$$

$$\angle LPM=80^\circ$$

28)

$$\because LP=LM$$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$$\angle LPM=\angle LMP=80^\circ$$

29)

$$\angle MLP=180^\circ-(80^\circ+80^\circ)$$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle MLP=20^\circ$$

$$\angle MLP=\angle JLK=20^\circ$$ زاويتان متقابلتان بالرأس

30)

$\angle JKL + \angle KJL = 180^\circ - 20^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle JKL + \angle KJL = 160^\circ$

$\because LK = JL$

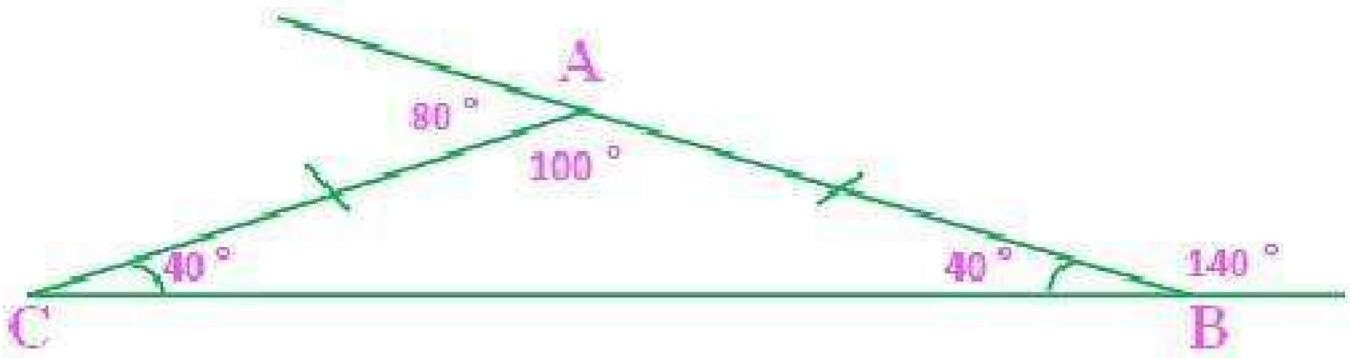
$\therefore \angle JKL = \angle KJL$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين

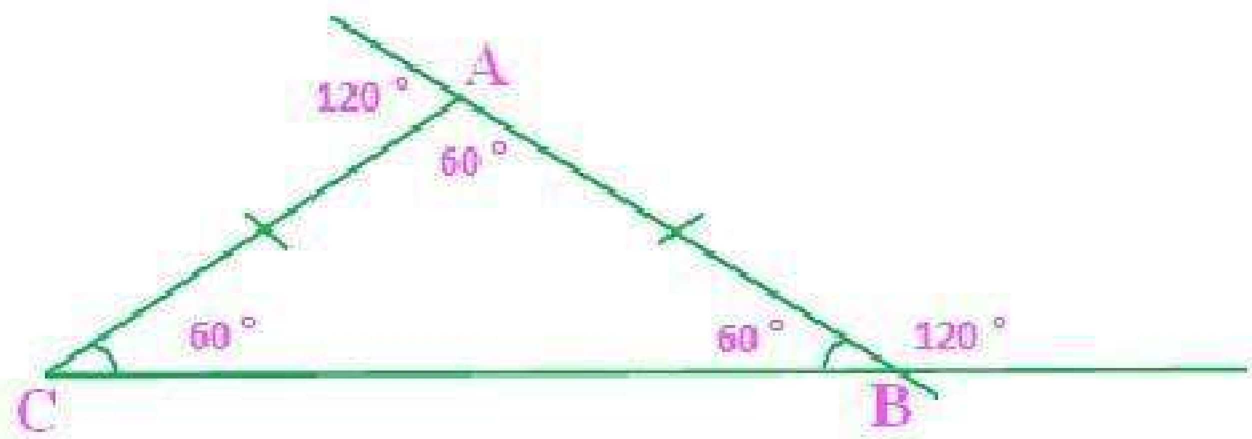
$2\angle JKL = 160^\circ$

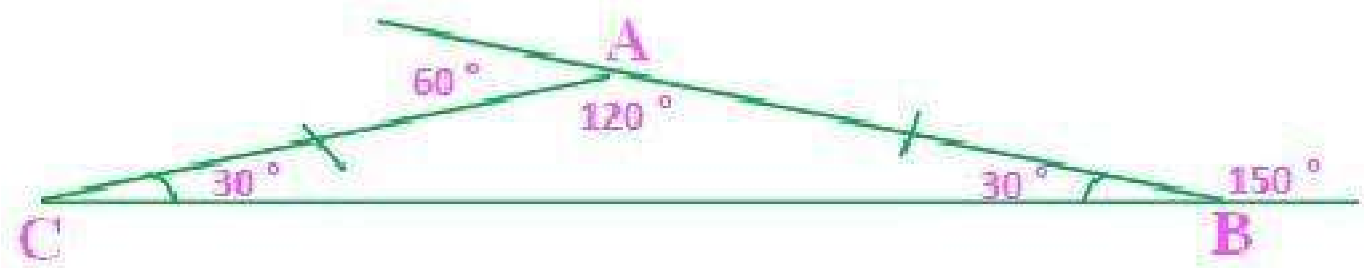
$\angle JKL = 80^\circ$

31) تمثيلات متعددة:

a) هندسيا:







b) جدوليا:

$m\angle 5$	$m\angle 4$	$m\angle 3$	$m\angle 1$
٤٠	٤٠	١٠٠	١٤٠
٦٠	٦٠	٦٠	١٢٠
٣٠	٣٠	١٢٠	١٥٠

$m\angle 5$	$m\angle 4$	$m\angle 3$	$m\angle 2$
٤٠	٤٠	١٠٠	٨٠
٦٠	٦٠	٦٠	١٢٠
٣٠	٣٠	١٢٠	٦٠

c) لفظيا:

زاويتان متجاورتان على مستقيم $m\angle 5 = 180 - m\angle 1$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين $m\angle 4 = m\angle 5$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث $m\angle 3 = 180 - (m\angle 4 + m\angle 5)$

d) جبريا:

$$m\angle 5 = 180 - x$$

$$m\angle 4 = 180 - x$$

$$m\angle 3 = 180 - 2(180 - x) = 2x - 180$$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) تحد:

نعلم أن ΔWJZ متطابق الأضلاع، وبما أن المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا، فإن $\angle ZWJ \cong \angle WJZ \cong \angle JZW$ وبحسب تعريف تطابق الزوايا

$$m\angle ZWJ = m\angle WJZ = m\angle JZW$$

وبما أن $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ فإن:

$m\angle ZWP = m\angle WJM = m\angle JZL$ ومن تعريف تطابق الزوايا وباستعمال

مسلمة جمع الزوايا ينتج أن:

$$m\angle ZWJ = m\angle ZWP + m\angle PWJ\,,$$
$$m\angle WJZ = m\angle WJM + m\angle MJZ\,,$$
$$m\angle JZW = m\angle JZL + m\angle LZW$$

وبالتعويض ينتج أن:

$$m\angle ZWP + m\angle PWJ = m\angle WJM + m\angle MJZ = m\angle JZL + m\angle LZW$$

وبالتعويض مرة أخرى ينتج أن:

$$m\angle ZWP + m\angle PWJ = m\angle ZWP + m\angle PJZ = m\angle ZWP + m\angle LZW$$

وبحسب خاصية الطرح للمساواة ينتج أن:

$m\angle PWJ = m\angle PJZ = m\angle LZW$. ومن تعريف التطابق ينتج أن

$\angle PWJ \cong \angle PJZ \cong \angle LZW$. وبحسب مسلمة ASA ينتج أن

$\Delta WZL \cong \Delta ZJM \cong \Delta JWP$. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$

تبرير:

33) أحيانا، تكون صحيحة فقط عندما يكون قياس زاوية الرأس عددا زوجيا.

34) غير صحيحة أبدا، لان قياس زاوية الرأس يساوي (قياس إحدى زاويتي القاعدة)2 – 180، إذا كان قياس احدي زاويتي القاعدة عدد صحيح فان مجموع قياس زاويتي القاعدة يكون عددا زوجيا وبالتالي فان قياس زاوية الرأس سيكون زوجيا أيضا.

35) مسألة مفتوحة:

لا يمكن أن يحوى المثلث أكثر من زاوية منفرجة، لذا لا يمكن رسم المثلث المطلوب.

36) اكتب:

مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 وزاويتا القاعدة لهما نفس القياس، لذا فان قياس زاوية رأس المثلث يساوي 180 ناقصا مثلي قياس إحدى زاويتي القاعدة

تدريب على الاختبار المعياري

37) $A \ : \angle A \cong \angle BCA$

38) D

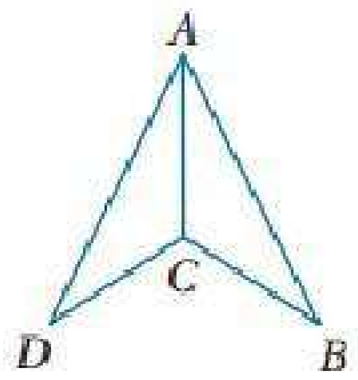
$x = -3$

$4 \times (-3)^2 - 7 \times (-3) + 5$

$36 + 21 + 5 = 62$

مراجعة تراكمية

39)



$\because AB = AD = 27in$ **(معطى)**

$\because CB = DC = 7in$

$\because AC = AC$ **حسب خاصية الانعكاس**

$\therefore \Delta ADC \cong \Delta ABC$ **حسب** SSS

اذكر الخاصية التي تبرر كلا من العبارات الآتية:

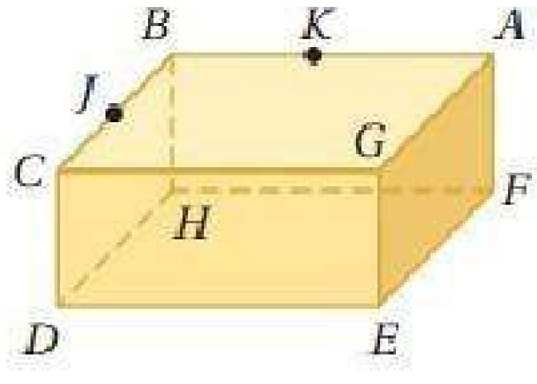
40) خاصية التوزيع

41) خاصية الجمع للمساواة

42) خاصية التعويض

43) خاصية التعدي

انظر إلي الشكل المجاور:



44) 6 مستويات.

45) A, K, B

استعد للدرس اللاحق

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفيها كما يأتي:

46) $A\left(2,15\right),\ B\left(7,9\right)$

$$\left(\frac{2+7}{2}\right),\left(\frac{9+15}{2}\right)$$

$$\left(4.5,12\right)$$

47) $C\ \left(-4,6\right),\ D\left(2,-12\right)$

$$\left(\frac{-4+2}{2}\right),\left(\frac{6-12}{2}\right)$$

$$\left(-1,-3\right)$$

48) $E\ \left(3,2.5\right),\ F\ \left(7.5,4\right)$

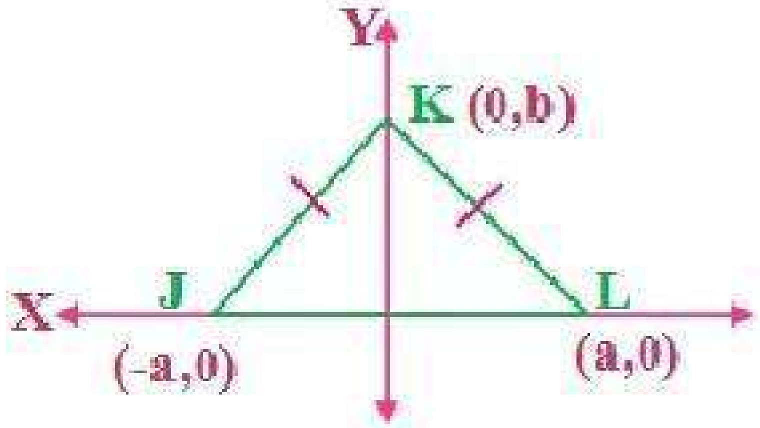
$$\left(\frac{7.5+3}{2}\right),\left(\frac{2.5+4}{2}\right)$$

$$\left(5.25,3.25\right)$$

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي

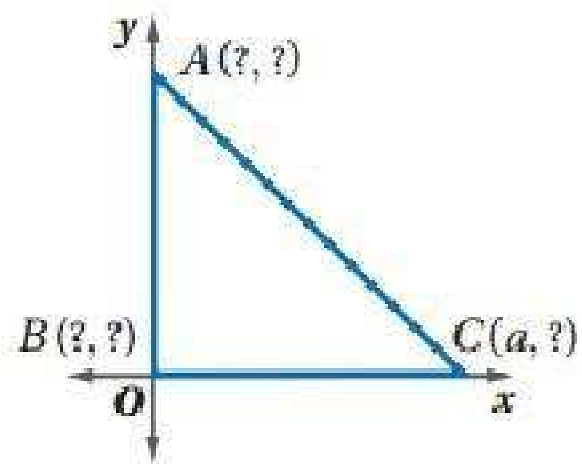
تحقق
صفحة 190

(1



تحقق
صفحة 191

(٢

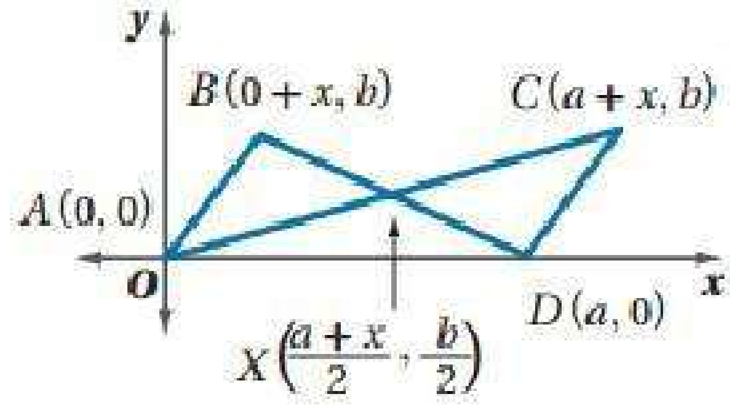


بما أن الرأس B يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0,0)$

وبما أن الرأس C يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y=0$ وتكون الرأس C: $(a,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين والرأس A يقع على المحور Y فإن الإحداثي $X=0$ وتكون الرأس A: $(0,a)$

(3



نقطة منتصف $\overline{AC}$ هي

$$\left(\frac{0+a+x}{2}, \frac{0+b}{2}\right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

نقطة منتصف BD هي $\left(\frac{0+x+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$\overline{AC}$ **ينصف** $\overline{BD}$ **و** $\overline{BD}$ **ينصف** $\overline{AC}$ **وذلك بتعريف المنصف.**

$\overline{BX} \cong \overline{XD}$ **و** $\overline{AX} \cong \overline{XC}$ **وذلك بتعريف المنصف.**

$$CD = \sqrt{\left((a+x)-a\right)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

$$AB = \sqrt{\left((0+x)-0\right)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

إذن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ **بتعريف تطابق القطع المستقيمة.**

$\Delta ABX \cong \Delta CDX$ **بحسب** SSS

4) جغرافيا:

افترض أن T ترمز لمدينة تبوك، A ترمز لمدينة عرعر، Hلمدينة حائل

$$AT=\sqrt{(28.37-30.9)^2+(36.6-41.13)^2}\approx 5.19$$

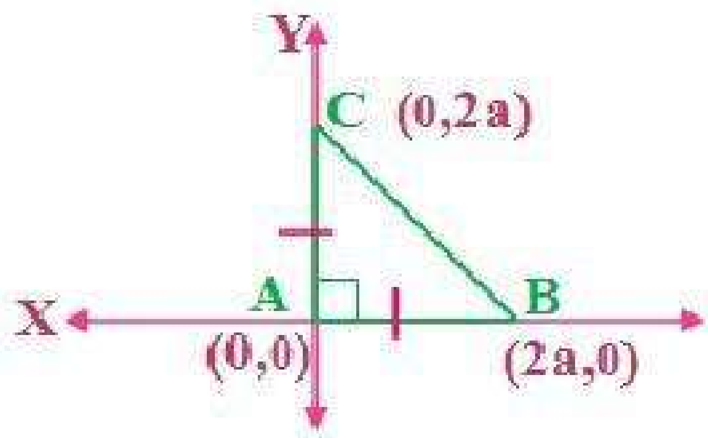
$$HT=\sqrt{(28.37-27.43)^2+(36.6-41.68)^2}\approx 5.17$$

$$AH=\sqrt{(30.9-27.43)^2+(41.13-41.68)^2}\approx 3.51$$

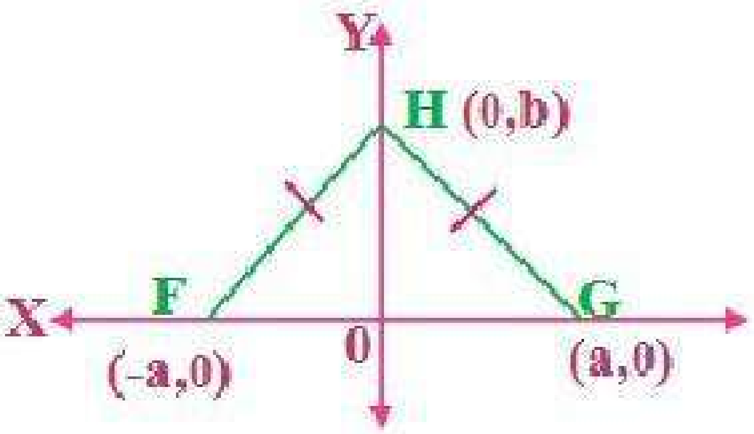
وبما أن $AT\cong HT$، فإن ΔATH متطابق الضلعين تقريباً.

ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوي الاحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه: المثال١

1)

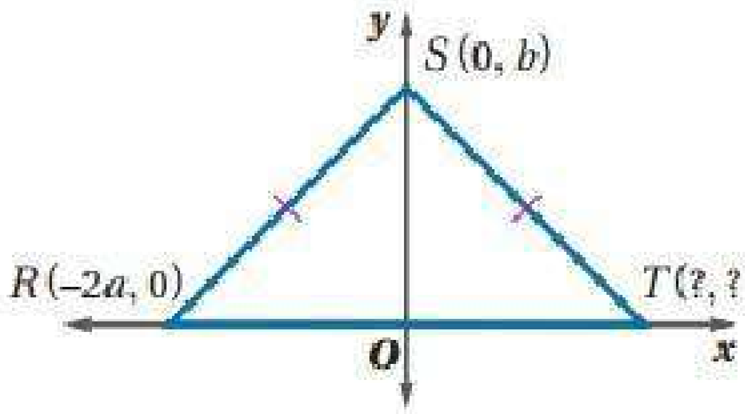


(2



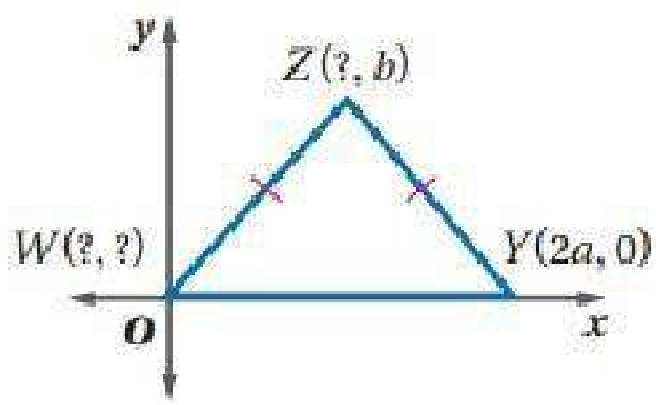
أوجد الإحداثيات المجهولة في كل من المثلثين الآتيين: المثال٢

(3



وبما أن الرأس T يقع على المحور Xفإن الإحداثي $Y=0$ وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن النقطة T تقع عند النقطة $(2a,0)$

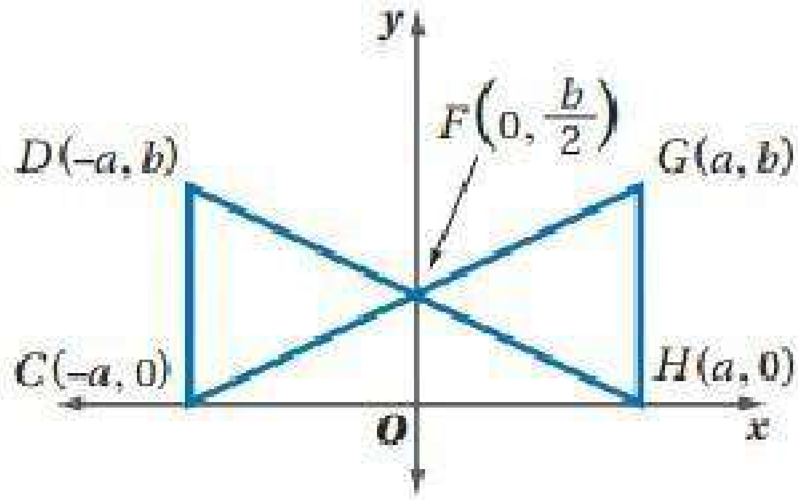
(4



بما أن الرأس W يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي$(0,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس Zيقع في منتصف المسافة بين $0,2a$ويكون a إذن الإحداثي الرأسي Z : (a,b)

5) اكتب برهانا احداثياً لإثبات أن $\Delta FGH \cong \Delta FDC$. المثال٣



$$DC = \sqrt{(-a-(-a))^2 + (b-0)^2} = b$$

$$GH = \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2} = b$$

بما أن $DC = GH$، فإن $\overline{DC} \cong \overline{GH}$.

$$DF = \sqrt{(0-a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

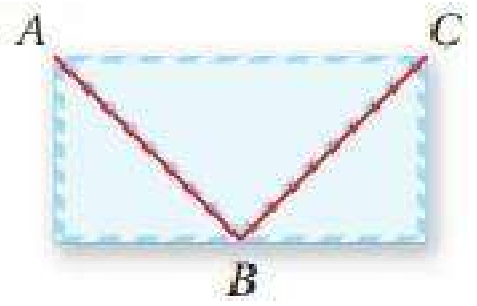
$$GF = \sqrt{(0+a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$CF = \sqrt{(0+a)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$HF = \sqrt{(a-0)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$\Delta FGH \cong \Delta FDC$ بحسب SSS

6) اكتب برهانا إحداثياً لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين: المثال٤



استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتجد AB و BC

$$A(0,10), B(10,0), C(20,10)$$

$$AB = \sqrt{(0-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

$$BC = \sqrt{(20-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

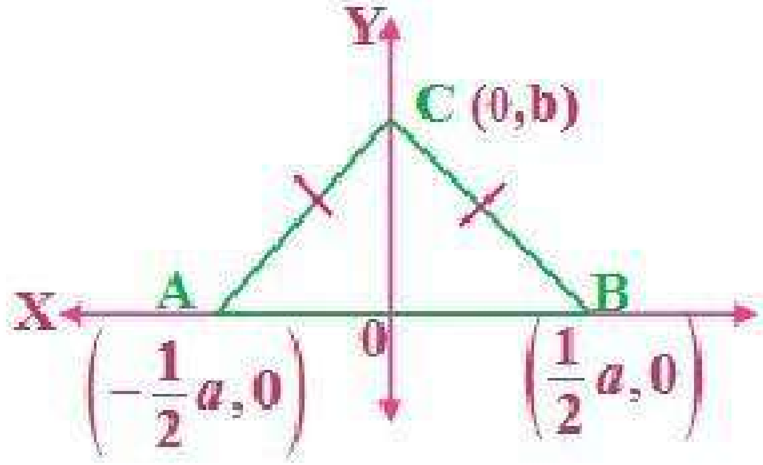
وبما أن $AB = BC$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ويكون الساقان متطابقتين، أي أن:

ΔABC متطابق الضلعين.

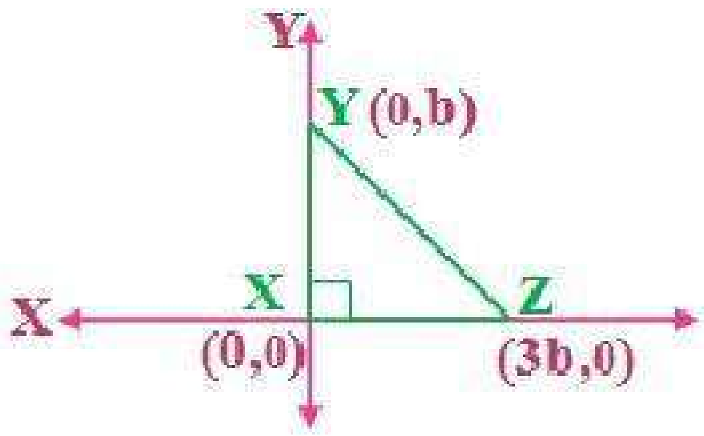
تدرب وحل المسائل

ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوي الاحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه:

(7

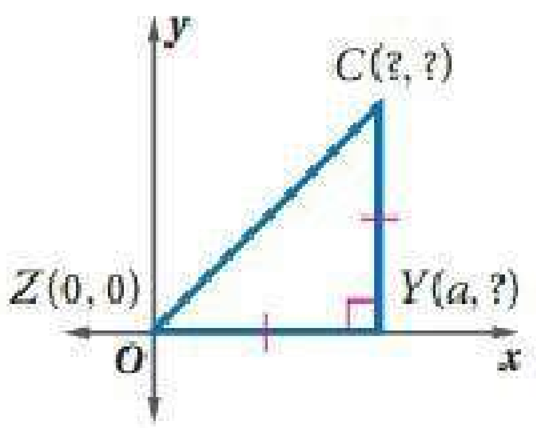


(8



أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي: المثال٢

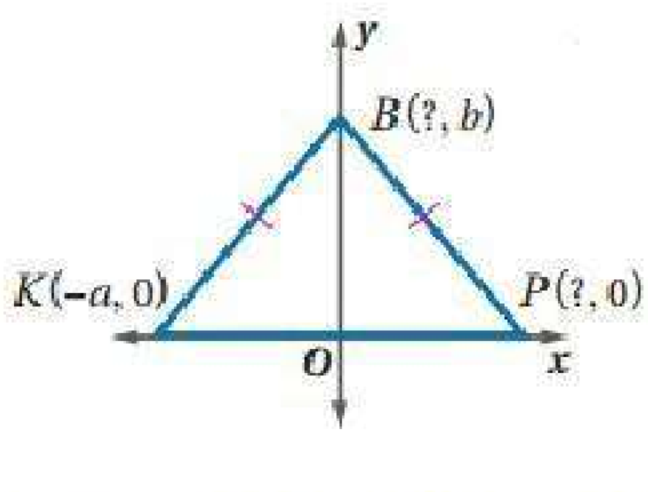
(9



وبما أن الرأس Y يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وتكون الرأس Y: $(a,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن تكون الرأس C: (a,a)

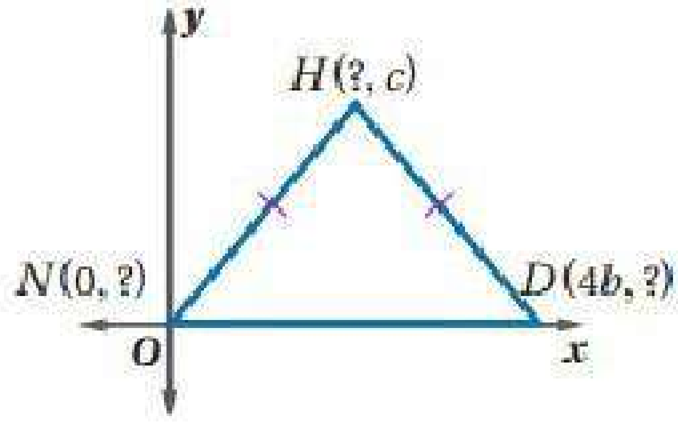
(10



وبما أن الرأس B يقع على المحور Y فإن الإحداثي $X = 0$ وتكون الرأس B: $(0,b)$

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن B تقع في المنتصف إذن النقطة P: $(a,0)$

(11



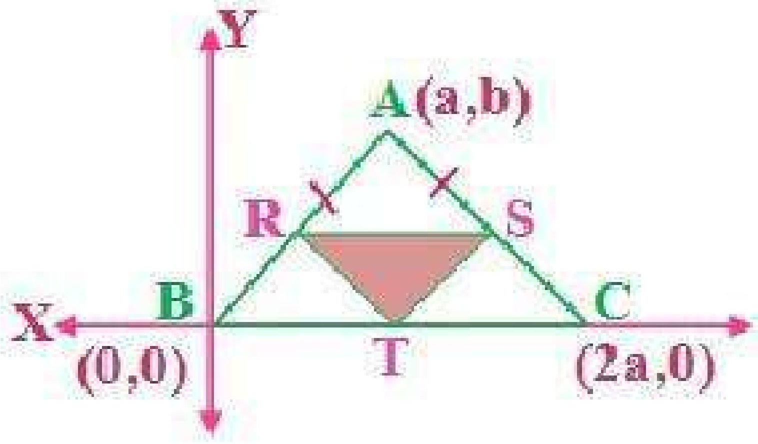
بما أن الرأس N يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0,0)$

وبما أن الرأس D يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y=0$ وتكون الرأس $D:(4b,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس H يقع في منتصف المسافة بين $0,4b$ ويكون $2b$ إذن الإحداثي الرأسي $H:(2b,c)$

برهان:

(12



إحداثيات R هي $\left(\frac{a+0}{2},\frac{b+0}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$

إحداثيات S هي $\left(\frac{a+2a}{2},\frac{b+0}{2}\right)=\left(\frac{3a}{2},\frac{b}{2}\right)$

إحداثيات T هي $\left(\frac{2a+0}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(a,0)$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{3a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$$

$$RT = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$$

الاحظ أن $RT = ST$، وهذا يعني أن $\overline{RT} \cong \overline{ST}$، لذا فالمثلث ΔRST متطابق الضلعين.

(13

إحداثيات S هي $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

وإحداثيات T هي $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

$$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = a$$

اذن $ST = \frac{1}{2}AB$

14) جغرافيا:

المسافة بين جيزان ونجران: $1.69 \approx \sqrt{(16.9 - 17.5)^2 + (42.58 - 44.16)^2}$

المسافة بين جيزان وخميس: $1.42 \approx \sqrt{(16.9 - 18.3)^2 + (42.58 - 42.8)^2}$

المسافة بين نجران وخميس: $1.58 \approx \sqrt{(17.5 - 18.3)^2 + (44.16 - 42.8)^2}$ وبما أن هذه المسافات مختلفة، فإن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضح إجابتك:

15)

$$m_{(x,y)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2h-0}{2h-0}=1$$

$$m_{(y,z)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2h}{4h-2h}=-1$$

$$m_{(z,x)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-0}{4h-0}=0$$

ميل XY يساوي 1، ميل YZ يساوي -1 ميل ZX يساوي صفرا

وبما أن ناتج ضرب ميلي ضلعين في المثلث يساوي -1 فانه قائم الزاوية.

16)

$$m_{(x,y)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{h-0}{1-0}=h$$

$$m_{(y,z)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-h}{2h-1}=\frac{-h}{2h-1}$$

$$m_{(z,x)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-0}{2h-0}=0$$

ميل XY يساوي h، ميل YZ يساوي $\frac{-h}{2h-1}$ ميل ZX يساوي صفرا

ولا يوجد ميلان ناتج ضربهما يساوي -1 إذن المثلث ليس قائم الزاوية

17) نزهة:

ميل الطريق الواصل بين الخيميتين يساوي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 25}{12 - 0} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}$$

وميل الطريق بين موقع الإدارة والخيمة الواقعة عند $(12, 9)$ يساوي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 0}{12 - 0} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

وبما أن $\frac{3}{4} \times \frac{-4}{3} = -1$، فإن المثلث المتشكل من الخيمتين وإدارة المتنزة مثلث قائم الزاوية.

18) رياضة مائية:

(a

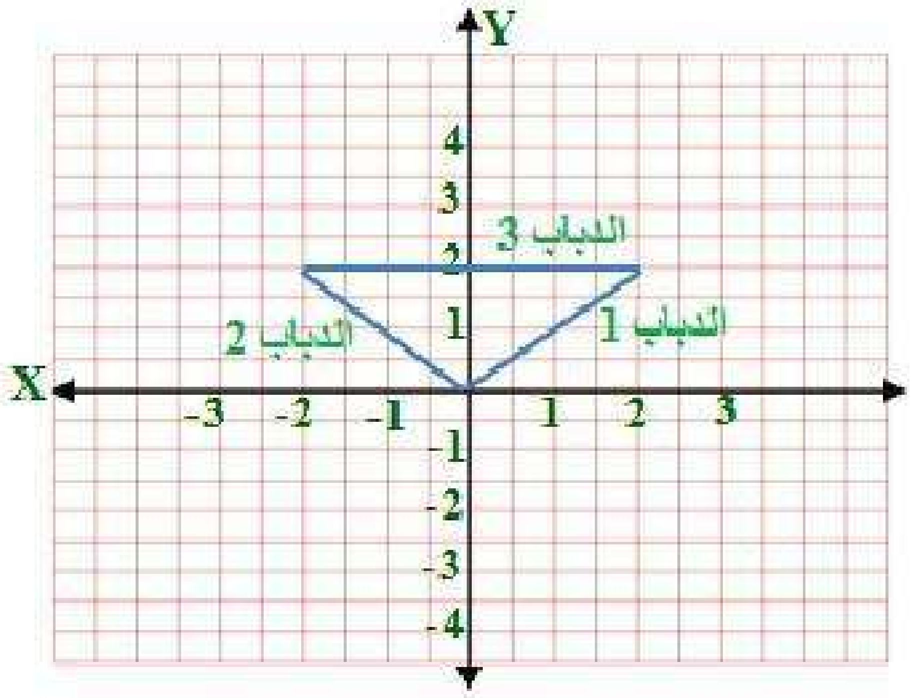
القارب الأول يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للشرق من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات = 0

لذا ميل معادلة سير القارب الأول = 1، معادلته هي $y = x$

بالمثل القارب الثاني يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للغرب من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات = 0

لذا ميل معادلة سير القارب الثاني = (-1) و معادلته هي $y = -x$

القارب الثالث يسير إلى الشمال و هذا يعني على محور الصادات، لذا معادلة المستقيم هي $x = 0$



(b

المسافة بين الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني $300m$، لذا فإن هذين الضلعين متطابقان. ويكون المثلث المتكون من الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث المتطابق الضلعين.

(c

الدباب الأول سار نفس الوحدات الى الشمال و الشرق من نقطة الأصل لذا مسار الدباب الاول يعتبر وتر للمثلث القائم المتطابق الأضلاع .

نفرض x طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الأضلاع .

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$2x^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$x = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

بالمثل للدباب الثاني نفرض ان y طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الاضلاع.

$$2y^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$y = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

حيث أن مسار الدباب الاول يقع في الربع الاول ، لذا فإن احداثياته هي:
$\left(150\sqrt{2}\ ,\ 150\sqrt{2}\right)$

بالمثل الدباب الثاني يقع في الربع الثاني، لذا فإن إحداثياته هي:
$\left(-150\sqrt{2}\ ,150\sqrt{2}\right)$

الدباب الثالث سار إلى الشمال $212\ yd.$ على محور الصادات، لذا احداثياته هي
$.\left(0\ ,\ 212\right)$

(d

$\because 150\sqrt{2} \approx 212.13$

لذا يعتبر الثلاث دبابات لهما تقريبا نفس الإحداثي الصادي، أي تقريبا على استقامة واحدة

منتصف المسافة بين الدباب الاول و الثاني:

$$\left(\frac{150\sqrt{2}+\left(-150\sqrt{2}\right)}{2}\ ,\ \frac{212+212}{2}\right)=\left(0\ ,\ 212\right)$$

و هذا هو موقع الدباب الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحد:

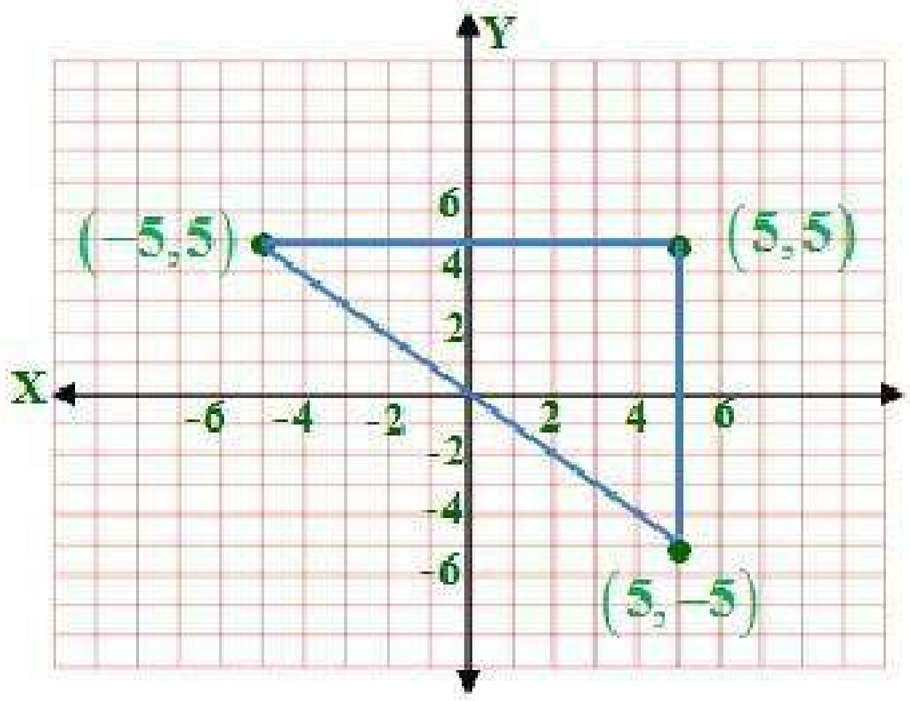
19) $L: (a, 0)$

20) $L: (2a, 0)$

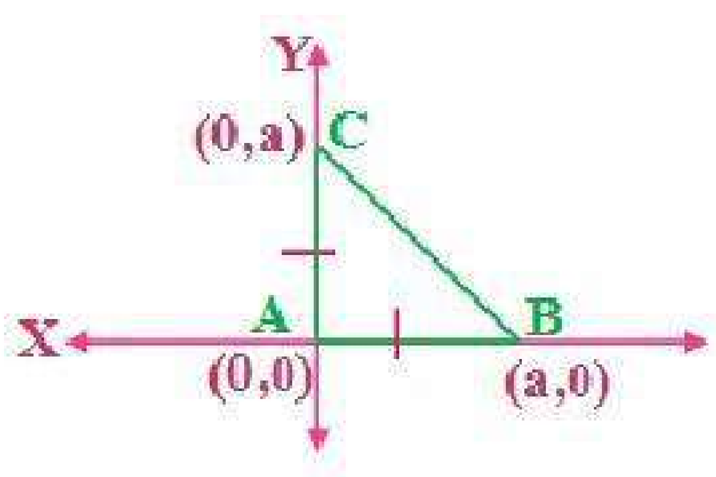
21)

بما أن المثلث متطابق الضلعين والنقطة K تقع في متصف المسافة بين الرأس L, J
إذن النقطة $L: (4a, 0)$

22) مسألة مفتوحة:



23) تبرير:



بما أن الرأس الثالث يقع على محور y إذن $x = 0$ وتكون إحداثيات الرأس $(0, a)$

24) اكتب:

a) استعمال نقطة الأصل رأسا للمثلث يسهل العمليات الحسابية لان إحداثيات نقطة الأصل (0,0)

b) رسم ضلع واحد على الأقل للمثلث على المحور X أو المحور y يسهل الحسابات عند إيجاد أطوال أضلاع لان احد الإحداثيات يكون 0

c) رسم المثلث في الربع الأول يجعل جميع إحداثيات رؤوسه موجبة وهذا يسهل إجراء العمليات الحسابية.

تدريب على الاختبار المعياري

25) D

$$m\angle B = 76^\circ$$

$$m\angle A = 76^\circ \div 2 = 38^\circ$$

$$m\angle C = 180 - \left(76^\circ + 38^\circ\right)$$

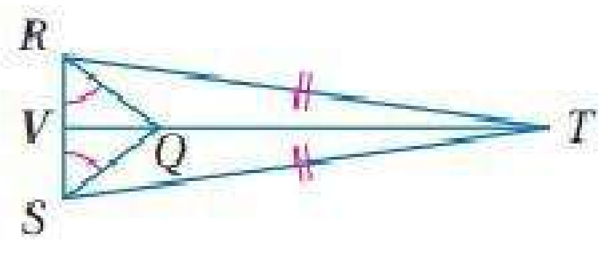
$$m\angle C = 66^\circ$$

26) B

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس R يقع في منتصف المسافة بين $0, 2a$ ويكون a إذن الإحداثي الرأسي R: (a, b)

مراجعة تراكمية

انظر إلى الشكل المجاور



27) $\angle TSR = \angle TRS$

28) $RQ = QS$

29) $\Delta RQV \cong \Delta SQV$

30) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-6)}{2-(-2)} = \frac{12}{4} = 3$

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية وقرب الناتج الى اقرب عشر:

31) $X(5,4), Y(2,1)$

$XY = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (1-4)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18} \approx 4.2$

32) $A(1,5), B(-2,-3)$

$AB = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-3-5)^2}$

$\sqrt{9+64} = \sqrt{73} \approx 8.5$

33) $J(-2,6), K(1,4)$

$JK = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (4-6)^2}$

$\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3.6$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك: حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأستبدل ماتحته خط لتصبح صحيحة:

١) عبارة صحيحة

٢) خاطئة، منفرج الزاوية

٣) عبارة صحيحة

٤) خاطئة، المتطابق الضلعين.

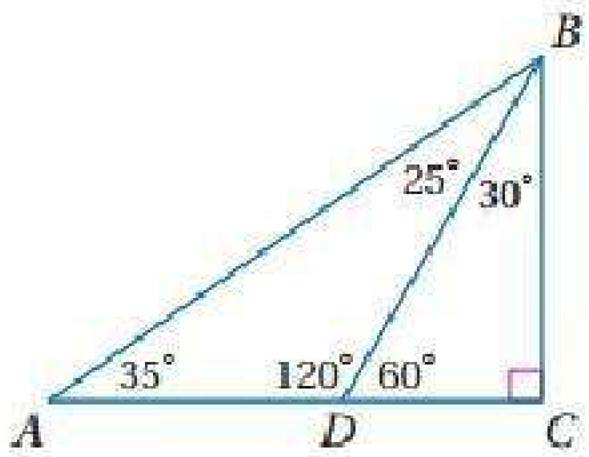
٥) عبارة صحيحة

٦) خاطئة، البرهان الإحداثي.

٧) عبارة صحيحة

3-1 تصنيف المثلثات (ص: 148-142)

صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



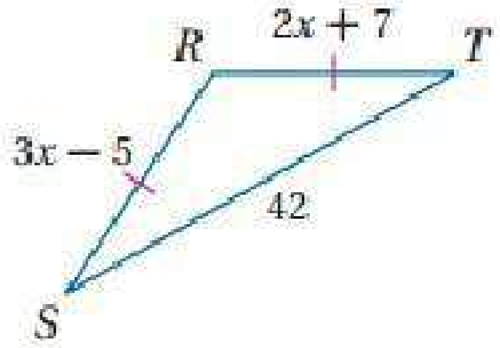
٨) $\triangle ADB$ مختلف الأضلاع لأن جميع زواياه مختلفة.

٩) $\triangle ADB$ قائم الزاوية لأن $\angle C = 90^\circ$.

١٠) $\triangle ABC$قائم الزاوية لأن $\angle C = 90^\circ$.

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات الآتية:

11)



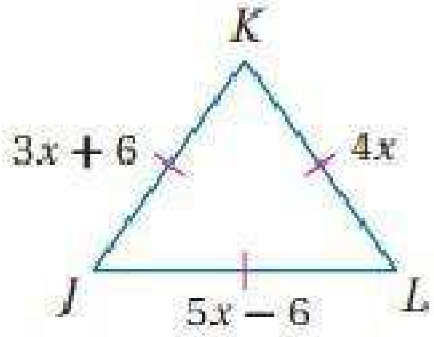
$\because RT = RS$

$\therefore 3x - 5 = 2x + 7$

$3x - 2x = 7 + 5$

$x = 12$

12)



$\because KL = KJ$

$\therefore 3x + 6 = 4x$

$4x - 3x = 6$

$x = 6$

خرائط:

المدن الثلاثة هم رؤوس مثلث

نفرض أن المسافة بين الرياض و المدينة المنورة x ، و المسافة بين المدينة المنورة و مكة المكرمة y ، المسافة بين الرياض و مكة المكرمة z.

$$x + y + z = 2092$$

$$x = y + 515$$

$$z = y + 491$$

$$(y + 515) + (y + 491) + y = 2092$$

$$3y + 1006 = 2092$$

$$3y = 1086$$

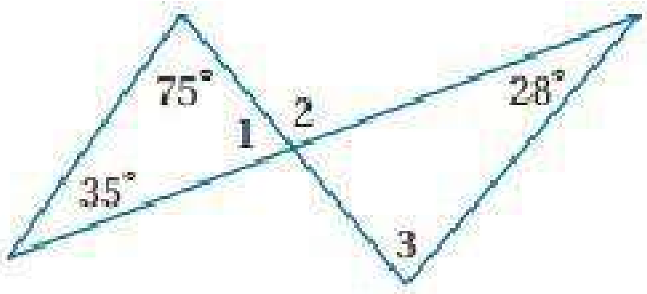
$$y = 362\ km$$

$$x = 362 + 515 = 877\ km$$

$$z = 491 + 362 = 853\ km$$

3-2 زوايا المثلثات (ص: 150-157)

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في الشكل المجاور:



14)

$\angle 1 = 180^\circ - (75 + 35)$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle 1 = 70^\circ$

15)

$\angle 2 = 180^\circ - 70$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$\angle 1 = 110^\circ$

16)

$\angle 3 = 180^\circ - (110 + 28)$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle 3 = 42^\circ$

منازل: (17

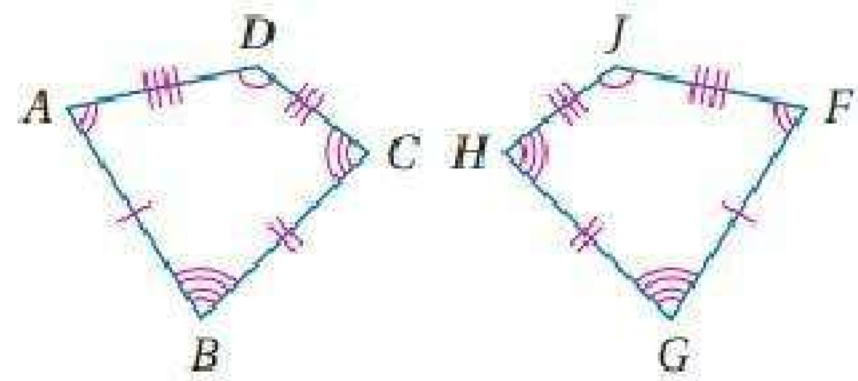
$\angle x = 180^\circ - (38 + 38)$

$\angle x = 104^\circ$

3-3 المثلثات المتطابقة (ص: 158-165)

بين أن كل مضلعين مما يأتي متطابقان، وذلك بتحديد جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق:

(١٨

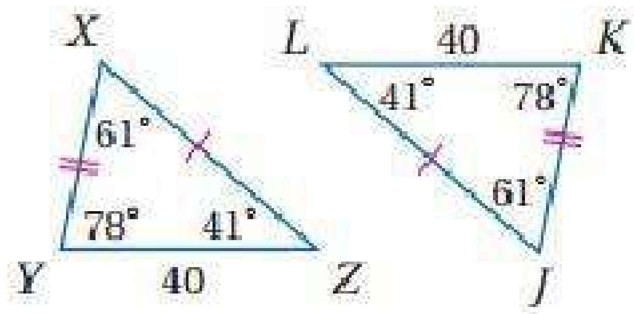


بما أن: $AB = FG, BC = GH, CD = HJ, AD = FJ$

$\angle J = \angle D, \angle A = \angle F, \angle G = \angle B, \angle H = \angle C$

إذن $ABCD \cong FGHJ$ حسب SSS

(١٩



بما أن: $LJ = XZ$, $KJ = XY$ ، $\angle J = \angle X = 61^\circ$

إذن $\Delta JKL \cong \Delta XYZ$ حسب SAS

٢٠) فسيفساء:

أربع مثلثات تبدو متطابقة: $\Delta FAE, \Delta EDH, \Delta GCH, \Delta FBG$

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS

حدد ما إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$، ووضح اجابتك.

٢١)

$A(5,2), B(1,5)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (5-2)^2}$

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$B(1,5), C(0,0)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-5)^2}$

$\sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$A(5,2), C(0,0)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-5)^2 + (0-2)^2}$

$\sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$X(-3,3), Y(-7,6)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-7+3)^2+(6-3)^2}$$

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$Y(-7,6), Z(-8,1)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-8+7)^2+(1-6)^2}$$

$\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$

$X(-3,3), Z(-8,1)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-8+3)^2+(1-3)^2}$$

$\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه ومتطابقة إذن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS

22)

$A(3,-1), B(3,7)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-3)^2+(7+1)^2}$$

$\sqrt{0+64}=\sqrt{64}=8$

$B(3,7), C(7,7)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7-3)^2+(7-7)^2}$$

$\sqrt{16+0}=4$

$A(3,-1), C(7,7)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7-3)^2+(7+1)^2}$$

$\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$

$X\left(-7,0\right),Y\left(-7,4\right)$

$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(-7+7\right)^2+\left(4-0\right)^2}$

$\sqrt{0+16}=4$

$Y\left(-7,4\right),Z\left(1,4\right)$

$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(1+7\right)^2+\left(4-4\right)^2}$

$\sqrt{64+0}=8$

$X\left(-7,0\right),Z\left(1,4\right)$

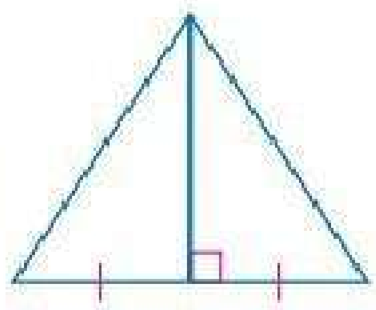
$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(1+7\right)^2+\left(4-0\right)^2}$

$\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$

ليس جميع الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه إذن $\Delta ABC \not\cong \Delta XYZ$

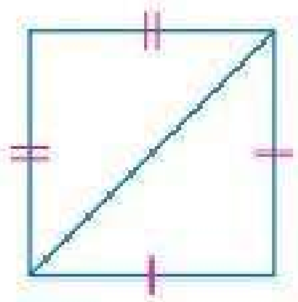
حدد المسلمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل مثلثين فيما يأتي متطابقان.

٢٣)



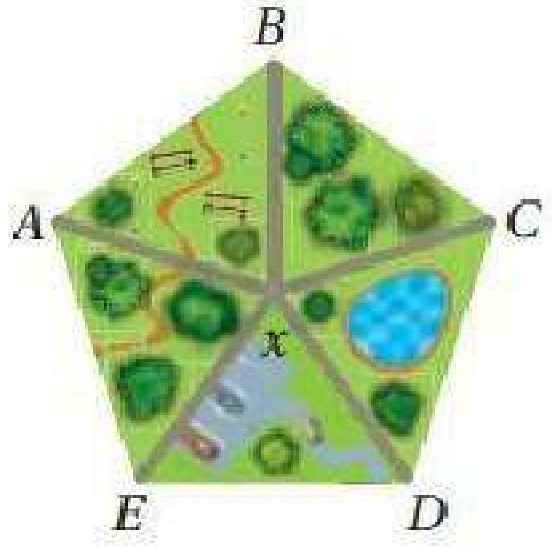
مسلمة SAS ضلعين وزاوية محصورة بينهم

٢٤)



مسلمة AAS

25) متنزهات:



بما أن جميع ممرات المشاة لها نفس الطول والزوايا المركزية متساوية إذن:

$$BX = CX \, , \, AX = DX$$

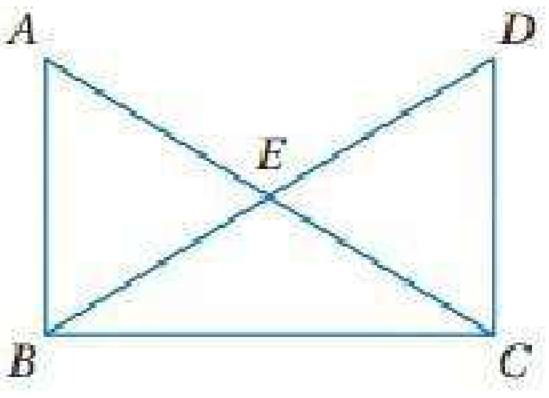
$$\angle BXA = \angle CXD$$

إذن $\Delta ABX \cong \Delta DCX$ **حسب مسلمة** SAS.

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS

اكتب برهانا ذا عمودين:

٢٦)



البرهان: العبارات (المبررات)

$\overline{AB} \cong \overline{DC} \, , \, AB \parallel DC$ **(معطى)**

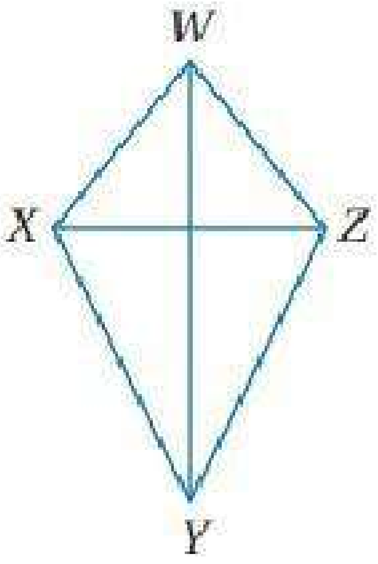
$\overline{AB} = \overline{DC}$ **(تعريف تطابق القطع المستقيمة)**

$\angle CDB = \angle ABD$ **(زاويتان متبادلتان داخلياً)**

$\angle BAC = \angle DCA$ **(زاويتان متبادلتان داخلياً)**

إذن $\Delta ABE \cong \Delta CDE$ **حسب مسلمة** ASA.

٢٧) الطائرة الورقية:



البرهان: العبارات (المبررات)

$\overline{WY}$ تنصف كل من $\angle XYZ$, $\angle XWZ$ (معطى)

$\angle ZWY = \angle XWY$ (تعريف التنصيف)

$\angle WYZ = \angle XYW$ (تعريف التنصيف)

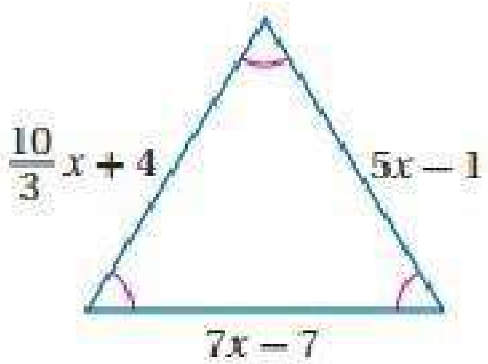
$\overline{WY} = \overline{WY}$ (حسب خاصية الانعكاس)

إذن $\Delta WZY \cong \Delta WXY$ حسب مسلمة ASA.

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

أوجد قيمة كل من المتغيرين فيما يأتي:

28)



$7x - 7 = 5x - 1$

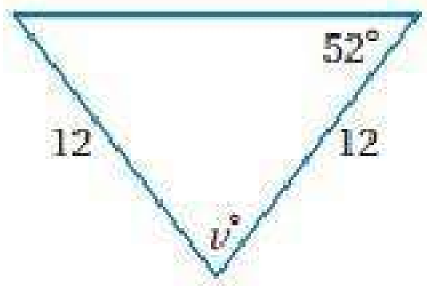
$7x - 5x = -1 + 7$

$2x = 6$

$x = 3$

عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

29)



$$\angle v = 180^\circ - \left(52^\circ + 52^\circ\right)$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$$v = 76^\circ$$

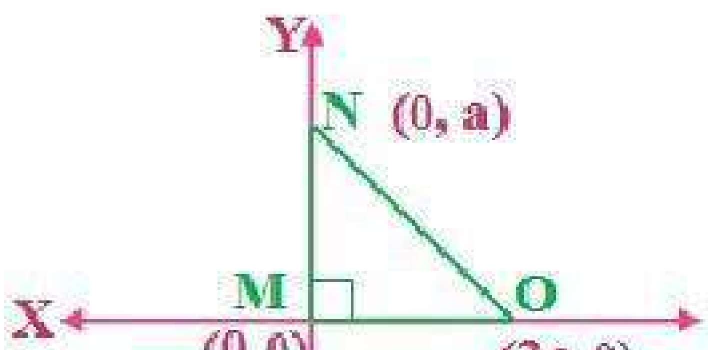
30) رسم:

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن زوايا القاعدة متساوية إذن قياس كل منهما:

$$\left(180 - 25\right) \div 2 = 77.5^\circ$$

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي (ص: 195-190)

٣١)



اجعل نقطة الأصل رأسا للزاوية القائمة في المثلث.

اجعل احد ضلعي القائمة على المحور x والضلع الأخر على المحور y.

بما أن النقطة O على المحور x إذن فإن إحداثيها $y = 0$ وإحداثيها $x = 2a$

بما أن النقطة N على المحور y إذن فإن إحداثيها $x = 0$ وإحداثيها $y = a$

32) جغرافيا:

نفرض أن حائل = A : $(3,5)$

نفرض أن بريدة = B : $(6,3)$

نفرض أن المدينة المنورة = C : $(0,0)$

$A(3,5), B(6,3)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(6-3)^2+(3-5)^2}$$

$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$B(6,3), C(0,0)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(0-6)^2+(0-3)^2}$$

$\sqrt{36+9}=45$

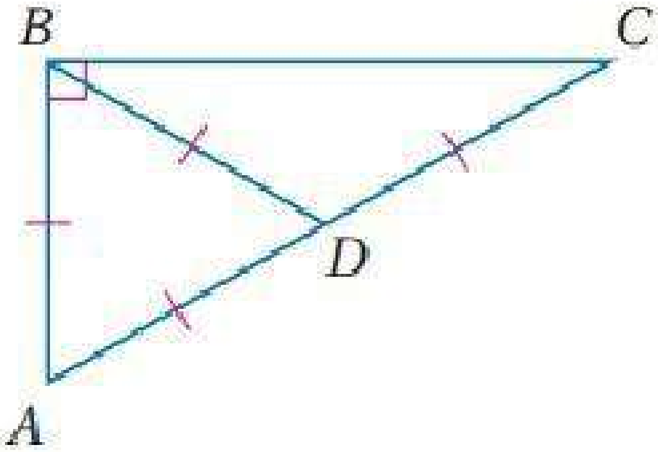
$A(3,5), C(0,0)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2}$$

$\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

بما أن جميع أطوال أضلاع المثلث مختلفة إذن المثلث مختلف الأضلاع.

صنف كل من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



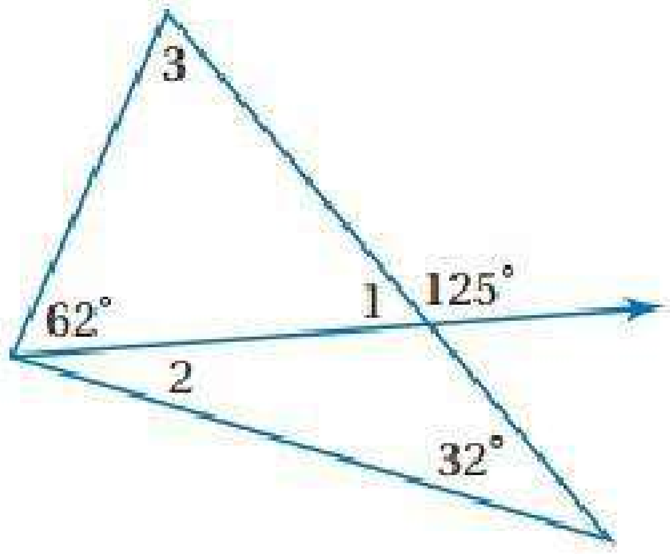
1) $\triangle ABD$ متطابق الزوايا لأن جميع أطوال أضلاع متساوية حسب نظرية المثلث المتطابق الاضلاع.

2) $\triangle ABC$ قائم الزاوية لأن $\angle B = 90^\circ$.

3) $\triangle BDC$ منفرج الزاوية لأن

$\angle CBD = 30^\circ, \angle BCD = 30^\circ, \angle BDC = 120^\circ$ حسب نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

أوجد قياس كل زاوية مرقمة:



4)

$\angle 1 = 180^\circ - 125^\circ$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$\angle 1 = 55^\circ$

5)

$\angle 1 = \angle 2 + 32^\circ$

حسب نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$55^\circ = \angle 2 + 32^\circ$

$\angle 2 = 55^\circ - 32^\circ = 23^\circ$

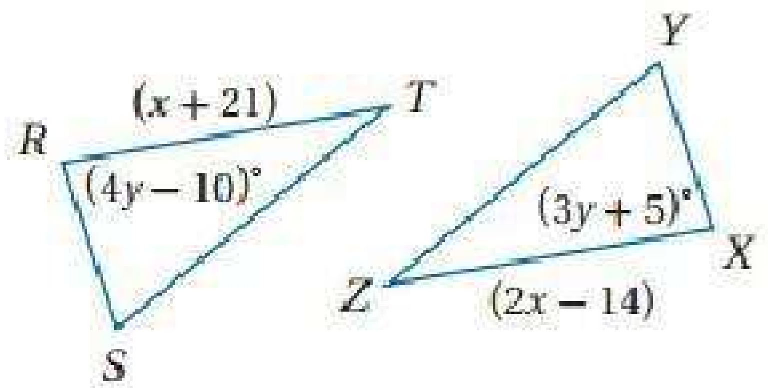
6)

$\angle 3 = 180^\circ - \left(\angle 1 + 62^\circ\right)$

$\angle 3 = 180^\circ - \left(55^\circ + 62^\circ\right)$

$\angle 3 = 63^\circ$

في المثلثين أدناه أوجد قيمة x, y:



7)

$\because \Delta RST \cong \Delta XYZ$

$\therefore RT = XZ$

$2x - 14 = x + 21$

$2x - x = 21 + 14$

$x = 35$

8)

$\because \Delta RST \cong \Delta XYZ$

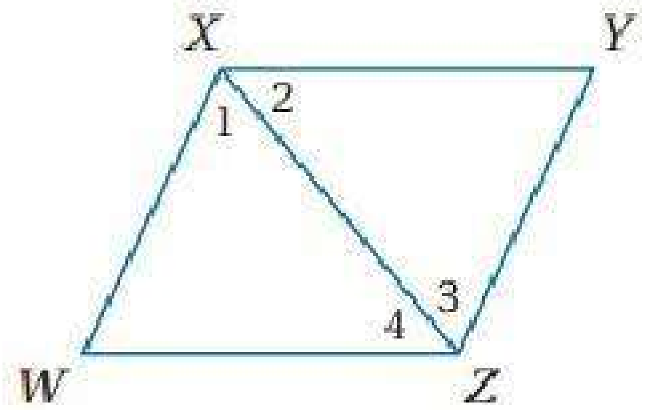
$\therefore \angle TRS = \angle ZXY$

$4y - 10 = 3y + 5$

$4y - 3y = 5 + 10$

$y = 15$

9) برهان:



$\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ معطى

$\angle 2 \cong \angle 4$ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

$\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$ خاصية الانعكاس

$\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$ معطى

$\angle 1 \cong \angle 3$ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

$\Delta XWZ \cong \Delta ZYX$ ASA

اختبار من متعدد:

10) C

بما أن المثلث الذي رأسه 116° متطابق الأضلاع إذن زوايا قاعدته متساوية.

زاوية قاعدة المثلث الذي رأسه 116°: $180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$

إذن كل زاوية من زوايا القاعدة $= 64^\circ \div 2 = 32^\circ$

وبذلك تكون إحدى زاوية القاعدة للمثلث الذي رأسة x:

$180^\circ - (72^\circ + 32^\circ) = 76^\circ$ لأنهما زاويتان متجاورتان على مستقيم

وبما أن المثلث الذي رأسه x متطابق الضلعين إذن

$$\angle x = 180^\circ - (76 + 76)$$

$$\angle x = 28^\circ$$

(11

نعم $\Delta TJD \cong \Delta SEK$ باستعمال مسلمة SSS

$T(-4,-2), J(0,5)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0+4)^2 + (5+2)^2}$$

$$\sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

$J(0,5), D(1,-1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-5)^2}$$

$$\sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$T(-4,-2), D(1,-1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1+4)^2 + (-1+2)^2}$$

$$\sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$S(-1,3), E(3,10)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3+1)^2+(10-3)^2}$

$\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$

$E(3,10), K(4,4)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-3)^2+(4-10)^2}$

$\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$

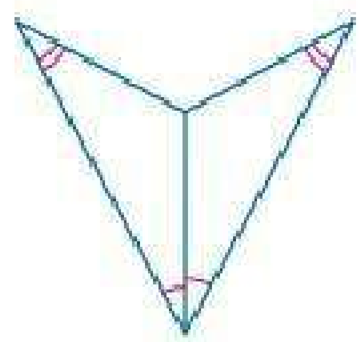
$S(-1,3), K(4,4)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4+1)^2+(4-3)^2}$

$\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

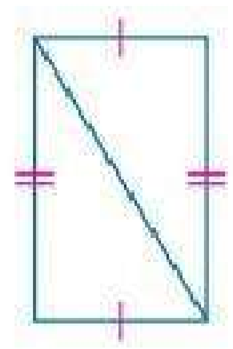
حدد النظرية أو المسلمة التي يمكن لإثبات أن كل زوج من أزواج المثلثات متطابق واكتب (غير ممكن) إذا تعذر إثبات التطابق:

(12



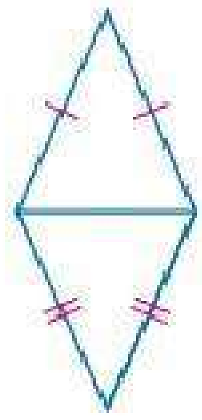
مسلمة AAS

(13



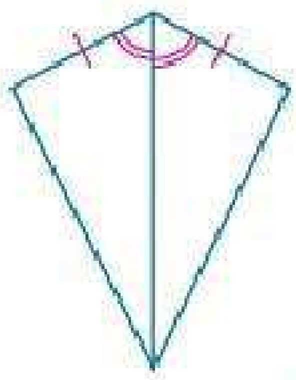
مسلمة SSS

(14



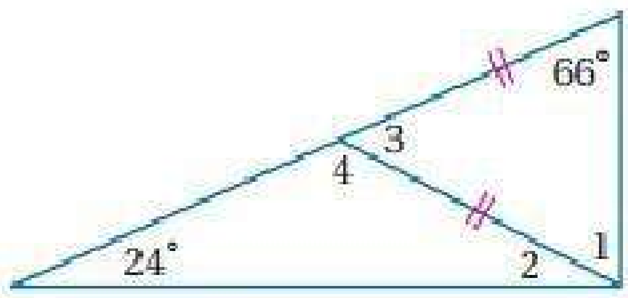
غير ممكن

(15



مسلمة SAS

أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:



16)

لأن المثلث متطابق الضلعين

$\angle 1 = 66^\circ$

17)

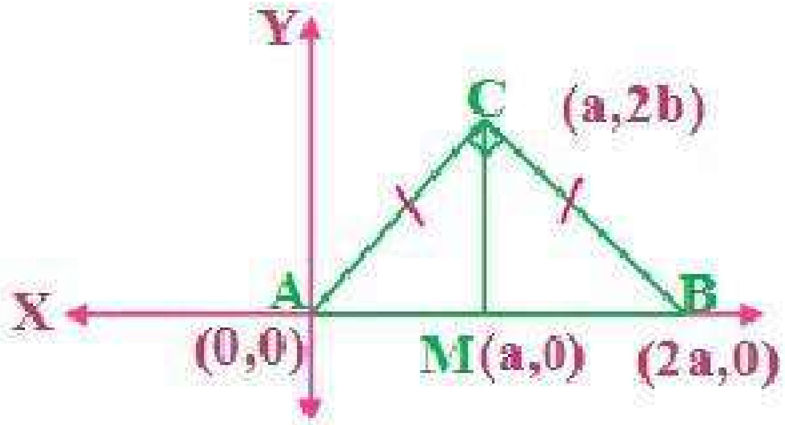
$(\angle 1 + \angle 2) = 180 - (66 + 24)$

$(\angle 1 + \angle 2) = 90^\circ$

$\angle 2 = 90^\circ - 66^\circ$

$\angle 2 = 24^\circ$

18) برهان:



ميل CM غير معرف

ميل AB يساوي صفرا

نقطة منتصف AB هي $(a,0)$

معطى

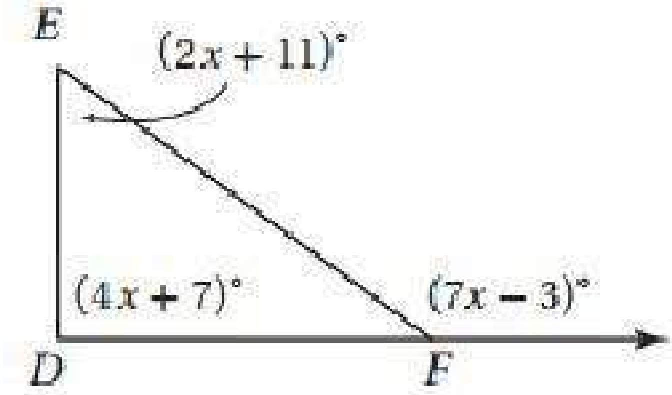
إذن CM خط رأسي

إذن فهو أفقي

$AB \perp CM$

تمارين ومسائل

١) صنف ΔDEF حسب زواياه



زاوية $\angle F$ الخارجة عن المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخلتين البعيدتين إذن:

$$(7x-3)^\circ = (2x+11)^\circ + (4x+7)^\circ$$

$$7x-3 = 6x+18$$

$$7x-6x = 18+3$$

$$x = 21$$

$$\angle FED = 2x+11 = 2\times 21+11$$

$$\angle FED = 53^\circ$$

$$\angle EDF = 4x+7 = 4\times 21+7$$

$$\angle EDF = 91^\circ$$

$$\angle EFD = 180^\circ - (84+53)$$

$$\angle EFD = 36^\circ$$

هذا المثلث منفرج الزاوية لأنه يحتوي على زاوية أكبر من 90°

٢) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $(2,4),(0,-2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2-4}{0-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

التعويض بالنقطة $(2,4)$ في معادلة المستقيم

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 3(x - 2)$$
$$y - 4 = 3x - 6$$
$$y = 3x - 6 + 4$$
$$y = 3x - 2$$

٣)

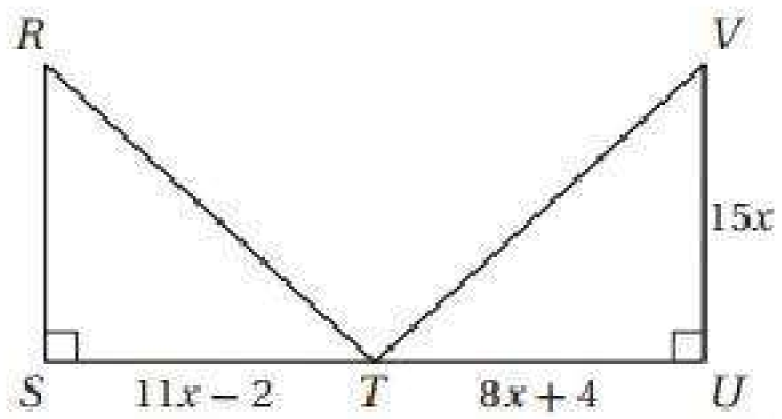
مساحة المستطيل = الطول في العرض

بفرض أن الطول س العرض ص

١٠٠٠ = س × ص

إذن ضلعي المستطيل ٤٠ و ٢٥

٤)



$$\because \Delta RST \cong \Delta VUT$$
$$\therefore ST = UT$$
$$11x - 2 = 8x + 4$$
$$11x - 8x = 4 + 2$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$
$$ST = 11x - 2 = 11 \times 2 - 2 = 20$$

$RS = UV$

$RS = 15x = 15 \times 2$

$RS = 30$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة في الإرتفاع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times ST \times RS = \frac{1}{2} \times 20 \times 30 = 300$

أسئلة الاختيار من متعدد

$1)\ D : \angle 1 = \angle 2 = 110^{\circ}$ زاويتان متبادلتان خارجياً

$2)\ D$: محتلف الأضلاع

$3)\ C : \Delta WXY \cong \Delta JKI$

$4)\ A$

$\angle RTS = 180^{\circ} - 125^{\circ}$

$\angle RTS = 55^{\circ}$

$\angle R = 180^{\circ} - \left(55^{\circ} + 68^{\circ}\right)$

$\angle R = 57^{\circ}$

$5)\ B$

$180^{\circ} - 2\left(44^{\circ}\right) = 92^{\circ}$

$6)\ A$

$180^{\circ} - \left(70 + 47\right) = 63^{\circ}$ حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

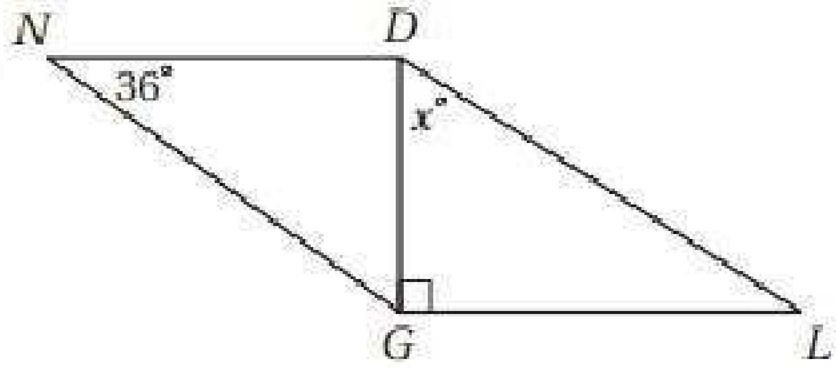
$\angle 1 = 180^{\circ} - \left(63 + 32\right) = 85^{\circ}$ حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

وحسب نظرية الزاويتان المتقابلان بالرأس متساويتان

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

٧) إجابة شبكية:



$\because \Delta NDG \cong \Delta LGD$

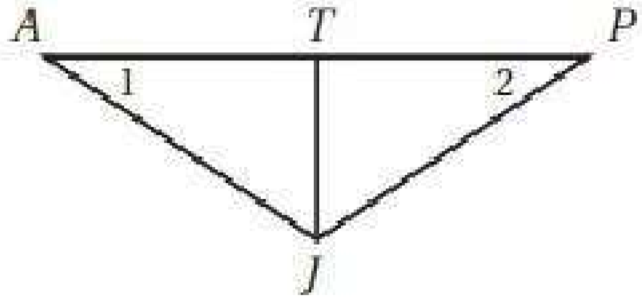
$\therefore \angle LDG = \angle DNG$

$36^\circ = x^\circ$

٨) اكتب عكس العبارة الآتية:

إذا كنت أنا الخاسر فإنك تكون الرابح

٩)



بما أن $\angle 2 = \angle 1$ إذن $\overline{JA} = \overline{JP}$ عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$\overline{JT} = \overline{TJ}$ خاصية الانعكاس

إذن $\Delta ATJ \cong \Delta PTJ$ حسب مسلمة AAS.

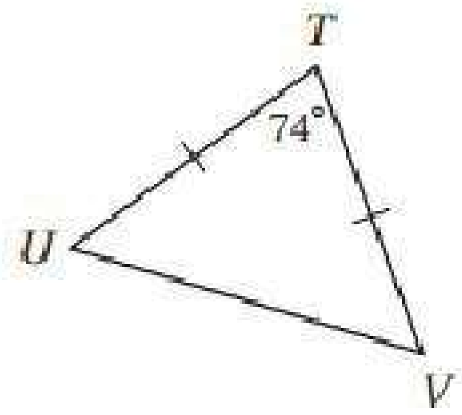
١٠) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(4,-5),(0,3)$ بصيغة الميل والمقطع

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-5-3}{4-0}=\frac{-8}{4}=-2$$

التعويض بالنقطة $(0,3)$ في معادلة المستقيم

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-3=-2(x-0)$$
$$y-3=-2x+0$$
$$y=-2x+3$$

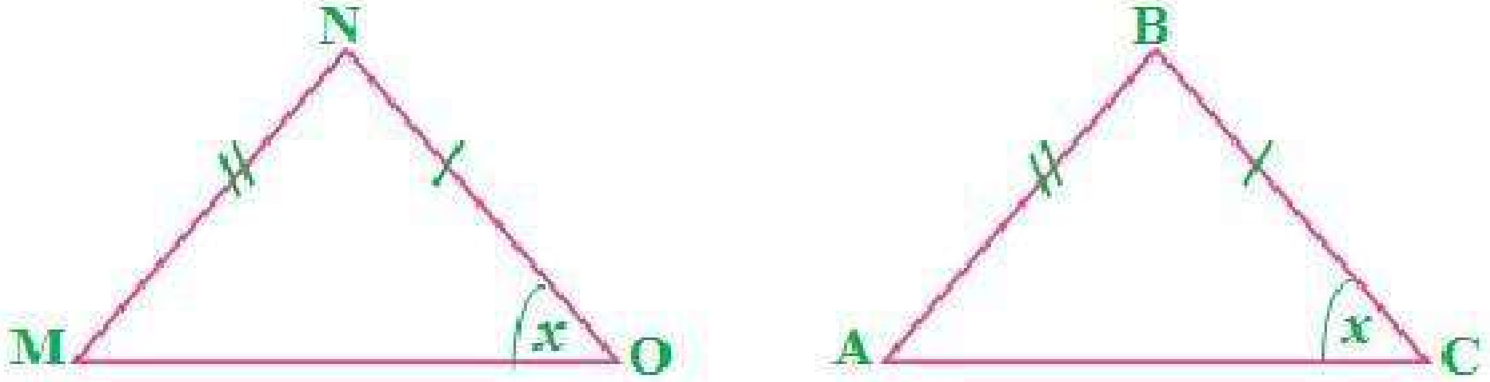
١١) أوجد $\angle TUV$ في الشكل أدناه:



بما أن ΔUTV متطابق الضلعين إذن $\angle TUV=\frac{(180^\circ-74^\circ)}{2}$

$\angle TUV=53^\circ$

١٢)



لا يمكن تطابق المثلثين لأنه لايوجد مسلمة SSA

(١٣

$\Delta EFG \cong \Delta DCB$

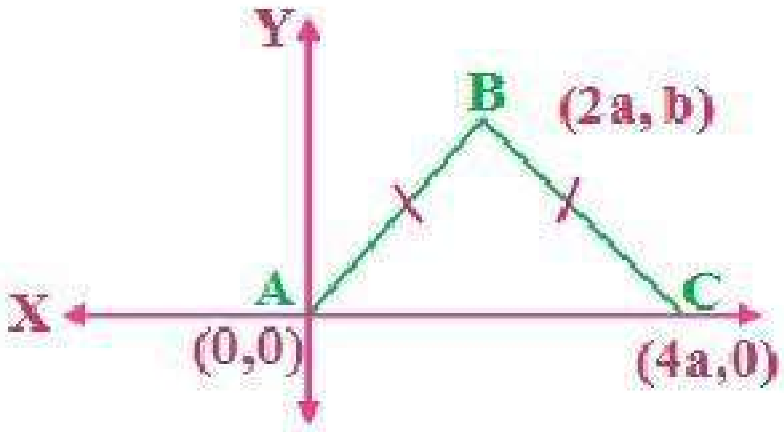
$EF \cong DC, FG \cong CB, EG \cong DB$

$\angle EFG \cong \angle DCB, \angle FGE \cong \angle CBD, \angle FEG \cong \angle CDB$

أسئلة ذات إجابات مطولة

14)

a)



b)

$A(0,0), B(2a,b)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2a-0)^2 + (b-0)^2}$

$\sqrt{4a^2 + b^2} = 2a + b$

c)

$B(2a,b), C(4a,0)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4a-2a)^2 + (0-b)^2}$

$\sqrt{4a^2 + b^2} = 2a + b$

d)

نستنتج من الفرعين b, c أن ΔABC متطابق الضلعين في AB, BC.